微分方程式

編著者

李恒田　張任業

東華書局印行

中華民國六十二年十一月初版
中華民國 六十八年 二月 五 版

大學用書　微分方程式（全一冊）

定價　新臺幣九十元整
（外埠酌加運費滙費）

編著者　李恒田　張任業
發行人　卓　鑫　淼
出版者　臺灣東華書局股份有限公司
（台北市博愛路一〇五號）
印刷者　合　興　印　刷　廠
（台北市和平西路三段 207 號）

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號
（62062）

微分方程式

目錄

第一章　概　論

第二章　一階微分方程式

第三章　高階線性微分方程式

第四章　級 數 解

第五章　微分方程組

第六章　拉氏變換

第七章　偏微分方程式

第一章

概　　論

1-1　何謂微分方程式

在幾何學，物理學，化學，工程學，甚至於若干社會科學上，有許多問題，其數理表示，往往爲一含有一未知函數及其導數（常導數或偏導數）之方程式：含常導數者，稱之爲**常微分方程式**，含偏導數者，稱之爲**偏微分方程式**，統稱之爲**微分方程式**：但本書以討論常微分方程式爲主，至於偏微分方程式僅在最後一章略加討論之.

吾人今正式定義常微分方程式．設F爲x，y，y'，……，$y^{(n)}$等$n+2$個變數之函數．於是方程式

$$F(x, y, y', y'', \cdots\cdots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

稱爲未知函數y之n階**常微分方程式**（以後簡稱爲n階微分方程式），其中

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \cdots\cdots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

所謂微分方程式之階，是指方程式中最高階導數之階（order）.例如，微分方程式

$$y' = 3x^2 + 4$$

爲一一階微分方程式，因其中最高階導數y'爲一階；而微分方程式

$$x^2y'' - 3x(y')^2 + 4y = \sin x$$

為一二階微分方程式，因其中最高階導數 y'' 為二階.

1-2 微分方程式之產生

微分方程式理論之發展與整個數學之發展是密切而不可分的，但其導源仍應自十七世紀牛頓與萊勃納茲之發明微積分開始. 一般而言，微分方程式之產生有兩種方式:

(i) **消去方程式中之任意常數產生微分方程式.**

例 1. 試消去方程式

$$y = x^2 + c$$

中之任意常數 c.

【解】 將原式對 x 微分，得

$$y' - 2x = 0,$$

此即為一一階微分方程式.

例 2. 試消去方程式

$$y = c_1 x^2 + c_2$$

之任意常數 c_1 及 c_2.

【解】 將原式對 x 微分，得

$$y' = 2c_1 x. \tag{1-2}$$

再對 x 微分，得

$$y'' = 2c_1 \tag{1-3}$$

或

$$c_1 = \frac{y''}{2}$$

以此結果代入（1-2），得

$$y''x - y' = 0.$$

此爲一二階微分方程式.

例 3.　試消去方程式

$$y = ae^{-x} + be^{x}$$

中之任意常數 a 及 b.

【解】　將原式對 x 微分二次，得

$$y'' = ae^{-x} + be^{x}. \tag{1-4}$$

將（1-4）與原式比較之，得

$$y'' - y = 0.$$

此爲一二階微分方程式.

(ii)　解析式產生微分方程式

今舉數例說明之.

例 4.　設過曲線 c 上任意點 $P(x, y)$ 之切線垂直於該點之動徑，試以解析式表示之.

【解】　此曲線上任意點切線之斜率爲

$$m_1 = \tan\tau = \frac{dy}{dx}.$$

而同點動徑之斜率爲

$$m_2 = \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

因二直線相互垂直，其斜率互爲負倒數. 故有

$$m_1 = -\frac{1}{m_2},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

或

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0.$$

此一階微分方程式爲表示曲線 c 之性質之解析式. 稍後吾人習得此微分方程式之解法後，可得其解爲

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

乃一以原點爲中心，半徑爲 r 之圓（見圖 1-1）.

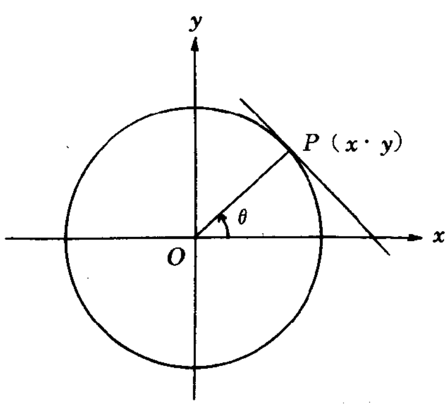

圖 1-1

例 5. 設一質量爲 m 之物體，受外力 F 作用沿一直線運動；其在 t 時刻之位置爲 x. 試按牛頓第二運動定律寫出此物體運動之方程式.

【解】　由題意知此物體質量中心之加速度爲$\frac{d^2x}{dt^2}$，故按牛頓第二運動定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F. \tag{1-5}$$

此爲未知函數x之二階微分方程式.

例 6.　設在某項化學反應中，一物質變質之速率與其在該時刻所存留之量成比例. 試以一方程式表示此定律.

【解】　以x表在t時刻此物質已變質之量，以q表其原有之量，則此定律可寫成

$$\frac{dx}{dt}=k(q-x),$$

其中k爲常數. 此微分方程式爲一一階微分方程式.

例 7.　根據克希荷夫（Kirchhoff）定律，在任一閉電路中，各電動勢之代數和，等於該電路中各段電位降之代數和. 試以Q爲未知函數寫出一方程式表此定律.

【解】　按電學之基本定律，吾人知

電阻之電位降$=IR$,

電容之電位降$=\frac{1}{C}Q$,

電感之電位降$=L\frac{dI}{dt}$.

故有

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E(t). \tag{1-6}$$

但 $I=\dfrac{dQ}{dt}$，將其代入（1-6），得

$$LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=E(t). \tag{1-7}$$

此爲一以 Q 爲未知函數之二階微分方程式.

1-3 微分方程式之解

一 n 階微分方程式之解，係指在某區間內最少有 n 階導數存在，且滿足此方程式之一函數. 欲知一函數是否爲某微分方程式之解，可將此函數之代表式代入此微分方程式，若能滿足時，即爲此微分方程式之解；否則不爲其解. 例如，

$$y=e^{2x}-3,\quad x\in R,$$

爲微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-2y=6$$

之一解，因

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}-3)-2(e^{2x}-3)=2e^{2x}-2e^{2x}+6=6$$

滿足此微分方程式.

微分方程式之解可分爲三種:

(i) 通解（general solution）: 當解中所含任意常數之個數等於此微分方程式之階數時，稱之爲通解.

例如,

$$y = A\cos x + B\sin x \tag{1-8}$$

爲

$$y'' + y = 0 \tag{1-9}$$

之通解，因（1-8）中有兩任意常數A及B，而（1-9）爲一二階微分方程式．換言之，方程式（1-9）之通解所成之集合爲

$$\{ y \mid y = A\cos x + B\sin x，A\text{及}B\text{爲任意常數}\}.$$

(ii) **特解**（particular solution）:　當指定通解中之任意常數之一部分或全部爲已知數時，即爲此方程式之特解．例如，若令（1-8）式中$A=1$，$B=0$，則得

$$y = \cos x$$

爲（1-9）式之特解．

(iii) **異解**（singular solution）:　非由指定通解中任意常數所得之解．例如，

$$y = \sin(x + c) \tag{1-10}$$

爲微分方程式

$$(y')^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1-11}$$

之通解，而

$$y^2 = 1 \tag{1-12}$$

亦爲（1-11）之解，但此解並非由指定（1-10）中之任意常數c所得．

微分方程式之解雖有通解，特解，及異解之分，但解一微分方程式時，主要爲求其通解．

在許多有關微分方程式之應用中，吾人不獨要求此方程式之解必

須滿足此微分方程式，而且還要滿足其他附帶條件．例如，試求微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=3x^2 \tag{1-13}$$

中滿足條件

$$y(2)=1 \tag{1-14}$$

之解．附帶條件（1-14）在幾何意義上，乃要求此解之圖形（稱之爲解曲線），必須通過 xy 平面上之（2，1）點．微分方程式（1-13）之通解顯然爲

$$y=x^3+c. \tag{1-15}$$

欲求一滿足條件（1-14）之解，吾人可以（2,1）點代入（1-15），得

$$1=8+c,$$

或

$$c=-7.$$

於是

$$y=x^3-7$$

卽爲滿足條件（1-14）之解；亦卽方程式（1-13）之特解．上述條件（1-14）稱爲**初値條件**（initial condition），而方程式（1-13）及其初値條件，稱之爲**初値問題**．此類問題之發生，係由於在許多應用問題中，以獨立變數 x 表時間，而初値條件之 x_0 係表某過程開始之瞬間之故．

習　題　1.1

試指出下列各方程式之階：

1. $x^2y'' + xy' + 2y = \sin x$.
2. $y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 1$.
3. $(1+y^2)y'' + xy' + y = e^x$.
4. $y' + xy^2 = 0$.
5. $y'' + \sin(x+y) = \sin x$.

試驗證下列各方程式之解：

6. $y'' - y = 0$； $y = e^x$.
7. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{2}{x} = 0$； $y = c_1 + 2x + c_2x^2$.
8. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = x$； $y = e^{-x} + \dfrac{x}{3}$.
9. $y'' + 4y = 0$； $y = c_1\cos(2x + c_2)$.
10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5\cos 2t$； $x = \cos 2t + 2\cos 3t + 3\sin 3t$.

消去下列各式中之任意常數：

11. $y^2 = e^x + c$.
12. $xy - c = 0$.
13. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$.
14. $y = \sin cx$.
15. $y = A\cos 3x + B\sin 3x$.

16. 某曲線之法線長爲常數，試以一微分方程式表之.

17. 一質點受重力作用鉛直下落，試以其速度 v 爲未知函數寫出此質點運動之方程式.

18. 設圓族之方程式爲

$$x^2 + y^2 = r^2$$

試以一微分方程式表之.

19. 一物體自由下落，若空氣阻力與其速度平方成正比，試以一微分方程式表示其加速度

20. 一物質在任一時刻變質之速率與在該時刻尚未變質量之平方成比例. 試以一微分方程式表示之.

第 二 章

一階微分方程式

2-1 引 言

凡能寫成形如

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2-1}$$

之微分方程式，均稱之爲**一階微分方程式**（見 1-1）．本章之主要目的，即爲討論此類方程式之各種解法，其次爲研究其理論及應用問題．

任一一階微分方程式，均可利用微分之觀念寫成

$$M dx + N dy = 0 \tag{2-2}$$

之形式，以便於求解，其中M與N爲x及y之任意函數或常數．例如方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

可寫爲

$$(y-x)dx + (x+y)dy = 0,$$

其中$M = (y-x)$及$N = (x+y)$.

2-2 可分離微分方程式

若一一階微分方程式可寫成

$$M(y)\frac{dy}{dx}=N(x) \tag{2-3}$$

之形式，則稱之爲**可分離微分方程式**(Separable equations). 此類方程式僅須直接利用一般之積分技巧，即可求得其解.例如微分方程式

$$y\frac{dy}{dx}=x,$$

$$y^{-1}\frac{dy}{dx}=2x,$$

$$(y^2+e^y)\frac{dy}{dx}=x^2+\sin x.$$

均爲可分離微分方程式.

若一函數 $y=F(x)$ 在某區間 I 內爲方程式(2-3)之一解，則當 $x\in I$，恆有

$$M(F(x))F'(x)=N(x),$$

積分之，得

$$\int M(F(x))F'(x)dx=\int N(x)dx+c,$$

或

$$\int M(y)dy=\int N(x)dx+c.$$

若 P 及 Q 爲兩函數，且 $P'(y)=M(y)$ 及 $Q'(x)=N(x)$，則 $F(x)$ 必滿足方程式

$$P(y)=Q(x)+c, \tag{2-4}$$

其中 c 爲一常數，即

$$P(F(x))=Q(x)+c,\quad x\in I.$$