



工程动力学

贾启芬 刘习军 编



TB122-43
J32

面向 21 世纪力学系列课程教材

工 程 动 力 学

贾启芬 刘习军 编



A0925572

天津大学出版社

内 容 提 要

本教材是在国家教委立项的面向 21 世纪“基础力学系列课程教学内容与课程体系改革研究与实践”的成果之一。

本书涵盖了原有运动学、动力学的主要经典内容,消除重叠,并引进面向 21 世纪的新内容。全书共 8 章,含运动学理论、普遍定理、分析力学基础和动力学理论应用四部分内容,并配有加强分析方法训练、综合应用训练和结合工程实际的例题和习题。全书采用模块式结构,便于组成不同类型的基础动力学课程。

该书可作高等学校各专业的动力学教材,也可供职工大学、函授大学教学或有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程动力学/贾启芬,刘习军编. —天津:天津大学出版社, 1999. 8

ISBN 7-5618-1223-X

I. 工… II. ①贾… ②刘… III. 工程力学: 动力学-高等学校-教材 IV. TB122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 37452 号

出 版 天津大学出版社
出版人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 河北省邮电印刷厂
发 行 新华书店天津发行所
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 14.125
字 数 406 千
版 次 1999 年 8 月第 1 版
印 次 1999 年 8 月第 1 次
印 数 1—5 000
定 价 19.00 元

前 言

本教材是教育部“基础力学系列课程教学内容与课程体系改革研究与实践”项目的研究成果,是面向 21 世纪基础力学课程系列教材,同时也是天津大学“九五”重点教材。

工程动力学是研究物体机械运动规律的科学,是工科教育中的重要技术基础课,是系统地引导学生结合工程实际的一门理论课程,在学生能力和素质的培养中占有重要的地位,受到国家教委及各院校领导的高度重视。因而力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践这一课题成为国家教委首批立项课题之一。

这一课题的指导思想是:精选课程内容,重组课程结构,构筑适应我国 21 世纪科学技术及工业发展的工程技术人员力学知识构架,培养具备比较宽厚的基础知识和善于抓住机遇追踪占领前沿的能力。基于这一指导思想,并在天津大学理论力学教研室 1995 年由萧龙翔主编的《理论力学》基础上,编写了这本教材。在编写中,考虑了以下几方面的问题。

一、对传统的精典内容加以精选,通过贯通融合和相互渗透,以减少重叠。这不仅有利于减少教学时数,提高课程的教学效率,而且有利于使读者学会如何寻找事物的内在联系,掌握课程的精华。

二、在内容上,贯穿四条主线。其一,从几何的观点论述物体的机械运动,为机构的运动分析提供基本的理论、概念和方法是工程动力学的必需的基础;其二,从牛顿定律出发,通过数学演绎,推导力学普遍定理;其三,从分析力学出发,在虚位移原理和达朗贝

尔原理的基础上,建立动力学普遍方程和拉格朗日方程;其四,应用动力学理论,解决工程中的振动、碰撞问题及综合应用问题。

三、在编写上,力求把本课程的基本概念写得准确、通俗,把基本理论阐述得系统、清楚,把基本方法介绍得全面、明确、重点突出、易于掌握。注意加强分析方法的训练,注意加强综合应用方面的训练,注意加强课程内容与工程实际、生活实际的结合,逐步培养学生的工程观念和将实际问题抽象化为力学模型的能力。

四、采用分层次和模块式的课程结构,设有基础模块和接口模块(这部分用“*”号标注),以适应不同专业、不同教学时数(48~80学时)的要求。

本教材含有绪论、运动学理论、普遍定理、分析力学基础、动力学理论应用等共八章及附录。

本教材由贾启芬、刘习军编写,萧龙翔、邓惠和二位先生参加了教材的研讨及定稿工作,参加教材习题解答、制图及审校工作的有钟顺、黄元英、王德利等。

本教材承蒙毕学涛教授详细审阅,提出了许多非常宝贵的意见;在编写过程中,得到了校教务处领导及机械工程学院、力学系领导和教研室许多教师的支持,在此谨向他们致以衷心的感谢。

限于水平,有错误与不妥之处,望读者不吝指正。

编者

1998年12月于天津大学

第 1 章 运动学基础

1.1 点的运动表示法

点的运动可以有多种描述方法。在这里将讨论矢径法、直角坐标法、自然法。

1.1.1 点的运动矢径表示法

设动点 M 在空间运动。在参考系中,选取一固定点 O 作为参考点,由 O 向动点 M 作矢量 r ,如图 1-1 示。 r 称为动点的矢径。动点运动时的位置可由矢径 r 唯一确定下来。在一般情况下,此矢径 r 的大小和方向都随时间而变化,它是时间 t 的单值连续的矢量函数,即

$$r = r(t) \quad (1-1)$$

这就是用矢量形式表示的点的运动方程。它表明了动点在空间的位置随时间变化的规律,又称运动规律。

动点 M 在空间运动时,矢径 r 的末端将描绘出一条连续曲线,称为矢径端图,它就是动点运动的轨迹。

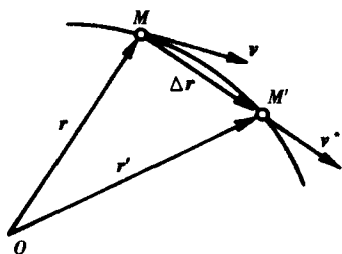


图 1-1

设动点由瞬时 t 到瞬时 $t + \Delta t$,其位置由 M 运动到 M' ,如图 1-1 示。在 Δt 时间间隔内,矢径的改变量为

$$\Delta r = r' - r$$

它代表动点在 t 时间间隔内的位

移。

位移 $\Delta \mathbf{r}$ 与其对应的时间间隔 Δt 的比值,称为动点在时间间隔 Δt 的**平均速度**。平均速度是矢量,沿 $\Delta \mathbf{r}$ 方向,用 $\mathbf{v}^*$ 表示。当 Δt 趋近于零时,平均速度的极限值称为动点在 t 瞬时的**速度**,用 $\mathbf{v}$ 表示,即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-2)$$

这表明,动点的速度等于它的矢径对时间的一阶导数。速度是矢量,它的方向是平均速度 $\mathbf{v}^*$,也就是位移 $\Delta \mathbf{r}$ 的极限方向,亦即沿着轨迹在 M 点的切线、指向点的运动方向。

在国际单位制中,速度的单位是米/秒(m/s)。

设在瞬时 t 和 $t + \Delta t$,动点分别位于 M 和 M' 点,它的速度 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}'$,如图 1-2 示。速度的变化量是 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$,比值 $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 表明单位时间内速度的变化量,称为动点在时间间隔 Δt 内的**平均加速度**。平均加速度是矢量,沿 $\Delta \mathbf{v}$ 的方向,用 $\mathbf{a}^*$ 表示。当 Δt 趋近于零时,平均加速度的极限值称为动点在瞬时 t 的**加速度**,用 $\mathbf{a}$ 表示,即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-3)$$

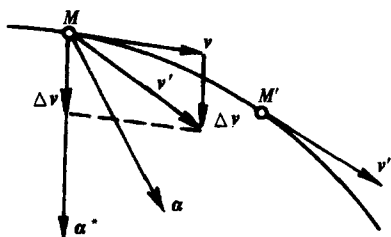


图 1-2

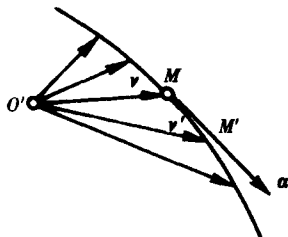


图 1-3

这表明,动点加速度等于它的速度对时间的一阶导数;亦等于它的矢径对时间的二阶导数。

点的加速度是矢量。如果把各瞬时动点的速度矢量 $\mathbf{v}$ 的始端画在同一点 O' 上,按照时间顺序,这些速度矢量的末端将描绘出一条连续的曲线,称为**速度矢端图**,如图 1-3 示。图中 $O'M$ 、 $O'M'$, 分别代表动点在位置 M 、 M' 时的速度。动点加速度的方向是速度矢端图在 M 点的切线方向,如图 1-3 示。

在国际单位制中,加速度的单位是米/秒²(m/s^2)。

1.1.2 点的运动的直角坐标表示法

用矢径法描述点的运动,只需选择一个参考点,不需要建立参考坐标系就可以导出点的速度、加速度的计算公式。这种公式形式简洁,便于理论推导,是研究点的运动学的基本公式,也是整个运动学基本公式的主要部分。为了便于应用和计算,可根据实际情况,选择其他描述运动的方法。直角坐标法是人们熟悉的笛卡尔坐标系。这种方法是矢径法的代数运算。

在参考体的固定点 O 上,建立直角坐标系 $Oxyz$ 作为参考坐标系。设动点在瞬时 t ,它的位置 M 可用三个坐标 x 、 y 、 z 表示,如图 1-4 示。它与矢径 $\mathbf{r}$ 的关系为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-4)$$

其中 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 是 $Oxyz$ 坐标系中沿 x 、 y 、 z 三个坐标的单位矢量。

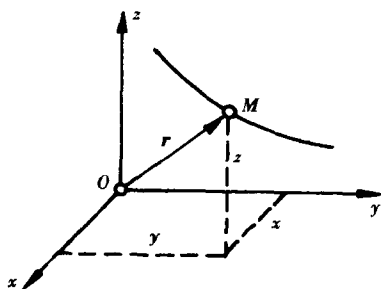


图 1-4

在运动过程中,动点在直角坐标系 $Oxyz$ 中的位置可用坐标 x, y, z 唯一地确定下来。 x, y, z 都是时间 t 的单值连续函数,即

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

这就是用直角坐标表示的动点的运动方程。实际上,它是和时间 t 为参变量的空间曲线方程。从运动方程中消去参变量 t , 可得到点的轨迹方程。

将式(1-4)对时间求一阶导数,注意到 i, j, k 是常矢量,再代入式(1-2),得到点的速度在直角坐标系中的表达式

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \quad (1-6)$$

由此得到,速度在直角坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

即,动点的速度在直角坐标轴上的投影等于其对应坐标对时间的一阶导数。

由速度的投影可求出速度的大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-8)$$

速度的方向由其方向余弦确定

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{v}, i) &= v_x/v \\ \cos(\mathbf{v}, j) &= v_y/v \\ \cos(\mathbf{v}, k) &= v_z/v \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

图 1-5 表示了点的速度和其在直角坐标轴上的投影的关系。

同理,式(1-6)对时间求一阶导数,代入式(1-3),得到点的

加速度在直角坐标系中的表达式

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \quad (1-10)$$

于是,加速度在直角坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

即,动点的加速度在直角坐标轴上的投影等于其对应的速度投影对时间的一阶导数;亦等于对应的坐标对时间的二阶导数。

点的加速度的大小和方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) &= a_x/a, \cos(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = a_y/a, \cos(\mathbf{a}, \mathbf{k}) = a_z/a \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

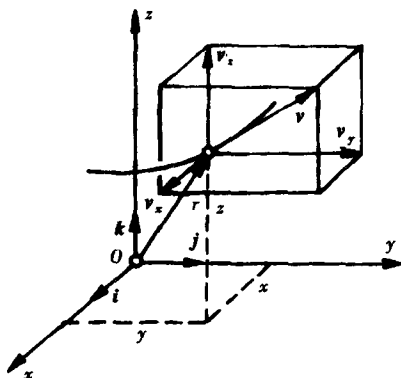


图 1-5

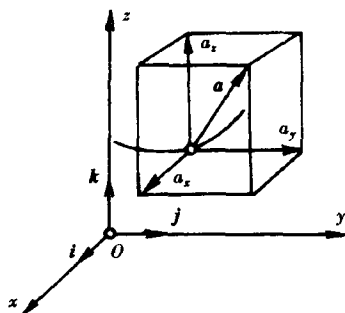


图 1-6

图 1-6 表示了点的加速度与其在坐标轴上投影的关系。

式(1-7)和式(1-11)建立了动点的运动方程与其速度、加速

度的关系。已知动点的运动方程(1-5)时,通过对时间求一阶、二阶导数,可求出动点的速度、加速度;反之,已知动点的加速度和运动的初始条件,通过积分则可求出动点的速度、运动方程和轨迹方程。

1.1.3 点的运动的自然表示法

在点的运动轨迹上建立弧坐标及自然轴系,并用它们来描述和分析点的运动的方法,称为自然法。

在许多的工程实际问题中,动点的运动轨迹往往是已知的。例如火车运行的线路即为已知的轨迹。在此前提下,沿轨迹曲线建立一条弧形曲线坐标轴,称弧坐标轴。设动点沿已知的轨迹曲线运动,如图1-7示。在轨迹上任选一定点 O 为弧坐标轴的原点,并规定从 O 点沿某一边量取的弧长为正值;另一边的则为负值。从 O 点到动点 M 之间的弧长 s 称为动点的弧坐标。由此可知,弧坐标是一代数量。

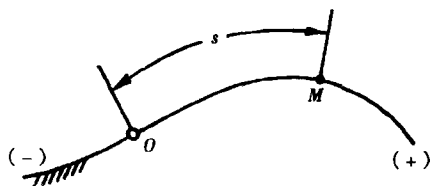


图 1-7

在运动过程中,点在任意瞬时的位置可由弧坐标唯一地确定下来。它是时间 t 的单值连续函数。

$$s = f(t) \quad (1-13)$$

此式表达了动点沿已知轨迹的运动规律,称为用弧坐标表示的点的运动方程。

讨论点的速度、加速度的自然表示法时,将用到与轨迹曲线几何形状有关的自然轴系,为此,先要简要介绍自然轴系的概念。

1.1.3.1 自然轴系

在图 1-8 示的空间曲线 AB 中, τ 表示曲线在 M 点的切线方向上的单位矢量。简称**切向单位矢量**。 τ' 表示与 M 点邻近的 M' 点的切向单位矢量。过 M 点作平行于 τ' 的矢量 τ'' , 并作一包含矢量 τ 和 τ'' 的平面 P 。在 M' 点趋近于 M 点的过程中, 单位矢量 τ 固定不动, τ' 则不断地改变着它的方向, 所以, 平面 P 的位置也在变化, 绕着 τ 不断地转动。当 M' 趋近于 M 点时, 平面 P 将趋向某一极限位置。这个极限位置所在的平面称为此空间曲线在 M 点的**密切面**。 M 点附近的无限小弧段可以近似地看成是一条在密切面内的一平面曲线, 整个空间曲线则可近似地看成是由无限多条无限小的、在一系列密切面内的平面曲线段的组合。很明显。对于平面曲线而言, 密切面就是该曲线所在的平面。

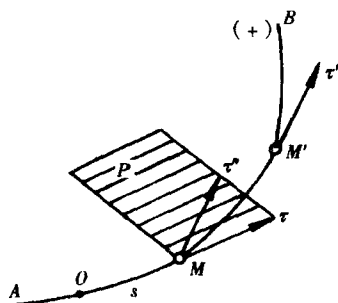


图 1-8

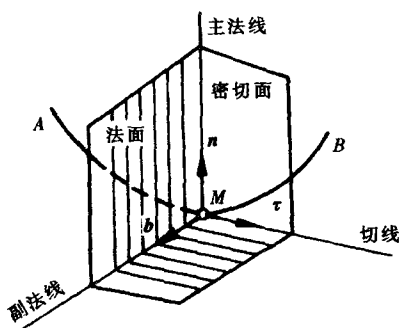


图 1-9

在图 1-9 中, τ 是曲线 AB 在 M 点的切向单位矢量, 过 M 点作垂直于 τ 的平面, 称为曲线在 M 点的**法面**。在法平面内, 过 M 点的一切直线都是该曲线在 M 点的**法线**。在这些法线中, 位于密切面内的法线称为曲线在 M 点的**主法线**; 与密切面垂直的法线称为**副法线**。用 n 表示主法向单位矢量, b 表示副法向单位矢量,

τ 、 n 、 b 三个矢量的轴线将构成互相垂直的自然轴系。它们的正向是这样确定的： τ 的正向指向弧坐标的正向； n 的正向是指向曲线内凹的一边，准确地说是指向曲线在 M 点的曲率中心； b 的正向则由右手规则决定，即

$$b = \tau \times n \quad (1-14)$$

在空间曲线的各点上都有一组对应的自然轴系，所以自然轴系 τ 、 n 、 b 的方向将随动点在曲线上的位置变化而变化。由此可知，自然轴系的单位矢量 τ 、 n 、 b ，不同于固定的直角坐标系的单位矢量 i 、 j 、 k 。前者是方向在不断变化的单位矢量，后者则是常矢量。

1.1.3.2 速度

为了得到点的速度在自然轴系中的表达式，把速度的矢量表达式(1-2)作如下变换：

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (A)$$

式中 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 的大小为

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

将 v 看作代数值，则有

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (B)$$

即速度的代数值等于弧坐标对时间的一阶导数。

当 v 为正时，表示弧坐标的代数值随时间增大，动点沿坐标的正向运动； v 为负时，则相反。

速度 v 可表示成

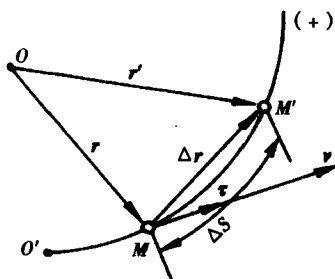


图 1-10

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} = v \boldsymbol{\tau} \quad (1-15)$$

1.1.3.3 加速度

式(1-15)代入式(1-3),即

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \quad (1-16)$$

这表明,动点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 由两个分量组成。

第一个分矢量是 $\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$,方向沿轨迹的切线,大小等于 $\frac{dv}{dt}$ 或 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 。

当 $\frac{d^2s}{dt^2} > 0$ 时,该矢量与 $\boldsymbol{\tau}$ 同向;当 $\frac{d^2s}{dt^2} < 0$ 时,则与 $\boldsymbol{\tau}$ 反向。因此,此分矢量称为切向加速度,用 $\boldsymbol{a}_\tau$ 表示,即

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} \quad (1-17)$$

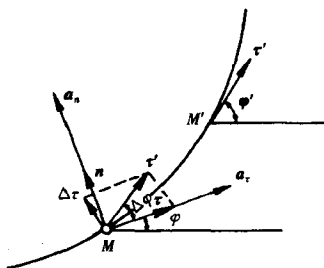


图 1-11

第二个分矢量是 $v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$ 。为了确定它的大小和方向,先求 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$ 。

在图 1-11 中,在 t 和 $t + \Delta t$ 瞬时,设动点分别位于轨迹上的 M 和 M' 点,对应位置的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}'$,矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\boldsymbol{\tau}'$ 的方位角(与水平线的夹角)为 φ 、 φ' 。 $\Delta \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}$ 是切向单位矢量的改变量, $\Delta \varphi = \varphi' - \varphi$ 是方位角的增量。 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向是随它的方位角 φ 和

动点弧坐标 s 变化而变化的。又因为, $v = \frac{ds}{dt}$, $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$, ρ 为曲线在 M 点的曲率半径,

$$\therefore \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \frac{d\tau}{d\varphi}$$

式中 $\frac{d\tau}{d\varphi}$ 的大小为

$$\left| \frac{d\tau}{d\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta\varphi} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \times 1 \times \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

其方向由 $\Delta\tau$ 的极限方向决定。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\Delta\tau$ 的方向趋近于轨迹在 M 点的主法线方向。于是

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \frac{v}{\rho} \mathbf{n} \\ v \frac{d\tau}{dt} &= \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \end{aligned}$$

这表明, 加速度 $\mathbf{a}$ 的第二个分矢量的大小为 $\frac{v^2}{\rho}$, 其方向恒沿主法线的正向, 即指向曲率中心, 称之为法向加速度, 用 $\mathbf{a}_n$ 表示, 即

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1-18)$$

将式(1-17)、式(1-18)代入式(1-16), 点的加速度在自然轴系的表达式为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1-19)$$

点的加速度在自然轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv}{dt} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

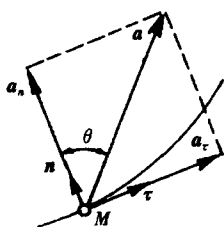


图 1-12

这表明,点的加速度沿副法线的分量恒等于零,加速度矢量在密切面内并等于切向加速度与法向加速度的矢量和。切向加速度反映速度代数值的变化的快慢程度;法向加速度则反映速度方向的变化快慢程度。如图1-12示,点的加速度的大小和方向由下式决定:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{|a_t|}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

综上所述,运用自然法能够方便地描述点在轨迹上的位置,同时由于自然轴系是与轨迹的几何特性联系在一起的参考系,这就导致点的速度、加速度在自然轴系中的各个分量有着明显的几何意义。当点的运动轨迹已知时,运用自然轴系来描述点的速度、加速度比较简便;当点的运动轨迹未知时,运用直角坐标来描述则比较方便。

例 1-1 在图 1-13 的曲柄连杆机构中,曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动,在连杆 AB 的带动下,滑块 B 沿直线导槽作往复直线运动。已知 $OA = r$, $AB = l$, 且 $l > r$ 。求滑块 B 的运动方程、速度及加速度。

解: 曲柄连杆机构在工程中有广泛的应用。这种机构能将转动转换成直线平移,如压气机、往复式水泵、锻压机等;或将直线平移转换为转动,如蒸汽机、内燃机等。

滑块 B 的运动是沿 OB 方向的往复直线运动,可用直角坐标法建立它的运动方程。取轴 O 为原点,建立坐标系 Oxy ,由 A 向 x 轴作垂线得交点 C ,则滑块 B 在任一瞬间的位置为

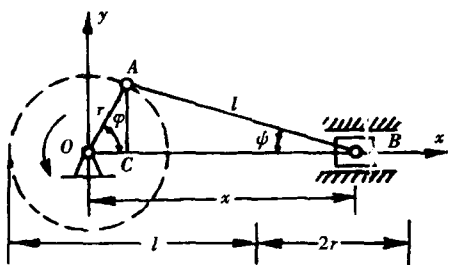


图 1-13

$$x = OC + CB = r \cos \varphi + l \cos \psi$$

其中 $\varphi = \omega t$ 。在 $\triangle OAB$ 中, 根据正弦定理

$$\frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \psi}$$

$$\therefore \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi$$

式中 $\lambda = r/l$, 于是

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

因此, 滑块 B 的运动方程为

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \quad (a)$$

将式(a)对时间求一阶导数, 得滑块 B 的速度

$$v = -r\omega (\sin \omega t + \lambda \sin 2\omega t (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{-0.5}) \quad (b)$$

同理, 可求得滑块 B 的加速度

$$a = -r\omega^2 (\cos \omega t + 2\lambda \cos 2\omega t (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{-0.5} + \lambda^3 \sin^2 2\omega t (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{-1.5}) \quad (c)$$

以上为滑块 B 的运动的精确解。

由已知条件 $l > r$, 因此, $\lambda \sin \omega t$ 恒小于 1, 于是, 根据二项式定理

$$\sqrt{1 - (\lambda \sin \varphi)^2} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \omega t - \dots$$