高 等 代 数

武汉教育学院
北京教育学院　合编
上海教育学院
熊　全　淹　主审

高等教育出版社

内容提要

本书是根据中学教师进修高等师范专科《数学专业教学大纲(试用本)》，并结合中学教师进修实际编写的。它将作为培训中学教师的卫星电视教材，也可供教育学院、函授、自学用作教材。

全书分为三个部分，即多项式论，线性代数和群、环、域的概念。本书根据中学教师进修的特点，体现了少而精的原则，内容由浅入深，由具体到抽象，侧重于基础知识和基本理论的介绍，并配备大量例题和习题。本书加强了与中学数学联系较紧的内容，对学员高观点地领会和处理中学教材将会起到好的作用。

高等代数

武汉教育学院
北京教育学院　合编
上海教育学院
熊　全　淹　主审

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 13.75　字数 330,000
1988 年 10 月第 1 版　1988 年 10 月第 1 次印刷
印数 0001—15,170

ISBN 7-04-000230-2/O·269
定价 3.15 元

目　录

第一章 多 项 式

多项式是中学代数的主要内容之一，也是高等代数的重要研究对象．在进一步学习代数和其他数学理论时，都会遇到它．因此，我们有必要对多项式深入系统地研究．

这章重点讨论一元多项式，主要是下面三个问题：

1．多项式的概念，运算及基本性质；

2．多项式的整除性理论；

3．多项式的因式分解．

§1 一元多项式的概念与运算

在中学代数里，我们首先是在系数为有理数的范围内讨论多项式，然后再逐步扩大到实数范围、复数范围内讨论．全体有理数的集 $\boldsymbol{Q}$、全体实数的集 $\boldsymbol{R}$ 以及全体复数的集 $\boldsymbol{C}$ 虽然有很大的不同，但也有明显的共同点，那就是数集中任意两个数经过加、减、乘、除四种运算后结果仍在这数集中．为了在进一步研究时，能够对于数的不同范围统一讨论，我们引入下面的概念．

定义 1 假定 F 是全体复数的集 $\boldsymbol{C}$ 的含有非零数的子集．如果 F 中任意两个数 a 与 b 的和 $a+b$，差 $a-b$，积 ab，商 $\frac{a}{b}(b\neq0)$ 仍在 F 中，那末 F 就叫做**数域**．

于是全体有理数的集 $\boldsymbol{Q}$，全体实数的集 $\boldsymbol{R}$，全体复数的集 $\boldsymbol{C}$ 都是数域，它们分别叫做**有理数域**，**实数域**，**复数域**．但整数集不是数域，正有理数集也不是数域．

除有理数域、实数域、复数域以外，还有其他数域．譬如，不难

验证所有形如

$$a+b\sqrt{2}\quad (a,\ b\ \text{是有理数})$$

的数组成的集合是一个数域.

我们可以证明：任何一个数域必定包含有理数域 $\boldsymbol{Q}$，或者说有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 是最小的数域. 这是因为假如 F 是一个数域，那末 F 至少含有一个非零数 a，于是 F 包含 $0=a-a$，$1=\frac{a}{a}$. 这样 F 包含任意的自然数 $n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}$，而且包含任意的负整数 $-n=0-n$. 因此，F 包含全体整数. 又因为任意一个有理数都可以表成两个整数的商，所以 F 含有一切有理数.

下面我们总是以某个预先取定的数域 F 为基础来讨论多项式.

定义 2 假定 x 是一个符号(或称文字)，那末表示式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

叫做**数域 F 上的一元多项式**，简称**一元多项式**，其中 n 是一个非负整数，a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1}, a_n 都是数域 F 中的数.

一元多项式常用 $f(x)$, $g(x)$, $\cdots$ 来表示，或简单地用 f, g, $\cdots$ 来表示.

在多项式(1)中，a_kx^k 叫做 **k 次项**，a_k 叫做 **k 次项系数**. 特别地，a_0 叫做**零次项**或**常数项**. 当 $a_k=0$ 时，a_kx^k 可以不写. 因此为了某些方便，在一个多项式中可以添上或去掉系数是零的项.

在 $a_n\neq 0$ 时，a_nx^n 叫做多项式(1)的**首项**，a_n 叫做(1)的**首项系数**，n 叫做(1)的**次数**，并记作次$(f(x))$①. 这样，每一个系数不完全是零的多项式都有一个唯一确定的次数. 特别地，首项是 $a_0(\neq 0)$ 的多项式的次数是零.

对系数完全是零的多项式不定义次数，这个多项式叫做**零多**

① 在有的书中，常用 $\deg f(x)$ 表示.

项式，记作0. 需要注意的是，零多项式与零次多项式是不同的，零是零多项式，非零常数是零次多项式.

定义3 假定在多项式$f(x)$与$g(x)$中，同次项的系数完全相同，那末$f(x)$与$g(x)$就叫做相等，记作$f(x)=g(x)$.

下面定义多项式的加法、减法与乘法. 这些都与我们在中学代数里的做法是一致的.

假定多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

并不妨设$m\leqslant n$. 如果把它们的同次项的系数相加或相减，就得到$f(x)$与$g(x)$的和或差，即

$$f(x)\pm g(x)=(a_n\pm b_n)x^n+(a_{n-1}\pm b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1\pm b_1)x+(a_0\pm b_0), \tag{2}$$

其中对$m<n$的情况$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$. 显然对于非零多项式$f(x)$与$g(x)$，在$f(x)\pm g(x)\neq 0$时，有

$$\text{次}(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\text{次}(f(x)),\text{次}(g(x))).\text{①}$$

如果把$f(x)$的每一项与$g(x)$的每一项按

$$a_ix^i\cdot b_jx^j=a_ib_jx^{i+j}$$

相乘，然后把这些乘积相加，就得到$f(x)$与$g(x)$的乘积

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+a_0b_0, \tag{3}$$

其中k次项的系数是

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k\,(0\leqslant k\leqslant n+m),$$

这里$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+m}=0$，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_{m+n}=0$. 由于当$a_n\neq 0$且$b_m\neq 0$时，就有$a_nb_m\neq 0$. 于是在$f(x)\neq 0$且$g(x)\neq 0$时，有$f(x)g(x)\neq 0$，并且

① $\max(a_1, a_2, \cdots, a_s)$表示$a_1, a_2, \cdots, a_s$中最大的一个数.

$$\text{次}(f(x)g(x))=\text{次}(f(x))+\text{次}(g(x)),$$

这时 $f(x)g(x)$ 的首项等于 $f(x)$ 的首项与 $g(x)$ 的首项的乘积.

由(2), (3)式不难看出, 数域 F 上的两个多项式的和、差、乘积仍然是数域 F 上的多项式.

例 1 假设 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$, 那末

$$f(x)+g(x)=x^3,$$

$$f(x)-g(x)=x^3-6x^2+4x-2,$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (1\cdot3)x^5+(-1\cdot2-3\cdot3)x^4 \\ &\quad +(1\cdot1+3\cdot2+2\cdot3)x^3 \\ &\quad +(-3\cdot1-2\cdot2-1\cdot3)x^2 \\ &\quad +(2\cdot1+1\cdot2)x-1\cdot1 \\ &= 3x^5-11x^4+13x^3-10x^2+4x-1. \end{aligned}$$

例 2 假设多项式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ 是多项式 $g(x)=x^2+cx+d$ 的平方, 试证: $a^2=4b\pm8$.

证 因为

$$\begin{aligned} g^2(x) &= (x^2+cx+d)(x^2+cx+d) \\ &= x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2, \end{aligned}$$

而 $f(x)=g^2(x)$, 于是根据多项式相等的定义, 有

$$a=2c, \quad b=c^2+2d, \quad a=2cd, \quad d^2=1.$$

由 $d^2=1$, 得 $d=\pm1$. 假如 $d=1$, 那末

$$a=2c, \quad b=c^2+2,$$

因此 $a^2=4b-8$; 假如 $d=-1$, 那末

$$a=2c, \quad b=c^2-2, \quad a=-2c,$$

即 $c=0$, $a=0$, $b=-2$, 因此 $a^2=4b+8$.

多项式的运算与数的运算类似, 满足下面一些运算规律.

1) 加法交换律、结合律:

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

2) 乘法交换律、结合律:

$$f(x)g(x)=g(x)f(x);$$

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

3) 乘法对加法的分配律:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

证 我们只需证明这个等式两边的多项式的同次项系数都相等. 为此,假设

$$f(x)=a_lx^l+a_{l-1}x^{l-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

$$h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

并不妨设 $m\geqslant n$. 于是

$$g(x)+h(x)=\sum_{j=0}^{m}(b_j+c_j)x^j \text{①},$$

从而 $f(x)(g(x)+h(x))$ 的 k 次项系数是

$$\sum_{i+j=k}a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}a_ib_j+\sum_{i+j=k}a_ic_j \quad (0\leqslant k\leqslant l+m);$$

又 $f(x)g(x)+f(x)h(x)$ 的 k 次项系数也是

$$\sum_{i+j=k}a_ib_j+\sum_{i+j=k}a_ic_j \quad (0\leqslant k\leqslant l+m).$$

因此 $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$. ▮

4) 乘法消去律:

假如 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 并且 $f(x)\neq 0$, 那末 $g(x)=h(x)$.

证 由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 可以得到

$$f(x)(g(x)-h(x))=0.$$

而 $f(x)\neq 0$, 所以必定有

---

① "$\sum$"是连加号. $\sum_{i=0}^{n}a_i$ 表示 a_0, a_1, …, a_n 的和, 即 $\sum_{i=0}^{n}a_i=a_0+a_1+\cdots+a_n$; $\sum_{i+j=k}a_ib_j$ 表示满足 $i+j=k$ 的所有乘积 a_ib_j 的和.

$$g(x)-h(x)=0,$$

即 $g(x)=h(x)$. ▮

习 题

1. 下列数集哪些是数域?

(1) 全体正实数的集合;

(2) 全体形如 $b\sqrt{2}$ 的数的集合, 其中 b 是有理数;

(3) 全体形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的集合, 其中 a, b 是整数;

(4) 全体形如 $a+bi$ 的数的集合, 其中 a, b 是有理数.

2. 求 a, b, c 使得

$$(2x^2+ax-1)(x^2-bx+1)=2x^4+5x^3+cx^2-x-1.$$

3. 假设 $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, 试问公式

$$次(f(x)+g(x))\leqslant \max(次(f(x)),\ 次g(x)))$$

中何时等号成立? 何时小于号成立?

4. 假设 $f_i(x)\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, s)$. 试证:

$$次(f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x))=次(f_1(x))+次(f_2(x))+\cdots+次(f_s(x)),$$

并且 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$ 的首项等于每个 $f_i(x)$ 的首项的乘积.

5. 证明多项式乘法满足结合律.

6. 假如 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是实数域上的多项式, 并且满足等式

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x).$$

试证: $g(x)=0$, $h(x)=0$.

假如 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是复数域上的多项式, 上面结论是否仍然成立?

§2 多项式的整除性

在整数的整除性讨论中, 带余除法起着基本作用. 对于多项式来说, 它也有类似的性质.

下面所说的多项式都是某个固定数域 F 上的多项式.

我们知道, 两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$, 差 $f(x)-g(x)$, 乘积 $f(x)g(x)$ 仍然是多项式; 但是用 $g(x)(\neq 0)$ 除 $f(x)$ 并不一定得多项式, 而可能有余式.

在中学代数里，我们学过竖式除法．譬如，假设

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-1,\quad g(x)=3x^2-2x+1.$$

用下面的格式演算：

$$\begin{array}{r|l|l} 3x^2-2x+1 & x^3-3x^2\ +2x\ \ -1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\ & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\ \cline{2-2} & \quad -\frac{7}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1 & \\ & \quad -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad \frac{1}{9}x-\frac{2}{9} & \end{array}$$

可以得到商式$=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$，余式$=\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}$；并且有

$$f(x)=g(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}\right).$$

一般情形也是这样，对于多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，我们总可以用竖式除法逐个地消去被除多项式的首项，降低所余多项式的次数，从而最后得到多项式$q(x)$与$r(x)$①，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中次$(r(x))<$次$(g(x))$，或者$r(x)=0$．

下面我们再证明满足上面条件的$q(x)$、$r(x)$是唯一的．假如还有多项式$q_1(x)$与$r_1(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),$$

其中次$(r_1(x))<$次$(g(x))$，或者$r_1(x)=0$．这样就有

$$g(x)q(x)+r(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),$$

即
$$g(x)(q(x)-q_1(x))=r_1(x)-r(x).$$

如果$q(x)\neq q_1(x)$，因为$g(x)\neq 0$，那末左边次数不小于次$(g(x))$，

① 假如$f(x)=0$或次$(f(x))<$次$(g(x))$，可取$q(x)=0$，$r(x)=f(x)$．

而右边次数小于次$(g(x))$，这是不可能的．因此 $q(x)=q_1(x)$，从而 $r(x)=r_1(x)$．

于是我们得到下面的重要结论：

定理 1(**带余除法**) 假如$f(x)$与$g(x)$是任意两个多项式，并且$g(x)\neq0$，那末一定有多项式$q(x)$与$r(x)$存在，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中次$(r(x))<$次$(g(x))$，或者$r(x)=0$，并且这样的$q(x)$与$r(x)$是唯一确定的． ▌

上面的多项式$q(x)$与$r(x)$，通常分别叫做用$g(x)$除$f(x)$所得的**商式**与**余式**．

当余式$r(x)=0$时，就引出整除的概念．

定义 假定$f(x)$与$g(x)$是两个多项式，如果存在一个多项式$h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x),$$

我们就说$g(x)$**整除**$f(x)$．这时$g(x)$叫做$f(x)$的**因式**，$f(x)$叫做$g(x)$的**倍式**．

由定义容易推得：任意多项式$f(x)$一定能整除它自身；$f(x)$能整除零多项式；零次多项式(即非零常数)能整除$f(x)$．

我们用符号$g(x)\mid f(x)$表示$g(x)$整除$f(x)$，用符号$g(x)\nmid f(x)$表示$g(x)$不能整除$f(x)$．当$g(x)\mid f(x)$，并且$g(x)\neq0$时，用$g(x)$除$f(x)$所得的商式可以用$\dfrac{f(x)}{g(x)}$表示．

需要注意的是，在整除定义中并没有限制$g(x)\neq0$．但是零多项式只能整除零多项式．以后我们说$g(x)$整除$f(x)$，一般总是假设$g(x)\neq0$．

由定理 1 我们可以得到

定理 2 假定$f(x)$与$g(x)$是两个多项式，其中$g(x)\neq0$，那末

$g(x)|f(x)$的充要条件是用 $g(x)$除 $f(x)$所得的商式 $r(x)=0$. ∎

例 1 在 a 是什么数时, $g(x)=2x+1$ 能整除 $f(x)=2x^3+5x^2+ax-1$?

解 用分离系数法求 $g(x)$除 $f(x)$所得的余式:

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
2\ \ 1 & 2 & 5 & a & -1 & 1\ \ 2\ \ \frac{1}{2}(a-2) \\
 & 2 & 1 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 4 & a & & \\
 & & 4 & 2 & & \\
\cline{2-5}
 & & & (a-2) & -1 & \\
 & & & (a-2) & \frac{1}{2}(a-2) & \\
\cline{2-5}
 & & & & -\frac{1}{2}a &
\end{array}
$$

于是得余式 $$r(x)=-\frac{1}{2}a.$$

因此, 在而且只在 $a=0$ 时$g(x)|f(x)$.

我们也可以用待定系数法解决这个问题:

根据整除定义, $g(x)|f(x)$的充要条件是

$$
\begin{aligned}
2x^3+5x^2+ax-1&=(2x+1)(x^2+bx-1)\\
&=2x^3+(2b+1)x^2+(b-2)x-1.
\end{aligned}
$$

比较两边同次项的系数得

$$2b+1=5,\quad b-2=a.$$

因此, 在而且只在 $a=0$ 时$g(x)|f(x)$.

多项式的整除关系具有以下几个常用的性质:

性质 1 假如 $h(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$, 那末 $h(x)|f(x)$. 也就是说, 整除关系是可以传递的.

证 由 $h(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$, 有

$$g(x)=h(x)q_1(x),\quad f(x)=g(x)q_2(x).$$

于是 $$f(x)=h(x)(q_1(x)q_2(x)).$$
因此 $h(x)\mid f(x)$. ▮

这个性质可以推广到有限多个多项式的情形.

性质 2 假如 $g(x)\mid f(x)$, $f(x)\mid g(x)$, 那末 $g(x)=c\cdot f(x)$, 这里 c 是一个非零常数.

证 不妨假设 $g(x)\neq 0$. 由 $g(x)\mid f(x)$, $f(x)\mid g(x)$, 有
$$f(x)=g(x)q_1(x),\quad g(x)=f(x)q_2(x).$$
于是 $$g(x)=g(x)(q_1(x)q_2(x)).$$
两边消去 $g(x)$, 得
$$q_1(x)q_2(x)=1.$$
所以 $q_1(x)$, $q_2(x)$都是零次多项式, 因此 $g(x)=c\cdot f(x)$(c 是非零常数). ▮

显然这个性质的逆也是成立的. 即 $f(x)$ 与 $cf(x)$ 相互整除.

性质 3 假如 $g(x)\mid f_1(x)$, $g(x)\mid f_2(x)$, 那末
$$g(x)\mid u_1(x)f(x)+u_2(x)f_2(x),$$
其中 $u_1(x)$, $u_2(x)$是任意多项式.

证 由 $g(x)\mid f_i(x)$, 有
$$f_i(x)=g(x)q_i(x)\quad (i=1,\ 2).$$
于是
$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)=g(x)(u_1(x)q_1(x)+u_2(x)q_2(x)).$$
即 $$g(x)\mid u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x).$$ ▮

这个性质显然也可以推广到有限多个多项式的情形.

最后, 我们举一例.

例 2 假设 $h(x)\mid 3f(x)+2g(x)$, $h(x)\mid 2f(x)-3g(x)$. 试证: $h(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid g(x)$.

证 由 $h(x)\mid 3f(x)+2g(x)$, $h(x)\mid 2f(x)-3g(x)$, 有

$$3f(x)+2g(x)=h(x)p(x),$$
$$2f(x)-3g(x)=h(x)q(x).$$

由上面两个等式可以得到

$$f(x)=h(x)\left(\frac{3}{13}p(x)+\frac{2}{13}q(x)\right),$$
$$g(x)=h(x)\left(\frac{2}{13}p(x)-\frac{3}{13}q(x)\right).$$

所以 $h(x)\mid f(x),\ h(x)\mid g(x)$.

习　题

1. 求用 $g(x)$除 $f(x)$所得的商式与余式:

(1) $f(x)=5x^4+3x^3+2x^2+x-1,\ g(x)=x^2+2x-2$;

(2) $f(x)=x^3+2x+1,\ g(x)=2x^2-x$.

2. 求用 $g(x)=(x-1)^2$ 除 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2+ax+b$ 所得的商式与余式,并确定 $a,\ b$ 的值,使 $g(x)\mid f(x)$.

3. 试问 $m,\ p,\ q$ 满足什么条件时,多项式 x^2+mx-1 能够整除 x^3+px+q?

4. 假设 $p\neq 0$,并且 $x^2+p\mid ax^3+bx^2+cx+d$. 试证: $ad=bc$.

5. (1) 试证: 假如 $h(x)\mid f(x),\ h(x)\nmid g(x)$,那末

$$h(x)\nmid f(x)+g(x);$$

(2) 假如 $h(x)\nmid f(x),\ h(x)\nmid g(x)$,那末 $h(x)$能整除 $f(x)+g(x)$吗? 试举例说明.

6. 假设 $f_1(x)\neq 0$, 而且 $g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x),\ f_1(x)\mid g_1(x)$. 试证: $g_2(x)\mid f_2(x)$.

7. 试证: $x\mid f^k(x)$(k 是正整数)的充要条件是 $x\mid f(x)$.

8. 假设 $f(x),\ g(x)$是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的多项式,而且 $g(x)\nmid f(x)$. 试证: $f(x),\ g(x)$作为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的多项式仍有 $g(x)\nmid f(x)$.

§3 最大公因式

最大公因式在多项式的整除性理论中占有重要的地位.

定义 1 假定多项式 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，那末 $h(x)$ 就叫做 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**公因式**.

显然，任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 总有公因式. 譬如，任意零次多项式都是它们的公因式. 由于两个不全是零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式的次数不超过 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的次数，因此它们的所有公因式中必定存在次数最大的. 于是我们有下面的重要概念.

定义 2 假定多项式 $d(x)$ 是两个不全是零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，并且是它们的公因式中次数最大的，那末 $d(x)$ 就叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**一个最大公因式**.

两个零多项式的最大公因式是零多项式.

由定义可知，假如 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那末对于任意非零常数 c, $c\cdot d(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 由此可见，任意两个不全是零的多项式不仅都有最大公因式，而且它们的最大公因式不是唯一的.

下面我们来讨论两个不全是零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式的求法.

首先在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，假如 $g(x)=0$，那末 $f(x)$ 就是它们的一个最大公因式；假如 $g(x)\neq 0$，但 $g(x)\mid f(x)$，那末 $g(x)$ 就是它们的一个最大公因式.

在一般情形，即假如 $g(x)\neq 0$，并且 $g(x)\nmid f(x)$，我们按带余除法用 $g(x)$ 除 $f(x)$，可以得到商式 $q_1(x)$ 和余式 $r_1(x)$；如果 $r_1(x)\neq 0$，则再用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$，又可以得到商式 $q_2(x)$ 和余式 $r_2(x)$；如此辗转相除下去，由于

$$次(g(x))>次(r_1(x))>次(r_2(x))>\cdots,$$

因此在有限次以后，必定有一个余式为 0. 于是我们得到下面的等式组：