上海交通大学应用数学系编

高等数学

（下 册）

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

上海交通大学出版社

高 等 数 学

下 册

上海交通大学应用数学系 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分上下两册，另有上海交通大学出版社出版的《高等数学学习题集》与本书相配套。它们编排的章次完全一致。

下册内容括包：多元函数的微分法及其应用；重积分及其应用；曲线积分与曲面积分；级数；常微分方程；矢量分析与场论。每章后面还备有附注。

本书可供高等工科院校作为教材，也可供高等院校、成人高校的师生以及报考高等院校研究生的读者作为参考用书。

高 等 数 学

（下 册）

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 16.875 字数 433,000

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数：1—10,000

ISBN7-313-00066-9/O13 科技书目：160-251

定价：3.20 元

目　录

第八章　多元函数的微分法及其应用

前面第一章到第六章介绍了一元函数的微积分及其应用。虽然在某些场合也曾遇到过多于一个自变量的函数，但在那里我们只让其中一个变量变动而把其余的变量都看作常数。例如函数 $y=e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)$ $(\alpha>0)$是把 α、ω、φ 看作常数的。下面几章要介绍多于一个自变量的函数即所谓多元函数的微积分以及它们的应用。本章先介绍多元函数的微分法及其应用。在许多方面，多元函数的概念和结论是一元函数相应的概念和结论的直接推广。但是，需要特别注意的是从研究一元函数转到二元函数时，会出现一些本质上特殊的结论，至于一般多元函数的情形则与二元函数相类似，因此本章将较多地研究二元函数。

§1　多元函数的概念

一、多元函数的定义

在实际问题中，经常会遇到多于两个变量之间存在着依赖关系。先观察一些例题。

例 1　设圆柱体的底半径为 r，高为 h，则其体积为

$$V=\pi r^2 h。$$

对于变量 r 和 h 的每一对数值，对应着 V 的一个确定的数值。V 是 r 和 h 的函数。

例 2　设炮筒与水平面的倾角为 α，假定空气阻力不计，则以初速度为 v 发射的炮弹其射程为

$$s=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g},$$

其中 g 是重力加速度　。

对于变量 α 和 v 的每一对数值，对应着 s 的一个确定的数值。s

是 a 和 v 的函数。

例 3 理想气体的体积 V 与绝对温度 T 成正比，与压强成反比，故有

$$V=\frac{RT}{p},$$

其中 R 是常数。

对于变量 T 和 p 的每一对数值，对应着 V 的一个确定的数值。V 是 T 和 p 的函数。

例 4 单摆的长度 l，周期 T 和重力加速度 g 之间的关系为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

通过对单摆长度 l 及周期 T 的测定，利用上式可求得重力加速度

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}。$$

对于变量 l 和 T 的每一对数值，对应着 g 的一个确定的数值。g 是 l 和 T 的函数。

从上面这些例子抽出它们的共性，去掉变量的具体意义，就得到以下二元函数的的定义。

定义 设有一平面点集 E①。如果对于 E 中每一点 $P(x,y)$ 所对应的一对有次序的数 x、y，根据一个确定的法则 f，有另一个变量 z 的唯一确定的值和它们对应，则称变量 z 为变量 x 和 y 的**二元函数**，或称变量 z 为点 $P(x,y)$ 的函数，记作

$$z=f(x,y) \quad 或 \quad z=f(P)。$$

其中：x、y 称为自变量；z 称为因变量。点集 E 称为函数的定义域。函数值构成的数集 Z 称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域。

当 $x=a$ 及 $y=b$ 时，函数 z 的对应值记为

$$z\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \quad 或 \quad f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \quad 或 \quad f(a,b)。$$

如果不考虑函数解析式子中变量所表示的实际意义时，那末

① 这里点集 E 的元素是平面上的点。

它的定义域就由解析式子本身来确定。在实际问题中函数的定义域还要考虑到变量的具体意义。一般说来，实际问题的定义域通常比函数的解析式的定义域为小。

例如由解析式 $z=xy$ 所定义的函数，其定义域为整个 xOy 平面。但如果把 z 看作矩形面积，x 和 y 看作矩形的长和宽，那么必须有 $x>0$，$y>0$。可以把这个集记作

$$E=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$$

引用几何术语，容易把二元函数的定义推广到 n 元函数，这只要把平面点集换成 n 维空间的点集。n 维空间是三维空间的一种抽象。把 n 个有次序的数 x_1、x_2、$\cdots x_n$ 称为 n 维空间的点 P 的 n 个（直角）坐标，记作 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而把 n 个变量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的函数 u 记作

$$u=f(x_1,x_2\cdots,x_n) \quad 或 \quad u=f(P)。$$

仿照平面及空间直角坐标系中两点之间的距离，n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}。$$

下面再举几个多元函数的例子。

例 5 设三角形的三边为 a、b、c，则其内角 A 可表示为

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

这里 $\cos A$ 是三个变量 a、b、c 的函数。

由于 $|\cos A|\leqslant 1$，故应有

$$|b^2+c^2-a^2|\leqslant|2bc|。$$

又因为 a、b、c 为三角形的边长，故 $a>0$，$b>0$，$c>0$。于是上式化为

$$-2bc\leqslant b^2+c^2-a^2\leqslant 2bc,$$

由此得 $\quad a^2\leqslant(b+c)^2 \quad$ 及 $\quad (b-c)^2\leqslant a^2,$

故得 $\quad a\leqslant b+c, \qquad -a\leqslant b-c\leqslant a,$

即 $\quad a\leqslant b+c, \qquad b\leqslant c+a, \qquad c\leqslant a+b,$

故知 $\cos A$ 的定义域为 $a\leqslant b+c, b\leqslant c+a, c\leqslant a+b$。

例 6 设有质量为 m_1 及 m_2 的两质点分别位于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，则此两质点间引力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{km_1m_2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

其中k为引力常数。这里$|\boldsymbol{F}|$是 8 个变量 m_1、m_2、x_1、y_1、z_1、x_2、y_2、z^2 的函数，它的定义域是 $m_1>0, m_2>0$，且$(x_1,y_1,z_1)\neq(x_2,y_2,z_2)$。如果质量 m_1、m_2 固定，那末它就成为 6 个变量的函数。如果再进一步把 $P_1(x_1,y_1,z_1)$固定，则$|\boldsymbol{F}|$就成为三个变量的函数。

例 7 设 n 为正整数，则 n 个数 x_1、x_2、$\cdots x_n$ 的算术平均数

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

是一个 n 元函数，它的定义域为 $x_i\in R\ (i=1,2,\cdots n)$。

可以用不同的符号来表示不同的函数。例如 $u=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$、$v=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $w=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示三个不同的 n 元函数。

二、平面区域的有关概念

二元函数$z=f(x,y)$的定义域通常是平面上的一个“区域”。而区域的概念又是以邻域、内点、边界点等概念为基础的。

设 $P_0(x_0,y_0)$是平面上一点。凡满足不等式 $|PP_0|<\delta$ 的点 P的集称为 P_0 的δ**邻域**，用$U(P_0,\delta)$来表示，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}。$$

不包含点 P_0 在内的邻域称为**去心邻域**，记作

$$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$$

用坐标来表示，则为

$$U((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\},$$

$$\overset{\circ}{U}((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\,|\,0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\},$$

从几何上看，点 P_0 的 δ 邻域就是以 P_0 为圆心，δ 为半径的圆周内(而不包括圆周本身)的点的全体。这种邻域称为圆邻域。有时，为了讨论问题方便，要用到点 $P_0(x_0,y_0)$的“方邻域”，它表示以下点P的集

$$\{P(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}。$$

同样，点 P_0 的去心δ方邻域为

$$\{P(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$$

明显地，如果存在一圆邻域，则必存在一个较小的方邻域，反之亦然。

设有平面点集E，又 $P_0\in E$。如果 $\exists\ \delta>0$，使$U(P_0,\delta)\subset E$，则称 P_0 是集E的一个**内点**。

如果集E的每一点都是它的内点，则称E为**开集**。

设 P_0不属于E，记作 $P_0\overline{\in} E$，如果 $\exists\delta>0$，使$\mathring{U}(P_0,\delta)$不再含有E中的点，则称 P_0 为E的**外点**。

设 P_0 为平面上一点，$P_0\in E$ 或 $P_0\overline{\in} E$。如果 $\forall\delta>0$，P_0的δ 邻域既含有E中的点又含有不属于E中的点，则称 P_0 是E的**边界点**。

集E的边界点组成的集称为集E的**边界**。

例如，设集E为

$$E=\{P(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1\},$$

则点$(0,0)$及圆周 $x^2+y^2=1$ 组成了集E的边界。

对集E的内点、外点、边界点、边界等概念的直观理解见图 8-1。

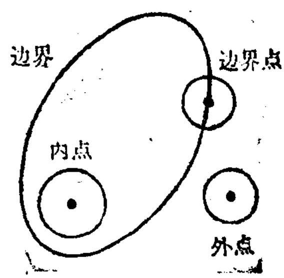

图 8-1

现在给出区域的定义。设E是一个开集，又E的任意两点都可以用有限条直线所组成的折线连接起来，而这条折线全部包含在E内，则称E为**开区域**，或简称**区域**。这种可

以用全部包含在E内的折线把E中任意两点连接起来的性质称为**连通性**，因此区域是只含有内点的连通集。一个区域和它的边界构成的集称为**闭区域**。例如，集$\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$是开区域，又集$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$是闭区域，而由不等式$xy>0$确定的点集就不是区域。

区域通常用D来表示，闭区域用$\overline{D}$来表示。在不需要区分是(开)区域还是闭区域时，有时仍用D来表示。

如果$\exists K>0$，使集E全部包含在原点的K的邻域内，即若$E\subset U(O,K)$，则称E为**有界集**。当E为区域时称为**有界(区)域**；当E为闭区域时称为**有界闭(区)域**。如果不存在这样的正数K，则有相应的**无界集**、**无界(区)域**等名称。

一般说来，二元函数$z=f(x,y)$的定义域通常是平面上的一个或几个区域。这些区域经常是由一条或若干条简单连续曲线所围成的。至于连续曲线，我们早已有所认识。设曲线用参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

给出，其中$x(t)$和$y(t)$都是t的连续函数。如果又有以下性质：

属于区间$[a,b]$内的任意两个不同的t值t_1及t_2，对应着曲线上不同的点，则此曲线称为**简单连续曲线**。

例如，椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，星形线$x=a\cos^3 t$，$y=b\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$都是简单连续曲线，但是曲线$x=a\cos 2t, y=a\cos 2t\,\mathrm{tg}\,t$ $(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$就不是简单连续曲线，因为当$t=-\frac{\pi}{4}$及$t=\frac{\pi}{4}$时，对应着同一点$(0,0)$(图8-2)。

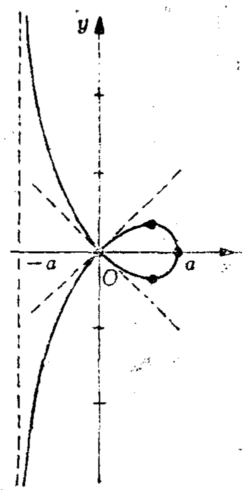

图 8-2

对于三维空间以及 n 维空间来说，也有类似于平面上的"邻域、内点、外点、边界点、开集、(开)区域、闭区域、有界域、无界域"等概念。

三、二元函数的几何意义

前面曾经用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$ 的图形。一般说来，它是平面上的一条曲线。现在要用空间直角坐标系来描述二元函数 $z=f(x,y)$的几何意义。

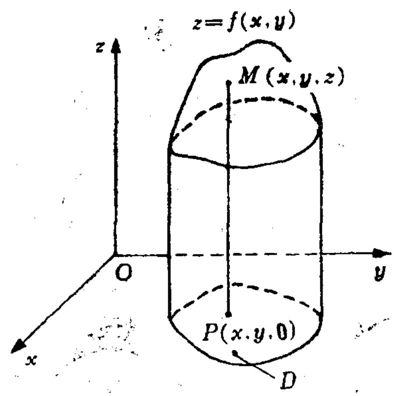

图 8-3

设有一定义在 xOy 平面上的区域D的二元函数 $z=f(x,y)$。在区域D内任取一点$P(x,y)$，过点 P 作垂直于 xOy 平面的直线，在其上截取一有向线段$\overline{PM}$，使得它的值等于 $f(x,y)$，得到空间直角坐标系中坐标为 (x,y,z)（其中 $z=f(x,y)$）的点M。于是，对应于定义域D内的点P，得到空间一点M。当点P取遍D内的点时。M点的轨迹就是二元函数 $z=f(x,y)$的图形(图8-3)。一般说来，二元函数的几何意义是空间的一张曲面，它在 xOy 平面的投影就是函数的定义域。

例 8 函数 $z=ax+bx+c$（其中 a、b、c 是常数）的图形是不平行于 z 轴的一张平面。

例 9 函数 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$(其中 a、b 是正常数)的图形是顶点在原点，开口向上的椭圆抛物面。

例 10 函数 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$（其中 a、b、c 是正常数）的图形是中心在原点，三个半轴在坐标轴上的椭球面的上半

部分。当 $a=b=c$ 时是上半球面。

对于多于两个自变量的函数虽然没有直观的几何形象，但有时我们可以设想，它是 $n+1$ 维空间中的一张(超)曲面。

§2 二元函数的极限与连续

一、二元函数的极限

所谓二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限，按通俗的讲法，就是当自变量 x 趋于 x_0 和 y 趋于 y_0 时，或者说，当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 趋于定数 A。精确地说，设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域有定义(点 P_0 本身可以除外)。如果存在定数 A，对于任意给定的正数 ε，存在正数 δ，当

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

时，恒有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，或者用逻辑符号表示为

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y):P\in\mathring{U}(P_0,\delta)\to|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时(或 $P\to P_0$ 时)的(二重)极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \tag{1}$$

或

$$\lim_{p\to p_0}f(P)=A\text{。} \tag{2}$$

如果设 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，则(1)式又可写为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=A\text{。} \tag{3}$$

若令 $\Delta\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则当 $\Delta x\to 0$、$\Delta y\to 0$ 时，$\Delta\rho\to 0$；反之，当 $\Delta\rho\to 0$ 时，$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$，因此(3)式又可改写为

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=A。\tag{4}$$

在以上极限的定义中，用到的是圆邻域，也可以把它换成方邻域，这时极限的定义就成为

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall P(x,y)$：$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\to|f(x,y)-A|<\varepsilon$。

容易明白这两种定义是等价的。在根据极限的定义证明$f(x,y)$的极限为A时，究竟采用哪一种定义需视证明时何者方便而定。

留给读者自己给出n元函数的极限的定义。

二元函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0$、$y\to y_0$时的极限为A的几何意义是：在点$P_0(x_0,y_0)$的去心邻域内的曲面$z=f(x,y)$介于两平面$z=A-\varepsilon$与$z=A+\varepsilon$之间。

例 1　试证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

证　由于$\left|\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\left|\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$$\leqslant\frac{|x|^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}<\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(\text{当}|x|<1,|y|<1)。$$

因此，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(1,\varepsilon),\forall(x,y)$：

$$0<x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2<\delta^2\to$$

$$\left|\sin\frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,$$

故知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

例 2　试证$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)=5$。

证　$|x^2+y^2-5|=|(x^2-1)+(y^2-4)|$

$\leqslant|x+1||x-1|+|y+2||y-2|$。

由于 $x\to1, y\to2$，故不妨设 $|x-1|<1, |y-2|<1$，从而知

$|x+1|<3, |y+2|<5$，故

$|x^2+y^2-5|<3|x-1|+5|y-2|<5[|x-1|+|y-2|]$。

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min(1, \frac{\varepsilon}{10}), \forall P(x,y): |x-1|<\delta, |y-2|<\delta,$

$(x,y)\neq(1,2)\to|x^2+y^2-5|<\varepsilon$,

由此得 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}(x^2+y^2)=5$。

例 3 试问当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 是否有极限？

解 函数 $f(x,y)$ 除点 $(0,0)$ 外都有定义。考察点 (x,y) 沿着两条特殊的直线——Ox 轴和 Oy 轴——趋于点 $(0,0)$。

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}(x,0)=0,$$

$$\lim_{\substack{y\to0\\x=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(0,y)=0。$$

现在还不能由此推断 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$。再来考察点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}。$$

这个极限与直线的斜率 k 有关，它随着 k 取不同值而改变，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在。

从上述例题可知，当点 $P(x,y)$ 沿着不同的直线趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 有不同的极限，从而断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在。如果沿着任何方向的直线由 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函

数 $f(x,y)$ 都有相同的极限，那末能否由此断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 必定存在？试看下面的函数：

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}。$$

先让点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 以及直线 $x=0$ 趋于点 $(0,0)$，然后再让点 (x,y) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于点 $(0,0)$。你能得出怎样的结论？

二、二元函数的连续性

与一元函数的情形一样，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

或写成点函数的形式

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **连续**。用文字来叙述，就是**极限值等于函数值**。

函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的连续性，还可以用下面四种等价形式来表示：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} [f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

其中 $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。

倘若要用 ε-δ 的术语来描述 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的连续性，那就是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$
$$\to|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$