应用概率统计

武继玉 主编

航空工业出版社

应用概率统计

武继玉　主编

航空工业出版社

1994

(京)新登字 161 号

内 容 提 要

本书吸取了多年来概率统计教材的优点，针对教学中的具体实践作了相当的修正，主要有以下三点：精选了概率论的内容，联系数理统计的需要，突出了基本内容和方法；统计内容突出了解题的思路和方法；精心挑选了每章的习题，数量、难度适中，并备有答案参考。章节安排循序渐进，条理分明，便于教学和自学。

本书为工科院校教材，也可为大中专学生及自学人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/武继玉主编．—北京：航空工业出版社，1994．8

ISBN 7－80046－822－4

Ⅰ．应… Ⅱ．武… Ⅲ．①概率论②数理统计 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 08331 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

煤炭工业出版社印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

1994 年 8 月第 1 版　　1994 年 8 月第 1 次印刷

开本：787×1092 1/32　　印张：10.25 字数：224 千字

印数：1～4500　　定价：8.50 元

前　言

这本书是为普通高等工科院校的本、专科学生所写的教材。它减少了部分章节，略去了某些复杂的证明，直接使用定理和公式的结论，因而也可作为中等专业学校的教材和缺少高等数学知识读者的参考资料。

近十年来，我先后在清华大学、北京联合大学自动化工程学院为本、专科学生主讲了概率论与数理统计这门课，参加了应用课题的一些科研项目。在和高年级、毕业班学生及一些工程技术人员的交往中，我发现他们都充分肯定了概率统计，特别是数理统计内容的实用价值。他们也感到，概率统计课的教学和选用教材方面还存在某些急待解决的问题。这些问题归纳起来大致有以下几点：

1. 当前概率统计课总学时偏少，而现有教材的概率部分大多篇幅较长，常常要挤掉数理统计中许多有用的教学内容。

2. 概率论部分的内容，重点不够突出，特别是从便于应用、服务于统计的角度进行提炼和精简不够。

3. 数理统计部分的各章节中，概念、方法较多，但是解题的思路不够突出，步骤不够醒目。

基于上面提出的一些问题，深感概率统计课应该积极地进行改革。要进行教学改革就必须有一本合适的教材相配合。为此，我们努力吸取现有教材的优点，针对提出的问题，采取积极探索的态度主编了《应用概率统计》这本教材。

本书所具有的特色是：

1. 精简压缩了概率论部分的内容，以利于减少这部分的

学时。措施主要是：

(1)联系数理统计部分的需要，尽量突出基本概念和基本计算公式。

(2)把一维和多维(重点是两维)随机变量一起引出，从对比中加深对概念的理解和对公式的记忆，叙述时尽量避免内容的混杂。

2.统计方法的介绍，尽量突出解题思路，寻找各种方法之间的联系。如检验“小概率事件是否已经发生”是统计推断中的重要手段，在多处都有应用，编者注意突出这一解题的思路。对于解题方法尽量条理化，使读者易于记忆。

由于编者的水平有限，书中难免会有不少的缺点、错误，希望读者给予批评和指正。书中有若干例题与习题选自国内已出版的某些书刊，这些书目编者无法一一列举，在此谨致谢意。

本书的初稿，承蒙清华大学应用数学系原概率统计教研室主任马振华教授进行了细致的审阅，在多处提出非常好的意见。在此，编者表示衷心的感谢。自动化工程学院图书馆张志良馆长也为本书出版给了很大的帮助。在此，编者一并致以诚挚的谢意。

参加本书编写工作的有武继玉、王慧民、杨奇峰、魏荣、范汀生等同志。其中武继玉编写第一、二、七、八章；王慧民编写第三、四章及除第十章外的全部习题；杨奇峰编写第十章及本章的习题；魏荣编写第五、九章；范汀生编写第六章。全书由武继玉统编和校阅。

武继玉　1994年3月于北京

目 录

第一章　概率论的基本概念

第一节　概率论与数理统计的研究对象

自然界有两种本质完全不同的现象：一种是确定性现象；另一种是不确定性现象，又称为随机现象。

所谓确定性现象，是指在基本条件完全相同的条件下，重复试验或观察，总是得出相同的结果。例如："同性电荷相互排斥"，"人总要死亡"，等等。

所谓随机现象，是指在基本条件完全相同的条件下，重复试验观察会得出不同的结果，即出现的结果呈不确定性。例如："如用同一台仪器测量某种产品的重量，重复测量会得出不同的结果"，"每年 10 月 1 日北京的气温"。

概率论是对于客观存在的随机现象，提出各种不同的、理想化了的数学模型，并研究其内在的规律性。

数理统计是以概率论为理论基础，着重于对统计资料进行分析、研究，确定它的数学模型。它的中心任务是：从局部的观测资料的统计特性来推断事物整体的统计特性。

概率论与数理统计的理论与方法，已经广泛应用于工业、农业、军事科学技术中，某些社会科学领域也有广泛的应用。目前工科院校各专业已把它列入必修的基础数学的内容。

第二节　随机事件

一、 随机事件

对随机现象的研究，要通过对客观事物的“观察”或“试验”。这种“观察”与“试验”一般具有三个条件：

①可以在相同条件下重复进行；

②每次“试验”或“观察”的可能结果不止一种；

③进行一次试验前，不能预知那一个结果会出现。

凡具有以上特征的试验，概率论中统称为随机试验。

研究随机试验，首先要知道这个试验可能出现的结果，这些结果就称为随机事件，简称事件。随机事件一般用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 或带下标的拉丁字母标记。

随机事件可以是数量形式出现的，即试验的结果可以直接地测量或计数得到，例如，投掷一枚骰子出现的点数，某电话总机收到的呼唤次数，等等；随机事件也可以是非数量形式的，由某个属性表示，例如，投掷一枚硬币观察出现正反面，观察明天的天气状况（风、雨、云、晴）等。

为了深入研究，我们把随机事件作如下的区分。

1. 基本事件

有时也称为简单事件，它是一种不能再进行拆分的事件。例如：投掷一颗骰子的试验中“出现点 1”、“出现点 3”都是最简单的，不能再拆分的事件。

2. 复合事件

它是由基本事件复合而成的事件。例如，投掷一颗骰子的试验，“出现奇数点”是由“出现点 1”、“出现点 3”、“出现点 5”三个基本事件复合而成的；“出现点数不大于 3”，是由“出现

点 1”、“出现点 2”、“出现点 3”三个基本事件复合而成的随机事件。

3. 两个特殊事件：必然事件和不可能事件

必然事件(用 S 表示)——表示在试验中必然会出现的结果。

不可能事件(用 Φ 表示)——表示在试验中肯定不会发生的结果。

例如：(1)投掷一颗骰子，“点数小于 7”是必然事件，而“点数不小于 7”是不可能事件；(2)两个带正电的电荷靠近时互斥是必然事件，而相吸则是不可能事件。

必然事件和不可能事件实际上不具有随机性，但通常也把它们看成随机事件。

二、 样本空间

对于随机试验 E，以其所有基本事件作为元素所组成的集合称为试验 E 的样本空间。样本空间中的每个基本事件(元素)称为样本点。由样本空间中元素所组成的子集，就是随机事件，因为样本空间包含了试验 E 的所有基本事件，因此样本空间也是试验 E 的必然事件，这样，样本空间也用必然事件记号 S 表示。

设随机试验 E，如果它的全部基本事件为 $e_1, e_2, e_3, \cdots e_n$，$\cdots$，则样本空间表示为：

$$S = \{e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots\}.$$

［**例** 1］ 随机试验 E_1 是投掷一颗骰子，观察出现的点数。其样本空间是 $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$，共有六个样本点。一次试验前出现什么点数，事前不能断定，但 1、2、3、4、5、6 各点都有出现的可能，因此这些点都是随机事件，因为不能再拆

分，也是基本事件。

［**例** 2］ 随机试验 E_2 是记录某电话交换台在单位时间内接到的呼唤次数。其样本空间为：

$$S_2 = \{0,1,2,\cdots\},$$

它有无穷多个样本点，但它可以一一列举出来，每个数据都有出现的可能，但每次记录前不能断定出现的次数，同样每一数据都是一个基本事件。

［**例** 3］ 随机试验 E_3 是测试某晶体管的寿命 T，其样本空间应是：

$$S_3 = \{T \mid t \geqslant 0\},$$

它也有无穷多个样本点，和 E_2 不同的是样本点不能一一列举出来。任取一只晶体管，测试前不能断定它的寿命大小，它可能是集合$\{t \geqslant 0\}$中的任一实数值。

三、 事件的关系及运算

一个随机事件，实际上就是由样本空间中基本事件所组成的一个集合，因此，事件之间的关系及运算可以用集合之间的关系及运算加以表示。

1. 事件的包含和相等

如果 A 事件的出现必然导致 B 事件的出现，即属于 A 事件的样本点也一定属于 B 事件的样本点，就称 B 事件包含 A 事件，或称 A 事件被 B 事件包含，简称 A 被 B 包含。记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

［**例** 4］ 设有一批圆柱形零件，如果圆柱的高度合格，截面的直径尺寸也合格，则此零件就是合格品，否则就是次品。设：A 事件＝“直径合格”，B＝“高度合格”，C＝“零件合格”。

于是就有：$A\supset C$，$B\supset C$，$C\subset A$，$C\subset B$。如果 $A\subset B$，而且 $B\supset A$，就说 A 与 B 相等，并记作 $A=B$。

2. 事件的和(或并)

设有两个事件 A 和 B，在试验中“A 事件与 B 事件中至少有一个要出现”也是一个随机事件，称为 A 事件与 B 事件的和(或并)，记作 $A\cup B$(或 $A+B$)。

［**例** 5］ 从一批产品中抽取两件，设事件 $A=$“至少有一件是正品”，$B=$“第一件是正品”，$C=$“第二件是正品”；因为“至少有一件正品”＝“第一件是正品”$\cup$“第二件是正品”，因此就有 $A=B\cup C$。

类似地，“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中至少有一个出现”称为几个事件 A_1,A_2,A_n的并(或和)，记为

$$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

如果事件有无穷多个，则“$A_1,A_2,\cdots A_n$ 至少有一个发生”称为可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

3. 事件的积(或交)

设有两个事件 A 和 B，在试验中“A 事件和 B 事件都出现”也是一个随机事件，称为 A 事件和 B 事件的积(或交)，记作 $A\cap B$，或简记为 AB。

［**例** 6］ 考虑某电话总机一天接到的呼唤次数，设 $A=$“呼唤次数是偶数”，$B=$“呼唤次数为 3 的倍数”，$C=$“呼唤次数是 6 的倍数”，于是有

$$C=A\cap B=AB.$$

类似地，“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都出现”也是一个随机事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

如果事件有无穷多个，则“$A_1,A_2,\cdots$ 都出现”也是一个随机事件，称为可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积，记为

$$A_1\cap A_2\cap A_n\cdots \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

4. 事件的差

设有两个随机事件 A 和 B，在试验中“A 事件发生而 B 事件不发生”也是一个随机事件，称为 A 事件与 B 事件的差，记作 $A\backslash B$（也有记为 $A-B$）。

［例 7］ 投一颗骰子，设 A=“点数不小于 3”，B=“点数不小于 4”，C=“点数等于 3”，因此有

$$C = A\backslash B.$$

5. 互不相容事件（互斥事件）

如果 A 事件与 B 事件不能同时出现，就说 A 事件与 B 事件是互不相容的。当 A 事件与 B 事件互不相容时，就有

$$A\cap B=\Phi \qquad (1-1)$$

例如，“投掷骰子点数大于 3”与“投掷骰子点数小于 3”即是互不相容的。

6. 对立事件（互逆事件）

如果 A 事件与 B 事件必有一个出现，但 A 事件与 B 事件不能同时出现，就说 A 事件与 B 事件是对立事件，或者说 A 事件与 B 事件是互逆的。A 的对立事件记为$\overline{A}$，显然有 $B=\overline{A}$，自然可得 $A=\overline{B}$，所以对立事件是互相对立的，满足：

$$A\cup\overline{A}=S, A\cap\overline{A}=\Phi. \qquad (1-2)$$

［例 8］ 投掷一枚骰子，设 A＝“出现点数小于 3”，B＝“出现点数 4”，C＝“出现点数不小于 3”，于是有 A 事件与 B 事件互不相容，有 $A\cap B=\Phi$；而 A 事件和 C 事件是对立事件，亦即满足 $A\cup C=S$，$AC=\Phi$。

事件之间的关系与集合之间的关系是一致的，可以用一种文图（Venn）表示，具体表示见图 1—1：

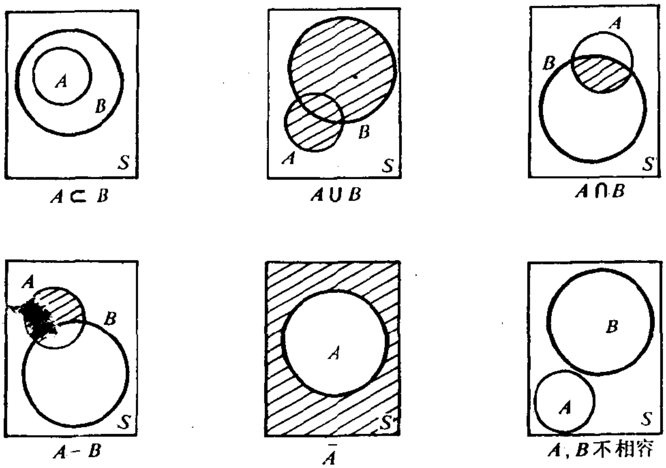

图 1—1

对于事件的运算，还有下面的关系式：

① 交换律 a） $A\cup B=B\cup A$，

b） $A\cap B=B\cap A$.

② 结合律 a） $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

b） $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③ 分配律 a） $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

b） $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

④ 德莫根（De Morgan）定理

a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, b) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

⑤ $A\cup\overline{A}=S$, $A\cap\overline{A}=\Phi$.

⑥ $\overline{\overline{A}}=A$, $\overline{S}=\Phi$.

⑦ $\overline{\overline{A}}\cap S=A$。

第三节 概率与频率

一、 概率

如果多次做某一随机试验时，常常会发现某些随机事件在试验中出现的可能性大些，而另一些随机事件出现的可能性要小些。为了用一个数字来刻画某个随机事件出现的可能性大小，我们做这样的规定：对于一个随机事件 A，用一个数 $P(A)$来表示该事件出现的可能性大小，这个数 $P(A)$就称为随机事件 A 的概率。

研究随机现象，只知道它出现那些结果的价值不大，如果能够知道各种结果出现的可能性大小则具有很大的意义。因此，有了概率这一概念就使我们能够对随机现象进行定量的研究，这是一件很有价值的工作。

二、 古典概型

对于已给的随机事件 A，如何确定 A 事件出现的概率 $P(A)$呢？这决定于随机试验 E 和随机事件 A 的特殊属性，不能一概而论。这里先介绍一种特殊的随机试验，其概率容易规定，这种随机试验具有以下的特征：

1)有限性：随机试验 E 的样本空间 S 中，只有有限多个基本事件，如 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$共有 n 个基本条件。

2)等可能性：每个基本事件出现的可能性相等，亦即

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n).$$

满足这两个特征的随机试验 E,称为古典概型。对于有 n 个基本事件的古典概型,因为每个基本事件出现的可能性相等,故有

$$P(e_i)=\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

考虑到基本事件两两互不相容,而且

$$e_1\cup e_2\cup\cdots\cup e_n=\bigcup_{i=1}^{n}e_i=S,$$

因此有
$$P(\bigcup_{i=1}^{n}e_i)=P(S)=1,$$

又知

$$P(e_1)+P(e_2)+\cdots+P(e_n)=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=n\times\frac{1}{n}=1,$$

于是得出
$$P(\bigcup_{i=1}^{n}e_i)=\sum_{i=1}^{n}P(e_i).\qquad(1-3)$$

在古典概型中,如果样本空间 S 中包含了 n 个基本事件 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,随机事件 A 包含了 k 个不同的基本事件: $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$,则 A 事件在试验中出现的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{S\text{ 中包含的基本事件总数}}.\qquad(1-4)$$

事实上,对于随机事件 A,它可以表示为基本事件之和,亦即 $A=e_{i_1}\cup e_{i_2}\cup\cdots\cup e_{i_k}=\bigcup_{j=1}^{k}e_{i_j}$,由于基本事件间互不相容,因此

$$P(A)=P\left(\bigcup_{j=1}^{k}e_{i_j}\right)=\sum_{j=1}^{k}P(e_{i_j})=\frac{k}{n}.$$

从古典概型的概率研究中,发现概率具有下面三条基本性质: