初中数学解题方法

代数（四）

金耀先　程志国　主编

气　象　出　版　社

前　言

为了帮助高、初中学生、自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们编写了这套《中学数学解题方法》。

本套书每章均有“基础知识”、“解题方法”、“习题”和“解答”四部分，重点是“解题方法”。本套书围绕各类问题的典型方法精选了有代表性的例题，例后的“注”中有对方法的解释与总结。本套书所介绍的方法以教材为基础，但又高于教材、深于教材，旨在巩固知识，深化思维，拓宽思路。各章所列方法既有一般方法，又有技巧性的方法，以期使读者在总结规律的基础上锤炼解题技艺，每章后面的习题均与方法呼应，起到巩固作用。

本书由王复兴、岳正山、赵建勋编写，金耀先、程志国主编。

由于我们水平有限，不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

1989 年 8 月

目　　录

第十三章 常用对数

基础知识

一、对数

1. 对数的概念

(1)定义 设 $a>0$，$a\neq 1$，如果 $a^b=N$，那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数．记作 $\log_a N=b$，这里，b 叫做对数的底数（简称底），N 叫做真数．

(2)对数式与指数式及其关系 在对数的定义中，有两个等式 $a^b=N$ 和 $\log_a N=b$，前者称为指数式，后者称为对数式．它们所表示的 a、b、N 三个数之间的关系是相同的，只是表达形式不同．在底数 $a>0$，$a\neq 1$ 的条件下，指数式和对数式可以互化．

(3)对数恒等式 若将指数式 $a^b=N$ 中的 b 用 $\log_a N$ 代替，便得到等式 $a^{\log_a N}=N$，我们把这个等式叫做对数恒等式．

注：在对数的定义中，规定 $a>0$，$a\neq 1$ 的条件，要结合有理指数幂中对于底数 a 的限制来考虑．假若允许 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$，则当真数取某些正数值时，其对数是无意义的（不存在或不能唯一确定）．例如，$\log_{(-2)}8$、$\log_0 5$、$\log_1 3$ 等不存在，$\log_1 1$、$\log_0 0$ 则不能唯一确定，因此，都是没有意义的．

2. 对数的性质

(1)零和负数没有对数，即真数必须是正数；

(2)底数的对数等于1，即$\log_a a=1$；

(3)1的对数等于0，即$\log_a 1=0$；

3. 对数的运算法则

设M、N都是正数，且$a>0$，$a\neq 1$，则

(1)$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；

(2)$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3)$\log_a M^n=n\log_a M$；

(4)$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$．($n$为正整数)

以上法则给出了积、商、幂、方根的对数的求法。利用这些运算法则，可以将乘、除运算转化为加、减运算；将乘方、开方运算转化为乘、除运算。

二、常用对数

1. 定义　以10为底的对数叫做常用对数，正数N的常用对数$\log_{10}N$简记作$\lg N$。

一个正数的常用对数，无论它是正值还是负值，通常都写作一个整数与一个正的纯小数或零两部分之和的形式，它们分别叫做这个数的常用对数的首数和尾数。

2. 性质　由常用对数定义可知，常用对数是以10为底的特殊对数。因此，一般对数的所有性质，常用对数都具备。除此之外，常用对数还有如下特殊性质：

(1)10的整数次幂的对数是一个整数，就等于这个幂的指数。例如，$\lg 10=1$，$\lg 100=2$，$\lg 1=0$，$\lg 0.1=-1$，这是对数的首数，其尾数是零。

（2）不是10的整数次幂的正数，它的对数可以写成一个整数（正整数、零、负整数）加上一个正的纯小数的形式。这两部分分别是这正数的常用对数的首数和尾数。

（3）真数较大时，它的对数也较大。

4. 常用对数的求法　求一个正数的常用对数，可按如下步骤进行：

（1）将真数N用科学记数法表示为$N=a\times10^n$，的形式（其中$1\leqslant a<10$，n为整数）。

（2）确定首数　在等式$N=a\times10^n$中，整数n就是N的常用对数的首数（当$1\leqslant N<10$时，$a=N$，$n=0$）。实际上直接观察N的位数，就可以得出它的常用对数的首数。其规律是：当真数大于或等于10时，首数等于真数的整数位数减去1；当真数大于或等于1而小于10时，其首数等于零；当真数大于零而小于1时，其首数是一个负数，它的绝对值等于真数中从左起第一个有效数字前面的零的个数（包括小数点前面的那个零）。

（3）求尾数　查常用对数表求等式$N=a\times10^n$中a的对数$\lg a$，所查得的数就是正数N的常用对数的尾数。因为$1\leqslant a<10$，所以对数尾数所在的范围是$0\leqslant\lg a<1$。

例如：$\lg6.295=0.7990$，

$$\lg629.5=\lg(6.295\times10^2)=2.7990,$$

$$\lg0.006295=\lg(6.295\times10^{-3})$$

$$=-3+0.7990=\bar{3}.7990.$$

根据中学数学用表，常用对数的尾数，一般由真数的前四位有效数字决定。如果给出的真数有效数字多于四位，可通过四舍五入的方法变为四位有效数字，然后再求其对数。

5. 常用对数的应用 常用对数计算简便，使用方便，一般说某个数的对数就是指它的常用对数。对于已知的正数，可以由“常用对数表”查出这个数的对数；知道一个数的对数，可以由“反对数表”查出这个数。利用“常用对数表”和“反对数表”以及积、商、幂、方根的运算法则，可以较为简捷地计算乘、除、乘方、开方的计算及解答中须要做这些运算且数字计算比较繁难的应用题。

解题方法

一、对数式的变形及有关计算

1. 应用定义法 根据对数的定义，对数式$\log_a N=b$和指数式$a^b=N$所表示的三个数a、b、N之间的关系是相同的，据此我们可以将对数式转化成为指数式，从而求出式中的未知数。

例1 求下列各式中x的值：

(1)$\log_5 x=-2$； (2)$\log_{0.5}\sqrt{8}=x$；

(3)$\log_{\sqrt{3}} x=-\frac{2}{3}$； (4) $\log_x(\sqrt{5}-1)=-1$.

解：(1)由$\log_5 x=-2$，得$5^{-2}=x$，

$\therefore x=\frac{1}{5^2}$，即$x=\frac{1}{25}$.

(2)由$\log_{0.5}\sqrt{8}=x$，得$0.5^x=\sqrt{8}$，

即$\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{\frac{3}{2}}$，$\therefore 2^{-x}=2^{\frac{3}{2}}$，$x=-\frac{3}{2}$.

(3)由已知，得$(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}=x$，$\therefore x=\dfrac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}}$，

即$x=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$.

(4)由已知，得$x^{-1}=\sqrt{5}-1$，$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$，

即$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

注：求对数式中的未知数x的问题，可以分成三种情况：①x在对数式中是真数，此时变为指数式后x是幂，再按幂指数的运算法则计算即可求得x，如例1的(1)、(3)；②x在对数式中是对数，则变为指数式后x是指数，再把等式两边变为同底数幂的形式，然后根据同底数幂相等则指数相等的道理，即可求得x的值，如例1(2)；③x在对数式中是底数，这时变为指数式后仍为底数，再设法把等式两边变为指数相同的幂的形式，根据指数的性质，两边的底数也相等，从而可求得x，如例1(4)。

例2　求下列各式的值：

(1)$\log_8 512$；　　(2)$\log_3\dfrac{1}{81}$；

(3)$\log_{\frac{1}{2}}32$；　　(4)$\log_{\sqrt{2}}2$.

解：(1)设$\log_8 512=x$，则$8^x=512$，
而$512=8^3$，$\therefore 8^x=8^3$，$x=3$，即$\log_8 512=3$.

(2) 设$\log_3\dfrac{1}{81}=x$，则$3^x=\dfrac{1}{81}=3^{-4}$，

$\therefore x=-4$，即$\log_3\frac{1}{81}=-4$。

（3）设$\log_{\frac{1}{2}}32=x$，则$\left(\frac{1}{2}\right)^x=32$，

即$2^{-x}=2^5$，$\therefore x=-5$，即$\log_{\frac{1}{2}}32=-5$。

（4）设 $\log_{\sqrt{2}}2=x$，则$(\sqrt{2})^x=2$，

即$2^{\frac{x}{2}}=2$，　$\therefore$　$\frac{x}{2}=1$，$x=2$，即$\log_{\sqrt{2}}2=2$，

注：本例中的各题，实际上都属于上例中的情况②，即求对数式的“对数”。只是为了便于表达，解题时首先设原对数式的值为x。

例3　已知$\log_{(2x^2-1)}(3x^2+2x-1)=1$，求$x$。

解：$\because \log_{(2x^2-1)}(3x^2+2x-1)=1$，

$\therefore (2x^2-1)^1=3x^2+2x-1$，

即$x^2+2x=0$，

解此方程，得$x=0$或$x=-2$。

因为当$x=0$时，已知条件的等式中，对数的底和真数都是负数，故应舍去，所以，$x=-2$。

2．应用对数恒等式解题

例4　求下列各式的值：

（1）$\sqrt{5^{\log_5 100}}$；　　（2）$(0.3^{\log_{0.3}25})^2$；

（3）$4^{\log_2 5}\times 3^{\log_{\sqrt{3}}2}$；（4）$4^{\log_{16}25}\times 3^{\log_{27}8}$。

解：（1）原式$=\sqrt{100}=10$。

（2）原式$=25^2=625$。

(3)原式$=2^{2\log_2 5}\times(\sqrt{3})^{2\log_{\sqrt{3}}2}$

$=2^{\log_2 5^2}\times(\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}}4}$

$=25\times 4$

$=100$。

(4)原式$=16^{\frac{1}{2}\log_{16}25}\times 27^{\frac{1}{3}\log_{27}8}$

$=16^{\log_{16}5}\times 27^{\log_{27}2}$

$=5\times 2=10$。

例5 试将下列各数改写成以2为底的幂的形式：(1)5； (2)$\sqrt[3]{6}$。

解：(1)$5=2^{\log_2 5}$。

(2)$\sqrt[3]{6}=2^{\log_2\sqrt[3]{6}}$。

3. 应用对数的运算法则解题

例6 已知$\log_2 x=\log_2 a+\log_2 b-\frac{1}{3}\log_2 c$，求$x$。

解：$\log_2 x=\log_2 ab-\log_2\sqrt[3]{C}=\log_2\frac{ab}{\sqrt[3]{C}}$，

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{\sqrt[3]{C}}=\frac{ab}{C}\sqrt[3]{C^2}.$$

例7 设$\log_5 2=a$，$\log_5 3=b$，$\log_5 7=c$，试用a、b、c表示$\log_5 504$。

解：$\log_5 504=\log_5(2^3\times 3^2\times 7)$

$=\log_5 2^3+\log_5 3^2+\log_5 7$

$=3\log_5 2+2\log_5 3+\log_5 7$

$=3a+2b+c.$

例 8 试用$\log_a x$、$\log_a y$、$\log_a z$表示下列各式：

(1) $\log_a x^5y^6$；　　(2) $\log_a \frac{\sqrt{xy}}{z^2}$；

(3) $\log_a \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{z}}$；　　(4) $\log_a \frac{z^3\sqrt[3]{y}}{x^5}$。

解：(1) $\log_a x^5y^6=\log_a x^5+\log_a y^6$

$$=5\log_a x+6\log_a y.$$

(2) $\log_a \frac{\sqrt{xy}}{z^2}=\log_a\sqrt{xy}-\log_a z^2$

$$=\frac{1}{2}\log_a xy-2\log_a z$$

$$=\frac{1}{2}\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-2\log_a z$$

(3) $\log_a \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{z}}=\log_a(y\sqrt{x})-\log_a\sqrt{z}$

$$=\frac{1}{2}\log_a x+\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z.$$

(4) $\log_a \frac{z^3\sqrt[3]{y}}{x^5}=\log_a(z^3\sqrt[3]{y})-\log_a x^5$

$$=3\log_a z+\frac{1}{3}\log_a y-5\log_a x.$$

例 9 计算：

(1) $\log_3 \sqrt[8]{243}$；(2) $\log_2(4^7 \times 8^5)$；

(3) $\log_a[(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2]$；

(4) $\log_{100}(\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$.

解：(1) $\log_3 \sqrt[8]{243} = \frac{1}{8}\log_3 243 = \frac{1}{8}\log_3 3^5$

$$= \frac{5}{8}.$$

(2) $\log_2(4^7 \times 8^5) = \log_2 4^7 + \log_2 8^5$

$$= \log_2 2^{14} + \log_2 2^{15}$$
$$= 14 + 15$$
$$= 29.$$

(3) $\log_a[(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2]$

$= \log_a[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^2$

$= \log_a 1 = 0$.

(4) $\log_{100}(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$= \log_{100}[(\sqrt{3+\sqrt{5}})^2 + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

$+ (\sqrt{3-\sqrt{5}})^2]$

$= \log_{100}(3+\sqrt{5}+2\sqrt{4}+3-\sqrt{5})$

$= \log_{100} 10 = \log_{100} 100^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

例10 已知$\sqrt{\log_2(x-y)-3}+[\log_3(x+y)-2]^2 = 0$，

求$\log_6\frac{x^2-y^2}{2}$的值。

解：$\because\sqrt{\log_2(x-y)-3}+[\log_3(x+y)-2]^2=0$，

$\therefore\log_2(x-y)-3=0$，$\log_3(x+y)-2=0$，

即$x-y=2^3=8$，$x+y=3^2=9$，

$$\therefore\log_6\frac{x^2-y^2}{2}=\log_6\frac{(x+y)(x-y)}{2}$$

$$=\log_6\frac{9\times 8}{2}$$

$$=\log_6 36=2\log_6 6=2.$$

习 题 一

1. 判断下列各等式正误（正确的打"√"号，错误的打"×"号）：

(1) $\log_a(b-c)=\frac{\log_a b}{\log_a c}$； (　　)

(2) $(\log_a 2)^3=3\log_a 2$； (　　)

(3) $\sqrt{\log_3 2}=\frac{1}{2}\log_3 2$； (　　)

(4) $\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b$. (　　)

2. x为何值时，下列各式才有意义？

(1) $\log_3 x^2$；　　(2) $\log_2\sqrt{1-2x}$；

（3）$\log_{\sqrt{x-1}}3$；　　（4）$\dfrac{1}{\log_2(x-3)-5}$.

3．求下列各式中 x 的值：

（1）$32^{-x}=8$；　　（2）$\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{25}$；

（3）$\log_{0.5}4=x$；　　（4）$\log_x\sqrt{8}=\dfrac{3}{4}$；

（5）$\log_{0.01}x=-1$；　　（6）$\log_{\sqrt{8}}x=-3$；

（7）$\log_x2=2$；　　（8）$\log_x\sqrt{3}=-\dfrac{1}{2}$；

（9）$\log_{0.5}128=x$；　　（10）$\log_x0.0001=\dfrac{4}{3}$.

4．计算：

（1）$100^{\log_{10}9}-\log_{10}2$；　　（2）$31-\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{9}$；

（3）$\log_a\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$；　　（4）$\log_{0.2}0.0016$；

（5）$\log_6\dfrac{9}{2}+\log_68-\log_6\dfrac{1}{6}$；

（6）$\log_510-\log_5\dfrac{2}{\sqrt{5}}$；

（7）$3^{2-\log_310}+\log_2\sqrt[10]{2}$

（8）$\log_{\sqrt{3}}3\sqrt{3}+\log_{\sqrt{2}}4\sqrt{2}$；

5. 已知$\log_{\sqrt{x^2-2}}(2x^2-3x-6)=2$，求$x$的值。

6. 若$|\log_2(x-y)-3|+[\log_{\sqrt{10}}(x+y)-2]^2=0$，

求$\log_3\frac{y}{x}$的值。

7. 求下列各式中x的值：

(1)$\log_5 x=2+2\log_5 2$；

(2)$\log_3 x^2=2\log_3(1-x)$；

(3)$\log_2(\log_3 x)=2$；

(4)$\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}ab\right)=\log_2 a+\log_2 b-\frac{1}{3}\log_2 x$；

8. 求$\log_5\sqrt[3]{25}\times\log_2[4^{\frac{1}{2}\log_2 3}\times(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}$

$-5^{\log_{\sqrt{5}}2}]$

$+\log_{0.5}32$的值。

9. 设方程$x^2-\sqrt{10}x+2=0$的两个根为α、β，

求$\log_4\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\beta}$的值。

10. 证明：$\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$.

二、常用对数的计算及有关式子的变形

1. 统一形式法　即把含对数式的等式两边各化成为一个对数式。

例11　求下列各式中的x：

(1)$\lg x=2+\lg 2$，

(2) $\lg x+\lg 1.6-\frac{1}{2}\lg 64=3$；

(3) $\lg x+\lg 16-\lg 4=1+\lg 2+\lg 3$；

(4) $\frac{\lg x+\lg 30}{\lg 25+2\lg 2}=\lg 3+\lg 5$.

解：(1) $\because \lg x=2+\lg 2$,

$\therefore \lg x=\lg 100+\lg 2$，即 $\lg x=\lg 200$.

$\therefore x=200$.

(2) $\lg 1.6x-\lg 64^{\frac{1}{2}}=\lg 1000$,

$\therefore \quad \lg\frac{1.6x}{8}=\lg 1000$,

$1.6x=1000\times 8$,

$x=5000$.

(3) $\lg\frac{16x}{4}=\lg(10\times 2\times 3)$

$\therefore \frac{16x}{4}=60$,

$x=15$.

(4) $\frac{\lg 30x}{\lg(25\times 2^2)}=\lg 15$,

$\lg 30x=\lg 15\times\lg 100$,

$\lg 30x=2\lg 15$,

$\lg 30x=\lg 225$,

$30x=225$,