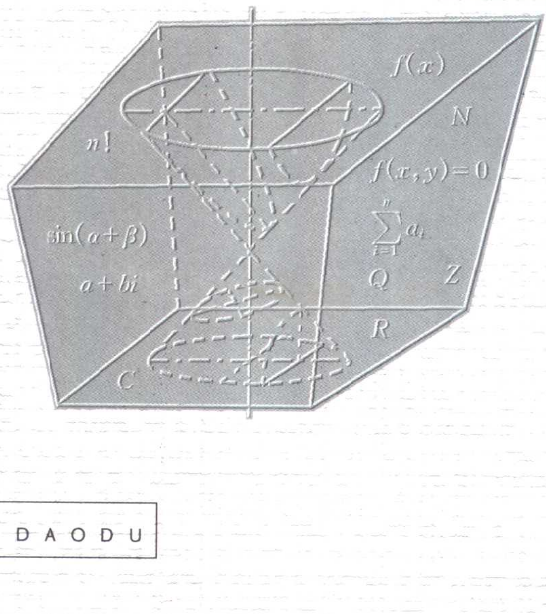
湖北科学技术出版社

高三数学导读

程　敢　程零幂　编著



GAOSAN SHUXUE DAODU

湖北科学技术出版社

高三数学导读

程 敢 程零幂 编著

GAOSAN SHUXUE DAODU

高三数学导读　　© 程　敢　程零幂　编著

责任编辑:刘　连　　封面设计:王　梅　程零幂

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话:86782508
地　　址:武汉市武昌黄鹂路 75 号　　邮编:430077

印　　刷:武汉市恒吉印刷厂　　邮编:430077

850mm × 1168mm　32 开　23.75 印张　586 千字
2001 年 2 月第 1 版　　2001 年 2 月第 1 次印刷

印数:0 001 – 5 000　　定价:28.80 元
ISBN7 – 5352 – 2539 – X/G·621

序

《高三数学导读》(以下简称《导读》)正式和读者们见面了,这是一件可喜可贺的事,因为华中师大一附中程敢老师多年的心愿终于实现了。我受托为本书作序,以此表示祝贺。

我曾亲阅过《导读》的书稿,认为这是一部构思很好的、适合高二升入高三的学生或准备应考的社会青年自学、复习用书。它打破了一般复习参考书的俗套,把学、练、测汇于一体,引发读者自控自学,精读巧练,网络概括高中数学各知识点,通过典型体例,融会数学内容和方法,立足提高素质,着眼培养能力,避免题海战术,主导以精取胜,触类旁通,这是程敢老师执教高中数学30余年一贯的风格。

华中师大一附中是湖北省惟一的一所窗口学校,是全国重点高中之一。在这所学校里,为国家培养了大批人才,也磨炼造就了一批知识经验丰富、教学方法优异、成效卓著的师资队伍,程敢老师就是其中的一员。

程敢老师曾是华中师大数学系20世纪60年代初的学子,在学生时代就是很优秀的,30多年的教学实践使他不仅具备了丰富的教学理论和经验,还有独具一格的教学方法和观点。他独笔撰写《导读》这本书就是他的教学风格的写照。本书由湖北科学技术出版社正式出版发行,这是对程敢老师教学经验和方法的充分肯定。

除了《导读》一书外,程敢老师还曾撰写过《为什么错》一书,已

由湖北教育出版社 1998 年在全国出版发行。还写了《数学逻辑》一书，已由华中师大一附中内部印发，供数学老师参阅学习。近几年来，他还在全国各杂志上发表过不少的数学论文，在数学领域里作出过很大的贡献。

我衷心希望《高三数学导读》一书能成为参加复习备考的高三毕业生们的良师益友。

（邓宗琦　原华中师范大学副校长）1999 年 12 月 10 日

编 者 的 话

进入高三了，数学怎么复习？这是每个升入高三学生急待考虑的问题，也是担任高三的每位数学老师和家长操心的事。他们集中思考的焦点，就是选一个合适的读本来指导复习备考。《高三数学导读》（以下简称《导读》）正是为进入高三的学生编写的一部很得体的指导书。《导读》集中回答了高三数学怎样通过高中数学各个知识点的再学习，来熟悉一系列的习题解法，提高数学的综合能力。本书最大的特点是：精炼概括知识要点，把数学概念和方法溶于解题之中，启迪思维，活跃思路，启发自学，开拓进取，精读巧练，扎实打基础，放手练能力，着眼数学素质提高。

《导读》是根据高中现行教材及大纲，参照教育部对现行高中数学内容删选意见编写而成的。全书共分：代数函数、三角函数、立体几何、平面解析几何、习题提示与解答五个部分，按 14 章 142 节讲述。每节需配备时间一个半小时，采取自学的方式完成，无须老师讲授。每节由知识要点及学法指导、例题分析解答、评述和习题等部分组成。每章配有单元测试题一套。读者只要按照《导读》的编排顺序坚持两看两做一测试，每天花上一个半小时，就可以在 200 天内完成高中全部数学内容的复习，在高考中就可以轻松自在地通过数学难关。所谓两看，就是一看每节的知识要点及学法指导；二看例题的分析解答和评述。所谓两做就是一做例题；二做习题。一测试就是指单元测试。习题和单元测试题均附有提示与解答，可供学者参考。每次测试时应自觉闭卷进行，解答完毕后，

再根据答案自行评分。做到了这一系列的看、做、测，效果自然显著。这种自控自学的方式，没有压力，没有精神负担，完全出自高度自觉，因而使考生始终保持良好的心理状态，才能临考不惧，超常发挥。

《导读》不同于其他任何一种数学资料，它把读和练紧密结合，把温习知识点和学法指导相结合，例题、习题配备精湛、解法典型技巧，有引发举一反三，触类旁通之功效，符合教育部提出的“减负”精神，克服学生复习时盲目陷入题海之中，重在诱导学生熟悉基本知识点，掌握解题方法和思路，从根本上提高数学素质入手，既扎实，又开拓。

《导读》是我从事高中数学 30 余年教学的经典总结，也是数十届成功指导高三复习备考的蓝本精萃。本书完稿后，曾得到华中师大原副校长著名数学教授邓宗琦先生的亲自审阅，并专门为本书作序。希望即将进人高三的同学们喜欢。

书中打有“※”号处，表示按教育部通知，不作考试要求或选学内容。

由于时间仓促，精力和水平有限，难免有疏漏谬误之处，敬请广大读者、数学同仁来涵指正或提出建议，我将不甚感激。

参加本书编写的还有朱汝珍、程零幂、程拥华、梅丽、朱奶雄、朱晚霞、程丽虹、宋晓东、程慧红等。

程　敢

2000 年 2 月于华师一附中

目　　录

第一部分 代　　数

本书第一部分代数包括初等函数、数列与数学归纳法、不等式、复数、排列组合与二项式定理五章内容.这是高中数学的重要部分,也是历来高考含比重最多的内容.掌握好代数知识,对于学习三角、解析几何、立体几何是不可缺少的运算工具和技能,又是为将来学习高等数学打下坚实的基础.

§1 幂函数、指数函数与对数函数

本章是以集合映射的观点引入一般函数的概念及性质,并具体剖析了幂函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数的一些性质及应用.

函数是微积分的基础,它集中体现了高中数学用运动变化的观点贯穿于数学知识,这是与初中数学内容根本不同的所在,也是唯物辩证法在中等数学中的体现.因此要学好高中数学,必须从树立变化发展的观点开始,从掌握函数的本质属性开始.

§1.1 集　　合

知识要点学法指导

1. 集合是只能描述不加定义的原始概念,它表示所研究对象

的全体,这些对象称集合元素.

2. 集合按元素个数分类有:无限集、有限集.单元素集与空集 $\varnothing$ 是有限集的特例;按元素的属性分类有数集和其他各种类型的集.数集通常有复数集 C、实数集 R、有理数集 Q、整数集 Z、自然数集 N.

3. 集合里的元素具有确定性、互异性、无序性.表示集合的方法有列举法和描述法.在描述法中,有汉语言描述与数学语言(式子)描述.各种表示法之间可以转化.

4. 元素与集合之间是属于或不属于的关系,用 $\in$ 或 $\overline{\in}$ 表示;集合与集合间的关系是包含或不包含的关系,用 $\subseteq$、$\subset$ 或 $\nsubseteq$、$\not\subset$ 表示.因此有子集和真子集的概念.

5. 在研究集合间的关系时,定义了全集、交集、并集、补集的概念.

全集一般用 I 表示,是在研究集合关系时预先给定的,其他的集合均视为 I 的子集.

两集合 A 与 B 的交集用 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 定义,满足性质:

(1) $A\cap\varnothing=\varnothing$;(2) $A\cap A=A$;(3) $A\cap B=B\cap A$;(4) 若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

两集合 A 与 B 的并集用 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 定义,满足性质:

(2) $A\cup\varnothing=A$;(2) $A\cup A=A$;(3) $A\cup B=B\cup A$;(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;(5) 若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$.

集合 A 的补集用 $A\subseteq I$,$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\overline{\in}A\}$ 定义,满足性质:

(1) $A\cup\overline{A}=I$;(2) $A\cap\overline{A}=\varnothing$;(3) $\overline{\overline{A}}=A$.

6. 交、并、补也可理解为集合间的运算关系.在求交、并、补时常借助于韦思图或数轴表示较为直观.进行交、并、补的运算是本

节学习的重点.

例题讲解

例1 已知全集 $I=\{2,4,a^2-a+1\}$, $A=\{a+1,2\}$, $\bar{A}=\{7\}$,求实数 a.

解 $\because$ $\bar{A}\subset I, A\cap\bar{A}=\varnothing$.

$\therefore$ 只有 $a^2-a+1=7$,即 $a^2-a-6=0$.

$\therefore$ $a=3$ 或 $a=-2$.

又 $A\subseteq I, A\cap\bar{A}=\varnothing$,

$\therefore$ 只能 $a+1=4$,即 $a=3$.

综合以上两方面得 $a=3$.

例2 A 是方程 $x^2-px+15=0$ 解集的子集,B 是方程 $x^2-5x+q=0$ 的解集的子集,且 $A\cup B=\{2,3,5\}$, $A\cap B=\{3\}$,求 p,q 的值及集合 A、B.

解 (1) 依题 $A\subseteq\{x\mid x^2-px+15=0\}$, $B\subseteq\{x\mid x^2-5x+q=0\}$, $A\cap B=\{3\}$.

$\therefore$ $3\in\{x\mid x^2-px+15=0\}$, $3\in\{x\mid x^2-5x+q=0\}$,

即 $3^2-p\cdot3+15=0, 3^2-5\cdot3+q=0$.

解得 $p=8, q=6$.

$\therefore$ $A\subseteq\{x\mid x^2-8x+15=0\}=\{3,5\}$.

$B\subseteq\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{3,2\}$.

$\because$ $A\cup B=\{2,3,5\}$, $A\cap B=\{3\}$,

$\therefore$ $A=\{3,5\}$, $B=\{3,2\}$.

解 (2) 依题 $A\subseteq\{x\mid x^2-px+15=0\}$, $B\subseteq\{x\mid x^2-5x+q=0\}$, $A\cap B=\{3\}$, $\therefore$ $3\in\{x\mid x^2-px+15=0\}$, $3\in\{x\mid x^2-5x+q=0\}$.

即 3 是方程 $x^2-px+15=0$ 的一个根,3 是方程 x^2-5x+

$q=0$ 的一个根.

由韦达定理,设 x_0 是方程 $x^2-px+15=0$ 的另一根,则

$$\left.\begin{array}{l}3+x_0=p\\3\cdot x_0=15\Longrightarrow x_0=5\end{array}\right\}\Longrightarrow p=8.$$

设 x_1 为方程 $x^2-5x+q=0$ 的另一根,则

$$\left.\begin{array}{l}3+x_1=5\Longrightarrow x_1=2\\3\cdot x_1=q\end{array}\right\}\Longrightarrow q=6.$$

[评述] 从以上两题可知,集合元素的确定性在解集合问题中是很重要的;还要清楚属于关系与包含关系.

例 3 已知集合 $A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2-2x+2m<0\}$,若 $A\cap B=B$,求实数 m 的取值范围.

解 (1) $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,

由 $A\cap B=B$ 得 $B\subseteq A$

即 $\{x\mid x^2-2x+2m<0\}\subseteq\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(ⅰ) 当 $B=\varnothing$,$B\subseteq A$,要使 $\{x\mid x^2-2x+2m<0\}=\varphi$,只须 $x^2-2x+2m\geqslant 0$ 对 x 的一切实数值恒成立.

即 $\Delta=4-8m\leqslant 0$,解得 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$.

(ⅱ) 当 $B\neq\varnothing$,即 $x^2-2x+2m<0$ 恒有实数解.

$\because$ $B=\left\{x\mid 1-\sqrt{1-2m}<x<1+\sqrt{1-2m}\quad m<\dfrac{1}{2}\right\}$.

$\therefore$ 要使 $B\subseteq A$,必须满足:

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}1-\sqrt{1-2m}\geqslant -2\Longrightarrow\sqrt{1-2m}\leqslant 3\\1+\sqrt{1-2m}\leqslant 5\Longrightarrow\sqrt{1-2m}\leqslant 4\end{array}\right\}\Longrightarrow\sqrt{1-2m}\leqslant 3\\m<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore$ $-4\leqslant m<\dfrac{1}{2}$.

综合(ⅰ),(ⅱ)得实数 m 的取值范围为$[-4,+\infty)$.

解 (2) $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,由 $A\cap B=B$ 得$B\subseteq A$,即$\{x\mid x^2-2x+2m<0\}\subseteq\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(ⅰ) 当 $B=\varnothing\subset A$,则 $\overline{B}=\{x\mid x^2-2x+2m\geqslant 0\}=R$.

$\therefore\quad \Delta=4-8m\leqslant 0$,即 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$.

(ⅱ) 当 $B\neq\varnothing$,要使

$$\{x\mid x^2-2x+2m<0\}\subseteq\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}.$$

设 $f(x)=x^2-2x+2m$,即使 $f(x)<0$ 在$[-2,5]$内有解,只须满足

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}f(-2)\geqslant 0\Longrightarrow(-2)^2-2(-2)+2m\geqslant 0\Longrightarrow m\geqslant -4\\ f(5)\geqslant 0\Longrightarrow 5^2-2\cdot 5+2m\geqslant 0\Longrightarrow m\geqslant -\dfrac{15}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow m\geqslant -4\\ \Delta=4-8m>0\Longrightarrow m<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore\quad -4\leqslant m<\dfrac{1}{2}$.

综合(ⅰ),(ⅱ)得实数 m 的值的取值范围为$[-4,+\infty)$.

[评述] 本题重在理解:(1) 由 $A\cap B=B$ 得$B\subseteq A$;(2) 分 $B=\varnothing$ 和$B\neq\varnothing$ 两种情况;(3) 善于比较两种解法的优劣.解法(2)是用一元二次方程根的分布的充要条件得出.

例 4 设集合$P=\{p\mid p=x^2-7x+12,x\in\mathbf{Z}\}$,

$$Q=\{q\mid q=y^2+3y+2,y\in\mathbf{Z}\}.$$

(1) 求证:$P=Q$;

(2) 若 P 表示点(x,p)的集合,Q 表示点(y,q)的集合,求$P\cap Q$;

(3) $p=q=0$ 时,$P=\{(x,0)\mid x^2-7x+12=0\}$,$Q=\{(y,0)\mid y^2+3y+2=0\}$,求 $P\cup Q$.

解 (1) $\because\ P=\left\{p\mid p=\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4},x\in\mathbf{Z}\right\}=\{p\mid p\geqslant0\}$，

$Q=\left\{q\mid q=\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4},y\in\mathbf{Z}\right\}=\{q\mid q\geqslant0\}$，

$\therefore\quad P=Q$.

(2) 设 $P\cap Q=\{(t,s)\}$，即解方程组

$$\begin{cases}t^2-7t+12=s\\t^2+3t+2=s.\end{cases}\qquad \text{得解}(1,6).$$

$\therefore\quad P\cap Q=\{(1,6)\}$.

(3) $P=\{(x,0)\mid x^2-7x+12=0\}=\{(3,0),(4,0)\}$，

$Q=\{(y,0)\mid y^2+3y+2=0\}=\{(-1,0),(-2,0)\}$，

$\therefore\quad P\cup Q=\{(-1,0),(-2,0),(3,0),(4,0)\}$.

[评述] (1) 弄清 P,Q 都是表示函数值域；

(2) 弄清 $P\cap Q$ 表示两抛物线点群的公共点；

(3) $P\cup Q$ 表示两抛物线点群在横轴上的点的集合的并集，弄清 $P=\{(x,p)\}$，$Q=\{(y,q)\}$表示两抛物线点群，而 $P=\{(x,0)\}$，$Q=\{(y,0)\}$均表示抛物线点群在横轴上的点.

习题 1.1

一、选择与填空

1. 已知集合 $A=\{y\mid y=-1+x-2x^2,x\in\mathbf{R}\}$，若 $y\in A$ 则有(　　).

(A) $y\in\mathbf{Q}$　(B) $y\in\mathbf{Q}^-$　(C) $y\in\mathbf{R}^+$　(D) $y\in\mathbf{R}^-$

2. 设全集 $I=\{x\mid1\leqslant x<9\}$，则满足$\{1,3,5,7,8\}\cap\overline{B}=\{1,3,5,7\}$的所有集合 B 的个数是(　　).

(A) 1 个　(B) 4 个　(C) 5 个　(D) 8 个

3. 集合 $A=\{x\mid(a-1)x^2+3x-2=0\}$中只有一个元素，则实数 $a=$ ______.

二、解答题

4. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，求实数 a 和b.

5. 已知 $I=\{(x,y)\mid x、y\in\mathbf{R}\}$, $A=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$. $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$,求 $A\cap B,\bar{A}\cup B$.

6. 已知集合 $A=\{x\mid x\geqslant|x^2-2x|\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{1-x}\geqslant\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\right\}$, $C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$,若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,且 $A\cup B\cup C=R$,求实数 a 和 b 的值.

§1.2 映射与函数

知识要点学法指导

1. 映射是一种特殊的对应,函数是一种特殊的映射,从非空数集 A 到非空数集 B 上的映射叫做函数.这是近代函数的定义,试与传统的函数定义(初中课本函数定义)作比较.

2. 认识函数符号 $f(x)$ 的意义,弄清构成函数的三要素:对应法则 f、定义域、值域.两个函数相同与不同全表现在三要素上.

例题讲解

例 1 已知在映射 $f_{A\to B}$ 下,集合 A 中的元素 (x,y) 对应着集合 B 中元素 $(x-y,x+y)$,(ⅰ)若 (x,y) 的象是 $(-1,4)$,试求原象;(ⅱ)若此映射中原象为 $(3,-4)$,求它的象.

解 $f_{A\to B}$ 表示从 A 到 B 的映射,A 中的元素 (x,y) 称原象,(x,y) 在 B 中对应元素 $(x-y,x+y)$ 叫 (x,y) 的象,由此,

(1) $\begin{cases}x-y=-1\\x+y=4\end{cases}\Longrightarrow x=\dfrac{3}{2},y=\dfrac{5}{2}$,所求原象为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

(2) $\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\Longrightarrow\begin{matrix}x-y=7\\x+y=-1\end{matrix}$,所求象为 $(7,-1)$.

[评述] 关键在于清楚象与原象的概念及对应转化关系.

例 2 若函数 $f(x)=3x-1$; $g(x)=1-2x^2$.

求 (1) $f[g(x)]$; (2) $g[f(x)]$;

(3) $f[g(f(x))]$; (4) $g\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$.

解 (1) $f(g(x)]=3g(x)-1=3(1-2x^2)-1=-6x^2+2$;

(2) $g(f(x)]=1-2f^2(x)=1-2(3x-1)^2$

$$=-18x^2+12x-1;$$

(3) $f[g(f(x)]=3g[f(x)]-1=3[1-2f^2(x)]-1$

$$=3(1-2(3x-1)^2)-1=-6(3x-1)^2+2$$

$$=-54x^2+36x-4;$$

(4) $g\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]=1-2\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)^2=1-2\left(\dfrac{1-2x^2}{3x-1}\right)^2$

$$=1-2\cdot\frac{4x^4-4x^2+1}{9x^2-6x+1}$$

$$=-\frac{8x^4-17x^2+6x+1}{9x^2-6x+1}.$$

[评述] 关键在于弄清函数符号的意思,即自变量用什么去代换.

例 3 已知 $f(x+1)=x^2-2x-15$,求 $f(x-1)$.

解 (1) (换元法)令 $x+1=t$,则 $x=t-1$.

$\therefore$ $f(t)=(t-1)^2-2(t-1)-15=t^2-4t-12$,

$\therefore$ $f(x)=x^2-4x-12$.

将 x 用 $x-1$ 去代换得

$$f(x-1)=(x-1)^2-4(x-1)-12=x^2-6x-7.$$

解 (2) (凑配法)

$$f(x+1)=x^2-2x-15=(x+1)^2-4(x+1)-12,$$

$\therefore$ $f(x)=x^2-4x-12$.