

金牌奥校

数学奥林匹克 集训题精编

伍家德 主编

高中ABC卷

ABC



中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克

SHUXUE AOLINPIKEJIXUNTIJINGBIAN

伍家德 主编

集训题精编

高中ABC卷

ABC

中国少年儿童出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学奥林匹克集训题精编. 高中 ABC 卷/《金牌奥校》编写组编.
- 北京: 中国少年儿童出版社, 2000.12

(金牌奥校)

ISBN 7-5007-5518-X

I. 数… II. 金… III. 数学课-高中-习题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 79029 号

主编 伍家德

编委 (按姓氏笔划为序)

毛经中 甘大旺 齐世荫 伍家德

朱翠蓉 孙凤仪 汪跃中 李平龙

余水能 邹楼海 郑学群 徐 川

徐学文 裴光亚 樊孝农

数学奥林匹克集训题精编·高中 ABC 卷

中国少年儿童出版社 出版发行

责任编辑: 惠 玮

美术编辑: 徐 欣

社址: 北京东四十二条 21 号

邮政编码: 100708

印刷: 山东济南新华印刷厂

经销: 新华书店

850×1168 1/32 10.25 印张 245 千字

2001 年 1 月北京第 1 版 2001 年 1 月山东第 1 次印刷

印数: 1—20000 册

ISBN 7-5007-5518-X/G·4310

(全四册) 总定价: 43.20 元 本册定价: 10.80 元

凡有印装问题, 可向印装厂家调换

编写说明

推进素质教育，培养创新能力，是当前我国教育的一个重大方向，并受到教育界的普遍重视和社会的广泛关注。多年的学科竞赛实践表明，合理地开展学科竞赛活动，是促进学校教育改革，提高学生学科素质的积极因素。

为了配合素质教育的形势需要，进一步推动学科竞赛活动的开展，我们依据统编教材，并按照我国学科竞赛大纲的规定，编写了这套《金牌奥校》丛书。希望能对中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力有所帮助，从而促进从知识型向能力型的转变。同时也希望能为广大同行在对学生实施素质教育的过程中提供一些参考。

《金牌奥校》丛书是数学、物理、化学等专业学会专家学者及奥校教练员、部分省市教研员，在认真分析了中学生应具备的各学科基础知识和基本技能的前提下，结合奥校智能训练实际情况编写而成的，本丛书有以下二个特色：

一、面向全体中学生

本丛书覆盖了中学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想。取材源于统编教材，但又不局限于课本，坚持“强化基础，适当提高，突出重点”的原则，对课本内容作了必要概括、合理变通和适应拓广。因此该套丛书可作为中高考复习资料。

ANAL 7/1/58

二、照顾有兴趣特长的中学生

本套丛书设立了专题研究，对竞赛中的常见方法在理论和实践的基础上作了综合性研究，可培养深广的学科思维能力、学科思想方法和学科应用意识。因此本套丛书又可作为竞赛学习、培训的资料和教材。

本套丛书按年级和学科编写，并包括以下几个部分：奥林匹克教程、奥林匹克集训题精编、奥林匹克题典、奥林匹克模拟试卷。内容由易到难，由简入繁，讲练结合，编排科学合理。

本丛书是在统一规划下，根据详细的计划界定而由全体编委分工编写的。它是教学和科研的成果，是集体智慧的结晶。在编写和统稿的过程中，我们虽然注意博采众长，并力求有自己的风格，但由于水平有限，缺点和错误难免，诚恳地希望读者能提供宝贵意见和建议。

编 者



目 次

第一章 集合与映射.....	(1)
第二章 幂函数、指数函数、对数函数.....	(8)
第三章 三角函数	(14)
第四章 两角和与差的三角函数	(20)
第五章 反三角函数和简单三角方程	(26)
第六章 不等式	(32)
第七章 数列与数学归纳法	(37)
第八章 复数	(44)
第九章 排列组合、二项式定理.....	(51)
第十章 直线与平面	(57)
第十一章 多面体和旋转体	(64)
第十二章 直线与圆	(72)
第十三章 圆锥曲线	(78)
第十四章 参数方程、极坐标.....	(85)
第十五章 专题研究	(92)
第一套模拟试题	(98)
第二套模拟试题.....	(105)
第三套模拟试题.....	(112)
第四套模拟试题.....	(120)



参考答案	(126)
第一章 集合与映射	(126)
第二章 幂函数、指数函数、对数函数	(136)
第三章 三角函数	(145)
第四章 两角和与差的三角函数	(152)
第五章 反三角函数和简单三角方程	(163)
第六章 不等式	(173)
第七章 数列与数学归纳法	(182)
第八章 复数	(196)
第九章 排列组合、二项式定理	(203)
第十章 直线与平面	(211)
第十一章 多面体和旋转体	(223)
第十二章 直线与圆	(237)
第十三章 圆锥曲线	(246)
第十四章 参数方程、极坐标	(255)
第十五章 专题研究	(269)
第一套模拟试题	(276)
第二套模拟试题	(287)
第三套模拟试题	(299)
第四套模拟试题	(312)



第一章 集合与映射

A 卷

一、选择题

1. 集合 $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ 用描述法表示是 ()

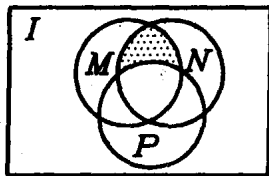
- (A) $\{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.
 (B) $\{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.
 (C) $\{x | x = 2k + 1, 1 \leq k \leq 7\}$.
 (D) $\{x | x = 2k + 1, k \leq 7, k \in \mathbb{N}\}$.

2. 若方程 $x^2 - px + 6 = 0$ 的解集为 M , 方程 $x^2 + 6x - q = 0$ 的解集 N , 且 $M \cap N = \{2\}$, 则 $p + q =$ ()

- (A) 21. (B) 8.
 (C) 6. (D) 7.

3. 如右图所示, I 是全集, M, N, P 是 I 的三个子集, 则阴影部分所表示的集合是 ()

- (A) $(M \cap N) \cap P$.
 (B) $(M \cap N) \cup P$.
 (C) $(M \cap N) \cup \bar{P}$.
 (D) $(M \cap N) \cap \bar{P}$.



(第3题图)

4. 设 $I = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | (4 + x)(2 - x)$



$< 0\}$, $N = \{x | 4 + x > 0\}$, 则 ()

(A) $M \cap N = \emptyset$.

(B) $M \cup N = \mathbb{R}$.

(C) $M \cap N = \overline{M}$.

(D) $\overline{M} \cap \overline{N} = \{-4\}$.

5. 集合 $M = \{(x, y) | (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 < 2, x, y \in \mathbb{Z}\}$ 的元素个数是 ()

(A) 16.

(B) 17.

(C) 18.

(D) 25.

6. 已知集合 $M = \{x | x^3 - x = 0\}$, 集合 $N = \{x | -2 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$, 从 M 到 N 的映射 $f: M \rightarrow N$ 满足条件: 对任意 $x \in M$, 恒有 $x + 3f(x)$ 为偶数, 则这样的映射共有 ()

(A) 8 个.

(B) 9 个.

(C) 81 个.

(D) 64 个.

7. 已知集合 $M = \{(a, b) | a, b \text{ 是方程 } x^2 - x - 2 = 0 \text{ 的两个实根}\}$, 规定一个 M 到 N 的对应法则 $f: (a, b) \rightarrow (a^2, b^2)$. 如果 $f: M \rightarrow N$ 是 M 到 N 上的映射, 那么集合 N 是 ()

(A) $\{4, 1\}$.

(B) $\{(4, 1)\}$.

(C) $\{(1, 4)\}$.

(D) $\{(4, 1), (1, 4)\}$.

8. 函数 $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$ 的定义域是 ()

(A) $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$.

(B) $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$.

(C) $\{x | -2 < x < 2\}$.

(D) $\{x | -2 \leq x < 0 \text{ 且 } 0 < x \leq 2\}$.

9. 已知 $f(x) = -3x^2 + m(6-m)x + n$, 当常数 $n > -6$ 时, $f(x) = 0$ 的一根大于 1, 而另一根小于 1, 则 m 的取值范围是 ()
- (A) $\emptyset$.
(B) $\{3\}$.
(C) $(3 - \sqrt{n+6}, 3 + \sqrt{n+6})$.
(D) $(-\infty, 3 - \sqrt{n+6}) \cup (3 + \sqrt{n+6}, +\infty)$.
10. 已知 $f(x) = -2x^3 - x$, 若 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 + x_2 > 0, x_2 + x_3 > 0, x_3 + x_1 > 0$, 则 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的值 ()
- (A) 大于 0. (B) 小于 0.
(C) 等于 0. (D) 大于 0 或小于 0.
11. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 在 $x < 0$ 时, $f(x)$ 是增函数. 若 $x_1 < 0, x_2 > 0$ 且 $|x_1| < |x_2|$, 则 ()
- (A) $f(x_1) - f(x_2) > 0$.
(B) $f(x_1) - f(x_2) < 0$.
(C) $f(x_1) + f(x_2) > 0$.
(D) $f(x_1) + f(x_2) < 0$.
12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 满足: (1) $f(-x) = f(x)$, (2) $f(4-x) = f(x)$. 如果当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$, 则当 $x \in [-6, -4]$ 时, $f(x) =$ ()
- (A) $-x^2 + 1$.
(B) $-(x-2)^2 + 1$.
(C) $-(x+2)^2 + 1$.
(D) $-(x+4)^2 + 1$.
13. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上的单调递减奇函数, 则它的反函数是 ()
- (A) $[-f(a), f(a)]$ 上的增函数.
(B) $[f(a), -f(a)]$ 上的增函数.



- (C) $[-f(a), f(a)]$ 上的减函数.
 (D) $[f(a), -f(a)]$ 上的减函数.
14. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(7.5) =$ ()
 (A) 0.5. (B) 1.5.
 (C) -0.5. (D) -1.5.
15. 已知 $f(x) = 3ax - 2a + 1$ ($a \neq 0$) 在区间 $[-1, 1]$ 上存在 t ($t \neq \pm 1$) 使 $f(t) = 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $(-1, \frac{1}{5})$.
 (B) $(\frac{1}{5}, +\infty)$.
 (C) $(-\infty, -1)$.
 (D) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{5}, +\infty)$.

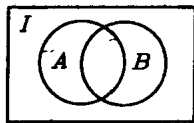
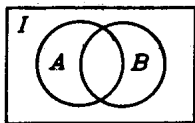
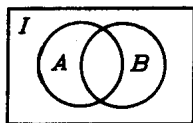
二、填空题

16. 下图中, I 是全集, A, B 是 I 的两个子集, 用阴影表示:

(1) $\overline{A \cup B}$

(2) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(3) $\overline{A} \cup \overline{B}$



(第 16 题图)

17. 已知 $y = |ax^2 + bx + c|$ 中的 a, b, c 取自集合 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中的 3 个不同的元素, 且 $\frac{a}{b} < 0$. 那么这样的函数的不同图象共有 _____ 个.



18. 给定映射 $f: (x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. 在映射 f 下, 象 $(4, 2)$ 的原象是_____.
19. 函数 $y = \frac{x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 26x + 106}{x^2 + 2x + 7}$ ($|x| \leq 1$) 的值域是_____.
20. 方程 $2\sqrt{x^2 - 7} + 3\sqrt{x^2 - 12} + 4\sqrt{x^2 - 16} = \frac{48}{x}$ 的解集是_____. (提示: 利用函数的单调性.)

B 卷

三、解答题

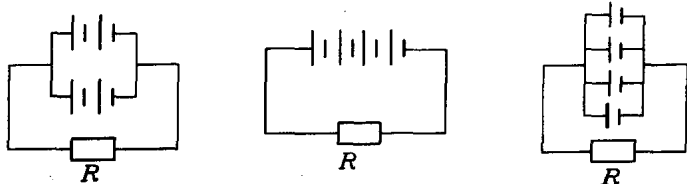
21. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Q}\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Q}\}$. 规定一个对应法则 $f: (\frac{b}{a}, \frac{d}{c}) \rightarrow \frac{b+d}{ac}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$. 试问: f 是否确定 A 到 B 的一个映射, 为什么?
22. 试确定函数 $f(x)$, 使其对所有实数 x , 满足条件:
 $2f(x) + f(1-x) = x^2$.
23. 已知 $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$, 若 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值为 $M(a)$, 最小值为 $N(a)$, 并令 $g(a) = M(a) - N(a)$.
 (1) 求函数 $g(a)$ 的表达式;
 (2) 判断 $g(a)$ 的单调性, 并求 $g(a)$ 的最小值.
24. 已知 $x \in [-2, 2]$, 偶函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时单调递减, 且 $f(1-m) < f(m)$, 求 m 的取值范围.
25. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足: $f(-1) = 0$. 问: 是否存在常数 a, b, c , 使 $x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ 对一切实数 x 都成立, 并证明你的结论.

C 卷

26. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 若方程 $f(x) = x$ 无实根, 求证: 方程 $f(f(x)) = x$ 也无实根. (1996 年, 北京高一数学竞赛初赛题).
27. 若 $f(x) = x^2 + m$, 且 $f(f(x)) = f(x^2 + 1)$ 对一切实数 x 都成立. 令 $F(x) = f(f(x)) - \lambda f(x)$, 试问: 是否存在实数 λ , 使 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上为减函数, 而在区间 $(-1, 0)$ 上为增函数.
28. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, 1)$ 上的函数, 如果
- (1) 对任意 $x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) > 0$;
 - (2) 对任意 $x, y \in (0, 1)$, 都有 $\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} \leq 2$.
- 证明: $f(x)$ 是常数函数. (1987 年上海数学竞赛题)
29. 设 $f(x)$ 是奇函数, 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 并且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 特别地, $f(1) = -2$.
- (1) 试问: 在 $-3 \leq x \leq 3$ 时, $f(x)$ 是否有最值? 如果有, 求出最值; 如果没有, 说明理由.
 - (2) 求使 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}[f(b^2x) - f(bx^2)] < f(b)$ ($b \neq \pm \sqrt{2}$) 的 x 的取值范围.
30. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 且 $f(x+\lambda) = -f(x)$ (λ 是正常数), 证明:
- (1) $f(x)$ 是周期函数, 若 λ 是满足条件 $f(x+\lambda) = -f(x)$ 的最小正数, 则 2λ 是 $f(x)$ 的最小正周期;
 - (2) 存在正常数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$;

(3) $f(x)$ 的图象既关于原点对称, 又关于直线 $x = \frac{\lambda}{2}$ 对称.

31. 有四个相同的电池, 每个电动势都是 ϵ , 内阻都是 r , 把它们按下图的甲、乙、丙三种方法连接, 对同一负载 R 供电. 如果要使负载 R 得到的功率, 用甲种方法连接时比按另两种方法连接时都要大, 那么 R 的阻值应在什么范围内?



(第 31 题图)

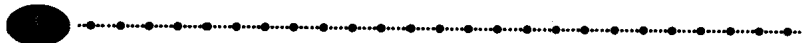


第二章 幂函数、指数函数、对数函数

A 卷

一、选择题

1. 幂函数 $y = x^{(-1)^p \cdot \frac{n}{m}}$ ($m, n, p \in \mathbb{N}$, 且 m, n 互质) 的图象在第一、第二象限, 且不过原点, 则有 ()
- (A) p, n 为奇数, m 为偶数.
(B) p, n 为偶数, m 为奇数.
(C) p, m 为奇数, n 为偶数.
(D) p, m 为偶数, n 为奇数.
2. 已知 $a = (-5)^{-\frac{2}{3}}, b = (\frac{1}{2})^{-\frac{2}{3}}, c = 5^{-\frac{1}{3}}$, 则有 ()
- (A) $a < b < c$. (B) $a < c < b$.
(C) $c < a < b$. (D) $c < b < a$.
3. 如果 $x = (1 + \frac{1}{n})^n, y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), 则有 ()
- (A) $x^y = y^x$.
(B) $x^y = y^x$.
(C) $x^y > y^x$.
(D) x^y 与 y^x 的大小关系不能确定.
4. 如果 $60^a = 3, 60^b = 5$, 那么 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ 的值是 ()



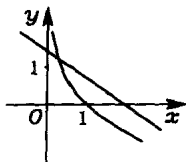
(A) $\sqrt{3}$.

(B) 2.

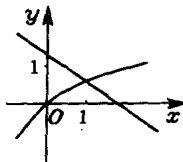
(C) $\sqrt{5}$.

(D) 3.

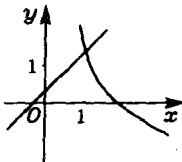
5. 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=a^{-x}+b$, $g(x)=bx+a$, 则 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象只可能是 ()



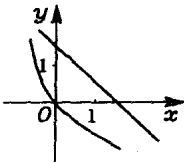
(A)



(B)



(C)



(D)

第 5 题图

6. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $af(x^n)+f(-x^n)=bx$ (其中 $a^2 \neq 1$, n 是奇数), 则 $f(x)=$ ()

(A) $\frac{b}{a-1}x^{\frac{1}{n}}$.(B) $\frac{a-1}{b}x^{\frac{1}{n}}$.(C) $\frac{b}{a-1}x^{-\frac{1}{n}}$.(D) $\frac{a-1}{b}x^{-\frac{1}{n}}$.

7. 设函数 $f(x)=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$). 若 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=1$ ($x_i \in \mathbb{R}^+, i=1, 2, \cdots, n$), 则 $f(x_1^2)+f(x_2^2)+\cdots+f(x_n^2)$ 的值等于 ()

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 1.

(C) 2.

(D) $2\log_a 2$.

8. 已知 $0 < a < 1, b=a^a, c=b^a, d=a^b$, 则 a, b, c 的大小关系是

()

(A) $c > b > d$.(B) $b > c = d$.(C) $c > d > b$.(D) $c = d > b$.

9. 函数 $y = |\log_2 |x + 1||$, 则下列说法正确的是 ()

(A) 在区间 $(-\infty, -2)$ 上是减函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称.

(B) 在区间 $(-\infty, -2)$ 上是减函数, 其图象关于直线 $x = -1$ 对称.

(C) 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称.

(D) 在区间 $(-1, 0)$ 上是增函数, 其图象关于直线 $x = -1$ 对称.

10. 若 $a^{2001} < a^{2000} < a^{2002}$ ($a \in \mathbb{R}$), 则一定有 ()

(A) $a > 1$.

(B) $a < -1$.

(C) $-1 < a < 0$.

(D) $0 < a < 1$.

11. 设 $1 < a < b < a^2$, 则在 $2, \log_a b, \log_b a, \log_{ab} a^2$ 中, 最大和最小的数依次是 ()

(A) $\log_a b, \log_{ab} a^2$.

(B) $\log_a b, \log_b a$.

(C) $2, \log_{ab} a^2$.

(D) $2, \log_b a$.

12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 对任何实数 x 都有 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$, 且 $f(1) = \lg 3 - \lg 2, f(2) = \lg 3 + \lg 5$, 则 $f(45)$ 等于 ()

(A) $\lg 3$.

(B) $\lg 2$.

(C) 1.

(D) 2.

13. 函数 $y = \log_a(ax^2 - x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

(A) $(0, \frac{1}{2})$.

(B) $(\frac{1}{2}, 1)$.

(C) $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

(D) $(1, +\infty)$.

14. 函数 $f(x) = \frac{1}{\lg(2^x + 4 \cdot 2^{-x} - a)}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ()