函授大学教材

机械优化设计

华北水利水电学院　　严大考　主编

函授大学教材

机械优化设计

华北水利水电学院　严大考 主编

水利电力出版社

函授大学教材
机械优化设计
华北水利水电学院 严大考 主编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
北京市京东印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 14.25印张 319千字
1990年4月第一版 1990年4月北京第一次印刷
印数0001—1850册
ISBN 7-120-01029-8/TH·13
定价5.95元

内 容 提 要

本书为高等函授机械类专业的教材。书中主要阐述了机械优化设计的基本概念和较为常用的优化方法，并着重介绍了黄金分割法、二次插值法、梯度法、牛顿法、DFP变尺度法、鲍威尔法、随机方向搜索法、复合形法、惩罚函数法及几种混合离散变量的优化设计方法。为了便于读者学习和应用，书中第一章介绍了必要的数学知识，第七章介绍了典型零部件及机构的优化设计实例，第八章编辑了9种常用优化设计方法的FORTRAN语言源程序及其使用说明。

本书除可作为高等函授机械类专业的教材之外，也可供从事机械设计工作的工程技术人员学习与参考。

前　言

本书是根据原水利电力部委托北京水利电力函授学院和华北水利水电学院函授部于1987年12月审定的《机械优化设计》的函授教学大纲编写的。全书包括三个方面的内容：优化方法的数学基础；常用的无约束优化、约束优化及混合离散变量的优化设计方法；机械优化设计实例及常用的算法程序，本书着重基本概念的介绍和常用算法的分析，同时通过设计实例较详细地介绍了机械优化设计的步骤及其应注意的问题。

作为函授教材，在编写本书时特别注意了简明性、理论与应用兼顾及工程实用的原则。全书内容在组织安排上，力求循序渐进，由浅入深。在优化方法的论述方面对其优化理论做了适当深度的讨论，并着重于概念的阐述和方法的运用。为了便于读者自学和对学习效果的自我检查评估，每章前后均附有学习指导、复习思考题、习题等辅助内容。

本书由华北水利水电学院严大考同志主编。北京水利电力函授学院刘美荣同志编写第一、二、三、四章；华北水利水电学院唐振科同志编写第八章；严大考同志编写绪论、第五、六、七章。全书由华北水利水电学院北京研究生部刘士贤副教授主审。

在本书编写过程中，曾得到北京水利电力函授学院周克法副教授的热情支持和帮助；书中还引用了一些单位的科研成果，对此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限及时间仓促，书中难免存在不少缺点和错误，深望读者给予批评指正。

编　者

1989年5月

目　　录

绪　论

机械设计的最终目的是在满足生产的工艺性、使用的可靠性和安全性、且费用最省和误差最小的条件下使所设计的产品具有良好的性能。但是长期以来，设计人员只是凭借经验的、感性的、类比的设计方法来选择产品的设计参数，然后进行必要的校核计算，对参数进行调整，修改设计，如此多次反复，直至最后满足设计要求为止。由于这种方法所提供的方案非常有限，再加上分析和计算工具的限制，要想取得最优方案几乎是不可能的。另外，随着科学技术水平和生产能力的不断提高，一些机械产品日趋复杂化、大型化和精密化，许多设计问题没有成熟的先例可供参考，这时采用传统的设计方法更是无能为力。再一方面，随着新材料、新工艺、新技术的不断出现，机械产品的更新换代周期也日益缩短，这就要求加快设计过程、缩短设计周期。因此，如何提高设计工作的质量，发展设计理论，改进设计技术和方法就成为当前机械工程学科中重点研究的内容之一。近20年来，随着电子计算机技术的发展，在设计理论和方法方面出现了不少新的领域，如：优化设计、可靠性设计、有限元法、设计方法学、自动设计和计算机辅助设计等，这些方法已引起人们广泛的重视。

机械优化设计是60年代发展起来的一门新技术，它是利用数学规划的方法，借助电子计算机的高速度运算及逻辑判断的巨大能力，从满足设计要求的全部可行方案中，按照预先给定的目标自动寻找最优设计方案的一种设计方法。它能综合处理并最大限度地满足从不同角度提出的甚至有时是互相矛盾的技术指标。因此，优化设计是现代机械设计理论和方法中的一个重要方面，并愈来愈受到从事机械设计的工程技术人员的重视。

机械优化设计与一般的传统设计方法不同，其设计过程大致可分为以下四个阶段：

（1）首先应对设计对象进行广泛的调查和全面的分析，提出设计目标，它可以是单项设计指标，也可以是多项设计指标的组合。从技术经济的观点出发，机器的运动学性能和动力学性能、体积、重量、效率、成本、可靠性等都可以作为设计所追求的目标。然后分析设计应满足的要求，如某些设计参数的取值范围，根据设计规范推导出的性能要求，工艺条件，对某些设计参数的限制等。

（2）将以上工程设计问题用数学方程式的形式予以全面地、准确地描述。进行这项工作，必须严格地按照各种规范建立相应的数学描述，把应考虑的各种因素全部包括进去。

（3）根据所建立的数学方程式的性质、设计精度的要求等选用合适的优化设计方法，并做出相应的程序设计。

（4）将所编制的计算机程序上机运算，自动得出最优值，然后对计算结果做出分析和正确的判断，最后得出最优设计方案。

早期的机械优化设计大多集中在机构学问题上，特别是机构运动学参数的优化选择方

面。以后才逐渐发展到机构动力学优化设计和机械零部件及机械产品的优化设计。我国对机械优化设计的研究和应用开始于70年代中期，目前已经取得了不少成就，并正在继续发展。

实践证明，采用优化设计方法可以有效地提高设计质量，缩短设计周期，取得较好的技术经济效果。例如，对某一大型一级齿轮减速器进行优化设计，结果使其重量比原设计方案减轻20%；又有一行星减速器经优化设计使其体积比原设计方案缩小13%；对20台桥式起重机箱形主梁进行优化设计，结果使其重量比原设计平均减轻14%，最大减轻35%。另外，对各种机构进行优化设计可以改善机构的运动学性能，同时提高运动精度。一般说来，设计问题愈复杂，优化设计取得的技术经济效果就愈显著。尽管机械优化设计方法还正在迅速发展中，但从目前已完成的一些设计实例来看，这种方法的推广和应用，将对机械工业在进一步提高产品质量、降低成本、缩短生产周期等方面产生一定的影响。

如上所述，机械优化设计已取得了不少的进展和成就，但它毕竟还是一门出现不久的新学科，在某些方面还不够成熟，正处在发展阶段。因此，还有许多问题需要广大的科学研究工作者和工程设计工作者共同努力去解决，当前主要问题有以下几方面：

（1）结合机械产品设计的特点，深入研究建立数学模型的理论及各种适用于工程设计的优化方法。

（2）确定和统一机械优化设计的最优化方法和通用算法及程序。

（3）积极开展机械产品整机优化和系列产品的优化设计研究，并把优化设计与计算机辅助设计等学科紧密结合起来，进一步扩大优化设计的应用范围。随着机械优化设计研究工作的不断深入，这种先进的设计方法将在机械工程设计中愈来愈广泛地得到应用，并为我国机械工业的发展做出应有的贡献。

第一章　优化方法的数学基础

学　习　指　导

最优化方法是以线性代数、多元函数的极值理论等数学知识为基础的。为了便于读者学习，本章对与优化方法密切相关的数学知识作一简单介绍，学习本章，重点应掌握以下内容。

1.矩阵的概念及运算法则，逆矩阵存在的条件，函数的矩阵表示方法及矩阵正定的概念。

2.向量的运算，向量的正交，向量的线性相关和线性独立的概念。

3.深刻理解方向导数和函数梯度的概念，掌握函数梯度的性质、海森矩阵及其正定的计算方法，了解泰勒展开及函数凸性的意义。

第一节　矩　　阵

矩阵是线性代数中的一个重要内容，是研究优化方法的一个有力工具，这一节，我们对矩阵的一些知识扼要地作一回顾和归纳。

一、矩阵及其主要形式

矩阵的概念可由下述线性问题引出。

设有线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{array}\right\} \tag{1-1}$$

如果把方程组左端未知量的系数按其所在位置排成m行n列的一个表，并记作A，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

这就构成了一个$m\times n$阶矩阵。可见，由一组数（或符号）按一定次序排列成具有m行n列的形如式（1-2）的表，就称为$m\times n$阶矩阵。在此矩阵中，横排称为行，纵排称为列，a_{ij}表示第i行第j列的元素。

若两矩阵A、B的阶数相同，并且对应元素都相等，则这两个矩阵称为相等矩阵，记作$A=B$。

矩阵的主要形式有

1）列矩阵——仅有一列元素的矩阵（$n=1$），例如

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

是一个列矩阵。

2）行矩阵——仅有一行元素的矩阵（$m=1$），例如

$$A=[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

是一个行矩阵。

3）方阵——行数m与列数n相等的矩阵，例如称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

为3×3阶方阵。其中的元素a_{11}，a_{22}，a_{33}称为方阵的主对角元。

这里要特别指出的是：从形式上看方阵与行列式很相近，但概念截然不同。方阵仅是一个正方形的“表”，而行列式通过计算可得到一个值。

若由方阵A中的诸元素，按原次序构成相对应的一个行列式，则此行列式称为矩阵A的行列式，记作$|A|$。形如

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的值，一般可按某行或某列展开进行计算。例如，行列式$|A|$若按第i行展开，则有

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

式中a_{ij}为第i行的诸元素，A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式。所谓a_{ij}的代数余子式是指划去a_{ij}所在的行与列后余下元素构成的行列式与$(-1)^{i+j}$的乘积。

【例 1-1】 计算行列式$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$的值。

解：若按第二行展开有

$$|A|=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2$$

对于n阶方阵A，若它的行列式的值$|A|=0$，则称A为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

4）对称方阵——即元素$a_{ij}=a_{ji}$的方阵。例如

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

5 ）单位矩阵——主对角元均为 1，其余元素均为零的方阵，记作I，例如

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

为 3 阶单位矩阵。显然，单位矩阵的 $|A|=1$。

注意：单位矩阵在矩阵乘法运算中相当于普通代数乘法中的 1，即任何矩阵与之相乘仍得原矩阵。

6 ）对角矩阵——除主对角元素外其余元素都是零的矩阵。例如

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

7 ）三角矩阵——在其主对角线以上或以下的所有元素均为零的方阵。例如

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

为3×3阶下三角矩阵。

8 ）零矩阵——所有元素都为零的矩阵。例如。

$$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

为3×3阶零矩阵，有时也记作Θ。

注意：零矩阵在矩阵运算中的作用，类似于一般代数运算中的 0。

二、矩阵的运算

1.矩阵的加减

两个同阶矩阵的加减，就是对应元素的加减。

$$C=A\pm B \qquad 即 \qquad c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{1-3}$$

例如

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 8 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

2.矩阵与数的乘法

当矩阵与数相乘时，就是矩阵中所有元素乘以该数。

$$C=kA \qquad 即 \qquad c_{ij}=ka_{ij} \tag{1-4}$$

例如

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

3.矩阵的乘法

若
$$C=AB \tag{1-5}$$
则必须满足矩阵A的列数等于矩阵B的行数。在这种条件下，乘积C的元素c_{ij}等于矩阵A的第i行各元素分别与矩阵B的第j列各对应元素的乘积之和。即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-6}$$

【例 1-2】 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

试计算$C=AB$。

解：因为A的列数等于矩阵B的行数，所以矩阵A和B可以相乘。

$$C=AB=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\times1+3\times(-1)+4\times0 & 2\times0+3\times1+4\times2 \\ 1\times1+2\times(-1)+3\times0 & 1\times0+2\times1+3\times2 \\ (-1)\times1+1\times(-1)+2\times0 & (-1)\times0+1\times1+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

可见，C的行数等于A的行数，C的列数等于B的列数。

显然，矩阵乘法有如下几个性质

$$\left.\begin{aligned} &A(BC)=(AB)C \quad \text{即满足分配律} \\ &A(B+C)=AB+AC \quad \text{即满足结合律} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

但在一般情况下，$AB\neq BA$。例如，若

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

而求出的

$$AB=\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 8 & 22 \end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix} 22 & -1 \\ -16 & -7 \end{bmatrix}$$

其结果完全不同。

利用矩阵乘法，可以把方程组或函数表达为矩阵形式。

【例 1-3】 试写出线性方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{aligned}\right\}$$

的矩阵表达式。

解：从该方程组中引出如下矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

按照矩阵相乘法则，方程组可表达为

$$AX=B$$

可见，用矩阵来表达方程组极为简便。

4.转置矩阵

将矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

中的行与列对调，得到新矩阵

$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{bmatrix}$$

则称矩阵A^T为矩阵A的转置矩阵。

由于对称方阵中$a_{ij}=a_{ji}$，其转置矩阵必与原方阵相等，即

$$A^T=A$$

不难验证，矩阵乘积的转置规则是

$$\left.\begin{aligned}(AB)^T=B^TA^T\\(ABC)^T=C^TB^TA^T\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

即矩阵乘积的转置等于反序矩阵转置的乘积。例如

$$\left(\begin{bmatrix}3&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}5&3\\7&3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}5&7\\3&3\end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}3&1\\4&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\3&3\end{bmatrix}$$

其结果完全相同。

同样还可以证明矩阵相加的转置规则为

$$(A+B)^T=A^T+B^T\tag{1-9}$$

【例 1-4】 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}$，求乘积$AA^T$。

解：$AA^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12} & a_{21}^2+a_{22}^2 & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22} & a_{31}^2+a_{32}^2 \end{bmatrix}$$

由此例可知，对于任意$m\times n$阶矩阵A，其乘积AA^T必为对称方阵。显然，如果有任意$\lambda\neq 0$的常数，则λAA^T也必为对称方阵。

【例 1-5】 已知矩阵

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

求乘积X^TY。

解：$X^TY=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

可见，行矩阵与列矩阵乘积为一个数。

5.逆矩阵

对于n阶方阵A，若有另一n阶方阵B，能满足$AB=I$，则称B为A的逆矩阵。A的逆矩阵记作A^{-1}，则$B=A^{-1}$。

可以证明，若$AB=I$时，$BA=I$，即B是A的逆矩阵，A也必是B的逆矩阵。

由上述定义和矩阵互逆性质，可以推知下列各式必成立

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

逆矩阵的求法可通过对一个三阶方阵的讨论加以说明。设有三阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

为非奇异方阵，构造另一个三阶矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

式中的A_{ij}是行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，这样构成的矩阵A^*称作矩阵A的伴随矩阵。

注意：矩阵A^*是把行列式$|A|$中各元素a_{ij}换成它的代数余子式A_{ij}后所得方阵的转置矩阵。

根据行列式的性质，以任一行（列）的各元素与其相对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值；而以任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积

之和等于零。对上述三阶矩阵有

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=|A| \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \qquad i\neq j$$

则方阵A与其伴随矩阵A^*之积是

$$AA^*=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 0\\ 0 & |A| & 0\\ 0 & 0 & |A|\end{bmatrix}=|A|I$$

对于非奇异矩阵，$|A|\neq 0$，则有

$$A\frac{A^*}{|A|}=I$$

按逆矩阵定义，$\dfrac{A^*}{|A|}$就是A的逆阵A^{-1}，故

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \tag{1-10}$$

将上面三阶方阵求逆阵的方法推广到n阶方阵求逆阵同样适用。

由公式(1-10)可知，方阵A有逆阵的充分必要条件是其行列式$|A|\neq 0$，即方阵A为非奇异方阵。

可以证明，在矩阵运算中，若A、B均为非奇异方阵，则有

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

即两方阵乘积的逆阵等于反序方阵的逆阵的乘积。

实际上，计算逆矩阵A^{-1}常用于求解线性方程组。线性方程组的矩阵式为(见例1-3)

$$AX=B$$

若系数矩阵A及常数项矩阵B均已知，且A为非奇异方阵，则A^{-1}存在，以A^{-1}左乘等式两端有

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$IX=A^{-1}B$$

所以
$$X=A^{-1}B$$

因此，求解线性方程组，关键在于求出系数矩阵A的逆矩阵A^{-1}。

【例 1-6】 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$的逆矩阵。

解：因为A的行列式$|A|=-6+4=-2\neq 0$，所以矩阵A为非奇异，其逆阵A^{-1}存在。根据式(1-10)有

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

三、函数的二次型及矩阵的正定

在优化方法讨论中，常用矩阵形式来表示一个二次函数。这里先引出一个二元二次函数的矩阵表达式。

设有一般的二元二次函数

$$F(X)=mx_1^2+nx_2^2+px_1x_2+b_1x_1+b_2x_2+c$$

式中X表示一组变量x_1，x_2，在多元函数中用X表示一组变量（x_1，x_2，…，x_n）的集合。按矩阵的运算法则，上面的函数可写成

$$F(X)=\frac{1}{2}[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}2m & p\\p & 2n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+[b_1\ \ b_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+c$$

若令 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m & p\\p & 2n\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$

则一般二元二次函数的矩阵表达式为

$$F(X)=\frac{1}{2}X^TAX+B^TX+C \tag{1-11}$$

式中的方阵A显然是一个对称方阵。

式（1-11）同样也可以是多元二次函数的矩阵表达式，各矩阵应是

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

其中A是一个对称方阵。

若在n元二次函数中仅含有变量的二次项，则称为n元二次齐次函数或简称为二次型。

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是x_1，x_2，…，x_n的二次型，即

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots\\&\quad+2a_{1n}x_1x_n+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(a_{ij}=a_{ji};\ i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

据此，任意二次型都可以写成

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots\\&\quad+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\\&\quad+a_{2n}x_n)+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\end{aligned}$$