

# 压电晶体力和加速度传感器

张福学 著

四川科学技术出版社

## 压电晶体力和加速度传感器

四川科学技术出版社出版 (成都盐道街三号)

四川省新华书店发行 渡口新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14 插页 2 字数 359 千

1985 年 3 月第一版 1985 年 3 月第一次印刷

印数: 1—3,200 册

书号: 15298·22

定价: 3.30 元

# 目 录

|                      |   |
|----------------------|---|
| 第一章 绪论               | 1 |
| § 1.1 概述             | 1 |
| § 1.2 压电晶体加速度表       | 2 |
| § 1.3 压电体上力与电压和电荷的关系 | 4 |
| § 1.4 压电双晶片          | 5 |

## 第一编 压电晶体线性加速度表

|                   |    |
|-------------------|----|
| 第二章 线性加速度表的力学概念   | 14 |
| § 2.1 简单加速度表      | 15 |
| § 2.2 比力          | 16 |
| § 2.3 绝对运动与相对运动   | 18 |
| § 2.4 空间引力场的考虑    | 19 |
| § 2.5 地球重力场中的加速度表 | 24 |

|                    |    |
|--------------------|----|
| 第三章 敏感三轴向的压电线性加速度表 | 28 |
| § 3.1 压电传感器        | 28 |
| § 3.2 电子系统         | 35 |
| § 3.3 机械系统         | 40 |
| § 3.4 试验和校准        | 44 |
| § 3.5 飞行试验         | 47 |
| § 3.6 分析           | 48 |

|       |                    |     |
|-------|--------------------|-----|
| 第四章   | 音叉式压电数字线性加速度表      | 52  |
| § 4.1 | 力-频率换能器的石英谐振器设计理论  | 52  |
| § 4.2 | 音叉式压电数字线性加速度表的原理   | 55  |
| § 4.3 | 压电数字线性加速度表的设计和结构   | 57  |
| § 4.4 | 电路设计               | 59  |
| § 4.5 | 谐振器的制作             | 60  |
| § 4.6 | 性能                 | 62  |
| 第五章   | 膜盒式压电线性数字加速度表      | 67  |
| § 5.1 | 力-频率灵敏度及其温度特性      | 67  |
| § 5.2 | 膜盒式压电线性数字加速度表的原理   | 73  |
| § 5.3 | 压电传感器              | 75  |
| § 5.4 | 压电传感器的温度特性         | 79  |
| § 5.5 | 膜盒式压电线性数字加速度表的组成   | 80  |
| § 5.6 | 膜盒式压电线性数字加速度表的性能   | 81  |
| 第六章   | 圆片式和双晶片式压电数字线性加速度表 | 84  |
| § 6.1 | 晶体的力稳频作用           | 84  |
| § 6.2 | 晶体的力敏作用            | 86  |
| § 6.3 | 圆片式压电数字线性加速度表      | 87  |
| § 6.4 | 双晶片式压电数字线性加速度表     | 93  |
| 第七章   | 振弦式线性加速度表          | 102 |
| § 7.1 | 振弦的振荡频率            | 102 |
| § 7.2 | VSA 的工作方程          | 106 |
| § 7.3 | 加速度下的弦频率           | 108 |
| § 7.4 | 张力引起弦延伸的误差分析       | 113 |

|                     |                |     |
|---------------------|----------------|-----|
| § 7·5               | VSA 的机构        | 115 |
| § 7·6               | VSA 的电路        | 124 |
| § 7·7               | 试验数据           | 127 |
| § 7·8               | 性能             | 139 |
| 第八章 压电晶体构成的六种线性加速度表 |                |     |
| § 8·1               | 压电超声线性加速度表     | 141 |
| § 8·2               | 数字脉冲加速度表       | 148 |
| § 8·3               | 双压电元件的加速度表     | 152 |
| § 8·4               | 振带式加速度表        | 153 |
| § 8·5               | 振梁式加速度表        | 156 |
| § 8·6               | 伺服加速度表         | 159 |
| 第九章 线性加速度表的试验       |                |     |
| § 9·1               | 加速度表的静态数学模型    | 167 |
| § 9·2               | 加速度表在地球重力场中的试验 | 168 |
| § 9·3               | 超低加速度输入的试验     | 178 |
| § 9·4               | 高加速度输入的试验      | 179 |

## 第二编 压电晶体冲击和振动加速度表

|                 |              |     |
|-----------------|--------------|-----|
| 第十章 冲击和振动加速度传感器 |              |     |
| § 10·1          | 地震传感器        | 182 |
| § 10·2          | 相对位移传感器      | 186 |
| § 10·3          | 最常用的冲击和振动传感器 | 186 |
| § 10·4          | 加速度表用压电材料    | 189 |
| § 10·5          | 压电加速度表的设计    | 193 |
| § 10·6          | 压电加速度表的结构    | 197 |

|        |                   |     |
|--------|-------------------|-----|
| 第十一章   | 压电冲击和振动加速度表的工作特性  | 210 |
| § 11.1 | 负载质量的误差           | 210 |
| § 11.2 | 安装差异对性能的影响        | 212 |
| § 11.3 | 加速度表产生的系统误差       | 213 |
| § 11.4 | 压电加速度表的温度特性       | 217 |
| § 11.5 | 加速度表产生的随机误差       | 225 |
| 第十二章   | 压电冲击和振动加速度表的信号调节  | 227 |
| § 12.1 | 压电传感器的专门装置        | 227 |
| § 12.2 | 频率响应              | 230 |
| § 12.3 | 系统噪声及其抑制          | 232 |
| § 12.4 | 隔离和屏蔽             | 237 |
| § 12.5 | 积分电路              | 242 |
| 第十三章   | 压电冲击和振动加速度表的性能和校准 | 244 |
| § 13.1 | 灵敏度计算             | 244 |
| § 13.2 | 各种加速度表的性能         | 250 |
| § 13.3 | 相关性校准             | 255 |
| § 13.4 | 振动的比较校准           | 258 |
| § 13.5 | 频率响应的校准           | 261 |
| § 13.6 | 频率响应试验            | 262 |
| § 13.7 | 冲击的比较校准           | 264 |
| 第十四章   | 压电冲击和振动加速度表的应用    | 268 |
| § 14.1 | 测量飞机冲击和振动         | 268 |
| § 14.2 | 测量动压力             | 271 |
| § 14.3 | 测量冲击              | 272 |
| § 14.4 | 汽车安全系统试验中的应用      | 274 |

|        |                   |     |
|--------|-------------------|-----|
| § 14.5 | 测量热和动力系统的振动·····  | 275 |
| § 14.6 | 飞机喷气发动机振动的监测····· | 278 |

## 第十五章 四种新型冲击和振动压电加速度表的研

|           |     |
|-----------|-----|
| 究和应用····· | 288 |
|-----------|-----|

|        |                                      |     |
|--------|--------------------------------------|-----|
| § 15.1 | 集成加速度表·····                          | 288 |
| § 15.2 | 电子产品振动试验用的超小型加速度表·····               | 292 |
| § 15.3 | $10^5 \sim 10^{10}g$ 的压电加速度和速度表····· | 298 |
| § 15.4 | 气炮检测用的压电加速度表·····                    | 300 |

## 第三编 压电晶体陀螺等其它力敏传感器

## 第十六章 压电晶体角速度和角加速度传感器·····310

|        |             |     |
|--------|-------------|-----|
| § 16.1 | 背景·····     | 310 |
| § 16.2 | 工作原理·····   | 316 |
| § 16.3 | 驱动电路·····   | 318 |
| § 16.4 | 读出电路·····   | 319 |
| § 16.5 | 结构·····     | 322 |
| § 16.6 | 设计·····     | 323 |
| § 16.7 | 性能·····     | 325 |
| § 16.8 | 质量鉴定试验····· | 335 |

## 第十七章 压电晶体压力传感器·····337

|        |                           |     |
|--------|---------------------------|-----|
| § 17.1 | 电压输出式压力传感器·····           | 337 |
| § 17.2 | 电压输出式压电硬币传感器·····         | 339 |
| § 17.3 | 汽车点火和检测冲击的电压输出式压力传感器····· | 342 |
| § 17.4 | 电压输出式高温加速度表和压力传感器·····    | 347 |
| § 17.5 | 频率输出式压力传感器·····           | 350 |
| § 17.6 | 频率输出式声表面波压力传感器·····       | 352 |

|         |                  |     |
|---------|------------------|-----|
| 第十八章    | 在医疗技术中应用的压电力敏传感器 | 360 |
| § 18.1  | 检测啮力的压电传感器       | 360 |
| § 18.2  | 胎儿心音传感器          | 362 |
| § 18.3  | 宫收缩监视传感器         | 365 |
| § 18.4  | 压电血压传感器          | 365 |
| § 18.5  | 腰带式小儿呼吸监视器       | 371 |
| § 18.6  | 插入式压电陶瓷助听器       | 372 |
| § 18.7  | 听诊器              | 373 |
| § 18.8  | 肺音检测装置           | 375 |
| § 18.9  | 压电鞋              | 376 |
| § 18.10 | 测量小生物心脏跳动的压电传感器  | 378 |
| 第十九章    | 分析烟雾剂质量浓度的压电微量天平 | 386 |
| § 19.1  | 工作原理             | 386 |
| § 19.2  | 沉淀器的设计           | 391 |
| § 19.3  | 压电微量天平的设计        | 392 |
| § 19.4  | 浓度直读装置           | 394 |
| § 19.5  | 性能试验             | 394 |
| § 19.6  | 应用               | 403 |
| 第二十章    | 检测宇宙微尘碰撞的压电动量传感器 | 405 |
| § 20.1  | 动量传感器            | 405 |
| § 20.2  | 传感器设计的考虑         | 414 |
| § 20.3  | 测量和试验结果          | 417 |
| § 20.4  | 机械和电噪声           | 423 |



# 第一章 绪 论

## § 1.1 概 述

在科研、工业、农业、水产、通风系统和公害等各个方面，都需要把检测的非电量信息转换成电量才便于放大、运算、传送、记录和显示。完成这种转换的主要器件是以固体元件为主的电子传感器。如果把各种测量系统比做一个人，那么各种机械结构则相当于人的手足，微处理器等信息处理装置便相当于人的脑，而传感器就相当于人的五官。要传感器动作才能带动整个系统，良好的传感器才能使微处理器很好地发挥作用。

七、八年前人们就很重视传感器的研究，我国成立了传感器研究所。近二、三年来掀起了一股传感器热，传感器被列为八十年代第一位值得重视的技术<sup>[1,2]</sup>。至今由不同材料、效应、结构和工艺研制成功了湿敏、气敏、热敏、声敏、色敏、力敏……等种类繁多的传感器<sup>[3,4]</sup>。其中压电传感器在民用和军用方面具有特别重要的意义。表 1—1 给出目前各种压电传感器。

表 1—1 压 电 传 感 器

| 传感器<br>类 型 | 生物功能 | 转 换 | 用 途   | 压 电 材 料                                                                   |
|------------|------|-----|-------|---------------------------------------------------------------------------|
| 热 敏        | 接触传感 | 热→电 | 温 度 计 | BaTiO <sub>3</sub> , PZT, TGS,<br>LiTaO <sub>3</sub> , PbTiO <sub>3</sub> |

续 前

| 传感器类型 | 生物功能 | 转 换        | 用 途                                     | 压 电 材 料                                      |
|-------|------|------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------|
| 力 敏   | 接触传感 | 力→电        | 微音器,应变仪,声纳,拾音器,气体点火器,血压计,压电陀螺,加速度和压力传感器 | 石英,罗思盐, $ZnO$ , $BaTiO_3$ , PZT, PMS, 电致伸缩材料 |
| 光 敏   | 视觉传感 | 光→电        | 热电红外探测器                                 | $LiTaO_3$ , $PbTiO_3$                        |
| 声 敏   | 听觉传感 | 声→电<br>声→压 | 振动器,微音器,超声探测器,助听器                       | 石英,压电陶瓷                                      |
|       |      | 声→光        | 声光效应                                    | $PbMoO_4$ , $PbTiO_3$ , $LiNbO_3$            |

压电传感器中应用最多的是力敏传感器,而力敏传感器中应用最多又最有价值的是压电惯性器件——压电晶体陀螺和压电晶体加速度表<sup>[1~10]</sup>。前者作者已有专著<sup>[5~7]</sup>,本书仅论述压电晶体加速度表。

## § 1.2 压电晶体加速度表

压电晶体加速度表分压电振动加速度表、压电冲击加速度表、压电角加速度表和压电线性加速度表四种。前两种利用正压电效应的原理构成,后两种利用正压电效应和逆压电效应的原理构成。其中压电振动加速度表结构简单、成本低、使用方便,已大量生产,在各个技术领域获得了广泛应用。压电线性加速度表的研制遇到了许多难于解决的技术问题,如零位不稳定等,但由于它具有重大应用价值,因此 20 多年来美、英、日等国作了大量的研究工作,虽然发展缓慢,但研究工作从未间断过。近年来由于新技术的发展,测量低频低幅值加速度的要求在精度和数量方

面都在急剧增加。例如建筑、桥梁、发射塔、火箭等，需要较好的重力因子和较少的负载材料；复杂而灵敏的部件要求不同系统间的机械作用相互隔离；我们的生活环境与桥梁毁坏、电梯倒塌和多种灾难有关，所有这些都需要精密的低频振动和加速度的环境信息。从而大大促进了压电线性加速度表的发展<sup>[8]</sup>。

压电线性加速度表主要用于航空与航天技术中测量飞行器<sup>32</sup>和导弹纵向、法向和横向的加速度。加速度信息送入计算机运算和处理即可确定导弹的命中精度，因此它是惯性制导控制系统中的心脏部件。50年代初期，各国开始研制了种类繁多的线性加速度表，但至今广泛应用的还只是建立在机械摆和陀螺原理基础上的液浮和气浮两大类。如美国“民兵”Ⅰ洲际弹道导弹用的是摆式积分陀螺加速度表的改型，地—地导弹采用气浮摆式加速度表。其精度都没有超过 $10^{-5}g$ 。这些传统加速度表有可动部份，虽可获得较高的精度和灵敏度，但体积大、成本高、制作困难、使用不便、可靠性差。人们最熟悉的电容、电阻或电压式加速度表，即在加速度作用下加速度表的电容、电阻或电压发生变化。这些加速度表因加速度产生的相对变化及其相对灵敏度的检测方法受到限制，故加速度表的灵敏度和精度上不去。

压电晶体线性加速度表消除了转动部份，实现了固体化，因此操作简便、结构简单牢固可靠、体积小、重量轻、成本低、线性度好、灵敏度高(达 $10^{-8}g$ )、易大量生产、校准容易、适于遥测、使用方便。其寿命长，可靠性高，能承受大过载 $g$ 。直接数字输出的压电晶体线性加速度表易于和计算机配合，这对导航系统有利。这种加速度表的信息高度稳定，能直接发送给遥远的接收机，不存在功率转换、接线及其它机电问题。压电数字线性加速度表按其结构特点可分为音叉式、悬臂梁式、圆片式、双晶片式、振弦式、振梁式、振带式……等多种型式，本书较详细地论述了它们的原理、结构和性能。

### § 1.3 压电体上力与电压和电荷的关系

石英或压电陶瓷受力即产生应变，在其表面上出现跟外力成比例的电荷，并可测出电压。表 1—2 给出压电晶体加速度表中常用的长方形压电陶瓷在两个相对面上镀电极并极化后，力与电荷和电压关系的三种情况。陶瓷的应力  $T_i$  与电极每单位面积的电量  $Q$  可用下式表示：

$$\frac{Q}{T_i} = d_{ij} \quad [\text{库仑/牛顿}] \quad (1-1)$$

式中  $d_{ij}$  为压电应变常数 ( $d$  常数)，脚标  $i, j$  表示压电陶瓷的应变方向与电轴的关系。平行于电轴方向的外力  $F$  与所产生的电量  $Q_{TE}$  的关系可用下式表示：

$$Q_{TE} = d_{33}F \quad (1-2)$$

当外力垂直于电轴方向时，电极面积为  $lW$  和沿力方向的截面积为  $Wt$  的压电体所产生的电荷

$$Q_{LE} = d_{31} \frac{l}{t} F \quad (1-3)$$

当外力偏离于与电轴平行的面时，所产生的电荷

$$Q_{TS} = d_{15}F \quad (1-4)$$

平行于电轴方向的介电常数为  $\epsilon_{33}$ ，电极间的静电容

$$C = \epsilon_{33} \frac{lW}{t} [\text{法}] \quad (1-5)$$

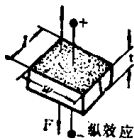
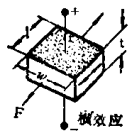
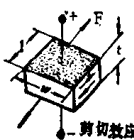
根据电荷  $Q$  和电极间的电压  $V$  之间的关系： $Q = CV$ ，以及压电应变常数  $d$  和压电电压常数  $g$  之间的关系： $d_{ij} = g_{mj} \epsilon_{im}^T$ ，由式 (1—2)、(1—3) 和 (1—4) 求出各电极间的电压分别为：

$$\frac{Q_{TE}}{C} = V_{TE} = g_{33} \frac{t}{lW} F \quad (1-6)$$

$$\frac{Q_{LE}}{C} = V_{LE} = g_{31} \frac{1}{W} F \quad (1-7)$$

$$\frac{Q_{TS}}{C} = V_{TS} = g_{15} \frac{t}{lW} F \quad (1-8)$$

表 1—2 应变方向与压电常数的关系

|                                                                                    | 发生应变的方向         | 压电应变常数               |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|
|   | 厚度扩张<br>(简称 TE) | $d_{33}$<br>$g_{33}$ |
|   | 长度扩张<br>(简称 LE) | $d_{31}$<br>$g_{31}$ |
|  | 厚度切变<br>(简称 TS) | $d_{15}$<br>$g_{15}$ |

## § 1.4 压电双晶片

压电双晶片是将两块压电片粘合在一起，两片的极化方向相反，如图 1-1 所示。这样构成的双晶片具有强压电效应，而驱动

后能产生几毫米的位移。双晶片已广泛用于医疗、电声、通讯、宇航……等技术领域，特别是各种压电晶体加速度表几乎全部用双晶片（石英或陶瓷）。下面论述双晶片的准静态（约 100Hz）特性。

#### 1.4.1 双晶片的准静态应变<sup>[9]</sup>

由压电学可知，压电陶瓷两维双晶片的能量：

轴对称的弹性应变能量密度

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{Y_{11}} T_{XX}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{Y_{33}} T_{ZZ}^2 + 2 \frac{1}{Y_{31}} T_{XX} T_{ZZ} + \frac{1}{2} \frac{1}{Y_{55}} T_{XZ}^2$$

无应力时各向同性介质的能量密度

$$= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 (E_X^2 + E_Z^2)$$

压电互作用的能量密度

$$= d_{15} T_{XZ} E_X + d_{33} T_{ZZ} E_Z + d_{31} T_{XX} E_Z$$

由电场  $E$  和极化强度  $P$  定义电位移  $D = \epsilon_0 E + P$ ，在材料内部和边界上， $V \cdot D = 0$ 。由静电学得分量  $D_i = \frac{\partial}{\partial E_i}$ （总储能密度），因此正压电效应为

$$\left. \begin{aligned} P_X &= (\epsilon_{11} - 1) E_X + d_{15} T_{XZ} \\ P_Z &= (\epsilon_{33} - 1) \epsilon_0 E_Z + d_{31} T_{XX} + d_{33} T_{ZZ} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

在应力  $T_{ij}$  作用下材料发生形变，点  $r$  移动到  $r + u(r)$ 。通常

$$u_{,h} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_h} + \frac{\partial u_h}{\partial X_j} \right)$$

的应变张量由  $S_{jh} = \frac{\partial}{\partial T_{jh}}$ （总能量密度）得到，由逆压电效应表示为

$$u_{XX} = Y_{11}^{-1} T_{XX} + Y_{31}^{-1} T_{ZZ} + d_{31} E_Z$$

$$u_{ZZ} = \frac{1}{2} Y_{31}^{-1} T_{XX} + Y_{33}^{-1} T_{ZZ} + d_{33} E_Z$$

$$u_{XZ} = Y_{55}^{-1} T_{XZ} + d_{15} E_X$$

上述理论的前提条件是：（1）假设两种材料完全弹性和均匀。实际情况是极化对波传播有影响，相当于弹性变硬，极化显著不均匀。克服电滞的功使温度稍升高，引起金属和陶瓷的不同膨胀。在弯曲效应中，温度变化 5°C 约相当于 100V 电压的效果；（2）假设

界面附着良好,金属和陶瓷无相对位移并且电接触良好;(3)二维模型忽略了 $Y$ 方向的应力和应变。实际情况是夹持避免了局部应变,但双晶片在夹持端受力不均匀;(4)假定压电体中的实际平均电场在 $Z$ 方向,并仅考虑电场的线性效应,忽略了二次和高次效应。在这些前提条件下作下面的理论分析。

没有形变的双晶片如图 1-1 所示。取  $XY$  平面为无形变面(即参考面),形变发生在  $XZ$  平面内。假定整个双晶片在  $Y$  方向均匀,在压电片表面加电压,设该电压在  $XZ$  平面产生内电场  $E$ ,且  $E_z \gg E_x$ 。该电场对双晶片应力和应变的影响,使整个双晶片弹性位移为  $U_x(X, Z)$  和  $U_z(X, Z)$ 。由外加静电电压确定这些位移的常用近似法是考虑双晶片的平衡态,故假定表面力为零,整个双晶片满足  $T_{xz} = T_{zz} = 0$ 。

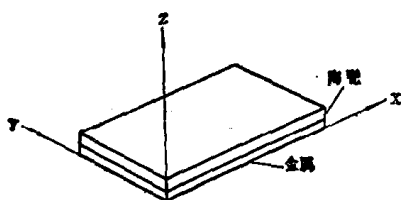


图1-1 压电双晶片

由于压电应力使未应变( $Z=0$ 平面)的双晶片交界面形变成圆柱表面, $Z=0$ 的平面位移小,并且变化慢。该表面的位移分量

$$U_x^{(1)}(X, 0) = \xi(X)$$

$$U_z^{(1)}(X, 0) = \zeta(X)$$

式中函数  $\xi(X)$  和  $\zeta(X)$  由平衡条件求出。

内部位移  $U_x(X, Z)$ 、 $U_z(X, Z)$  和  $\xi$ 、 $\zeta$  差别不大,且随  $Z$  增加,因  $T_{xz} = 0$  (取  $E_x = 0$ ), 故  $U_{xz} = 0$ , 运用边界条件<sup>[9]</sup>, 线性项为

$$U_X(X, Z) = \xi - Z \frac{d\xi}{dx}$$

$$U_Z(X, Z) = \zeta$$

这种关系只适用于  $Z > 0$  的压电区域和  $Z < 0$  的弹性板。Z 的一阶表达式为

$$U_{XX} = \frac{d\xi}{dx} - Z \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

双晶片的应变能量  $F$  (单位宽度) 可以表示为  $U_{XX}$  在压电片和金属片上的积分。金属片的厚度为  $h'$ , 杨氏模量为  $Y_{11}'$ 。对于长为  $l$  的双晶片,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} Y_{11} \int_0^l dx \int_0^h dZ U_{XX}^2 + \frac{1}{2} Y'_{11} \int_0^l dx \int_0^{h'} dz U_{XX}^2 \\ &= \int_0^l \left[ \frac{1}{2} a \left( \frac{d^2\zeta}{dx^2} \right)^2 + C \frac{d^2\zeta}{dx^2} \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{2} b \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

式中  $a = \frac{1}{3} (h^3 Y + h'^3 Y')$ ,  $b = Yh + Y'h'$ ,  $C = \frac{1}{2} Y'h'^2 - \frac{1}{2} Yh^2$ 。

而  $Y$  和  $Y'$  代表  $Y_{11}$  和  $Y'_{11}$ 。Y 方向之应变根据前提条件(3)而略去。

除应变能  $F$  外, 还有压电能

$$I = \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^l dx d_{31} E_Z T_{XX} \quad (\text{单位宽度})$$

将  $U_{XX}$  代入  $I$ , 然后积分得

$$I = -d_{31} Y \int_0^l dx E_Z \left( h \frac{d\xi}{dx} - \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2} \right)$$

近似地认为位移很小, 或双晶片微弯曲时, 在静平衡态中应变  $\xi'$  (正或负值) 及曲率  $\zeta''$  为常量。双晶片单位面积的总能量  $F + I$  (不包括介电能) 为

$$\frac{1}{2} a \zeta''^2 + C \zeta'' \xi' + \frac{1}{2} b \xi'^2 - h d_{31} Y E_Z \left( \xi' - \frac{1}{2} h \zeta'' \right)$$

$C \xi' \zeta''$  项表示两块晶片粘合在一起产生的耦合能量。



求  $F+I$  相对于独立形变参数  $\xi'$ ,  $\xi''$  的极小值得

$$a\xi'' + C\xi' = -\frac{1}{2}h^2d_{31}YE_Z$$

$$C\xi'' + b\xi' = +hd_{31}YE_Z$$

故平衡时的弯曲和延伸为

$$\xi'' = -\frac{\frac{1}{2}hb + C}{ab - C^2}hd_{31}YE_Z$$

$$\xi' = +\frac{\frac{1}{2}hC + a}{ab - C^2}hd_{31}YE_Z$$

容易确定一些极限情况：(1)若压电片厚度减为零，即  $h \rightarrow 0$ ，则  $\xi''$  和  $\xi'$  都趋于零，即无弯曲和延伸，(2)若弹性片厚度  $h' \rightarrow 0$ ，则  $\frac{1}{2}hb + C \rightarrow 0$ ，及  $\xi'' \rightarrow 0$ ，而  $\xi'$  为有限值，即弱弹性约束不产生弯曲，并且压电效应仅延伸双晶片；(3)对固定的  $h, h'$ ，若  $Y'/Y \rightarrow \infty$ ，则  $\xi''$ 、 $\xi' \rightarrow 0$ ，即厚（或硬）的弹性片产生的完全约束限制了弯曲和延伸形变的产生，而压电片只产生应力。

形变  $\xi'$ 、 $\xi''$  通常是上述极限情况的折衷。很明显，适当选取  $h$  和  $h'$  值，对于给定弹性常数  $Y, Y'$ ，能得到  $\xi''$  的最大值。

代入  $a, b, c$  值，即可得双晶片的自由端相对于中性态（未变形态）的实际弹性位移  $\Delta X$  和  $\Delta Z$ ：

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \xi' l = X(r, k) \left( \frac{l}{h} \right) d_{31} V \\ \Delta Z &= \frac{1}{2} \xi'' l^2 = Z(r, k) \left( \frac{l}{h} \right)^2 d_{31} V \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中  $r = \frac{h'}{h}$ ， $K = \frac{Y'}{Y}$ ，无量纲系数  $X(r, k)$  和  $Z(r, k)$  为

$$X(r, k) = \frac{1 + kr^2(4r + 3)}{1 + k^2r^4 + 2k(2r + 3r^2 + 2r^3)}$$

$$Z(r, k) = \frac{3kr(1 + r)}{1 + k^2r^4 + 2k(2r + 3r^2 + 2r^3)}$$