现代数学基础丛书

# 代数体函数与常微分方程

何育赞 萧修治 著

科学出版社

1988

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了亚纯函数、代数体函数 Nevanlinna 理论和整函数 Wiman-Valiron 理论，以及它们与复域的常微分方程理论相结合的基本内容和若干新研究. 本书可供大学数学系高年级学生、研究生、数学和其他科技工作者阅读和参考.

现代数学基础丛书

代数体函数与常微分方程

何育赞　萧修治　著

责任编辑　张晓凌　夏墨英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988年2月第一版　开本：850×1168　1/32

1988年2月第一次印刷　印张：9 3/4

印数：0001—3,850　字数：255 000

ISBN 7-03-000149-4/O · 44

定价：2.80 元

# 目　　录

# 第一章 Wiman-Valiron 理论

整函数是整个复平面 C 内的全纯函数. 根据 Weierstrass 的观点, 一个这样的函数能表为全平面内收敛的幂级数 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 它在全平面代表此函数而无须进行解析开拓. 若此幂级数仅具有限多项, 则 $w(z)$ 为一多项式; 若有无穷多项, 则 $w(z)$ 称为超越整函数. 本章我们主要从整函数的幂级数表示式出发, 概述整函数的若干基本性质, 着重论述 Wiman-Valiron 理论, 后者描述整函数 $w(z)$ 在其达到最大模的点附近的性质. 此理论在复域的常微分方程研究中具有重要的作用.

## §1.1 最大模

设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为一整函数, 令 $M(r,w)=\operatorname*{Max}_{|z|\leqslant r}\{|w(z)|\}$ 表示 $w(z)$ 在闭圆 $\overline{D}_r=\{z,|z|\leqslant r\}$ 上的最大模. 由于 $|w(z)|$ 在 $\overline{D}_r$ 上连续, 因此必在 $\overline{D}_r$ 的某些点处达到最大值. 最大模原理进一步断言: 这些点必在圆周 $\partial D_r=\{z,|z|=r\}$ 上, 即 $M(r,w)=\operatorname*{Max}_{|z|=r}\{|w(z)|\}$. 最大模原理能由全纯函数实现的映照的几何性质得到直接的说明, 亦能用分析的方法加以证明. 由最大模原理立即导出 $M(r,w)$ 是 $r$ 的增函数, 并且容易得出 $M(r,w)$ 是 $r$ 的连续函数. J. Hadamard[1] 更进一步指出, $\log M(r,w)$ 是 $\log r$ 的凸函数. 这一结果被称为 Hadamard 三圆定理, 叙述如下:

**定理 1.1** 设 $w(z)(\neq 0)$ 在 $|z|<R$ 内全纯, 则对于 $0<r_1<r<r_2<R$ 有

$$\log M(r, w) \leqslant \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1, w)$$

$$+ \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2, w). \tag{1.1.1}$$

**证明** 设 $p$, $q$ 为两整数,且 $q > 0$. 令

$$h(z) = z^p \{w(z)\}^q.$$

此时,$h(z)$ 在 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ 上全纯. 由最大模原理,

$$\operatorname*{Max}_{|z|=r}\{|h(z)|\} \leqslant \operatorname{Max}\{\operatorname*{Max}_{|z|=r_1}\{|h(z)|\}, \operatorname*{Max}_{|z|=r_2}\{|h(z)|\}\}.$$

由此

$$r^p\{M(r, w)\}^q \leqslant \operatorname{Max}\{r_1^p[M(r_1, w)]^q, r_2^p[M(r_2, w)]^q\}.$$

令

$$\alpha = \frac{\log M(r_2, w) - \log M(r_1, w)}{\log r_1 - \log r_2}.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$,可选取 $p$ 和 $q$, 使得

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1},$$

即有

$$\frac{p}{q} \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1} + \alpha,$$

$$-\frac{p}{q} \leqslant \frac{\varepsilon}{\log r_2 - \log r_1} - \alpha.$$

如果 $\operatorname*{Max}_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2}\{|h(z)|\} = r_1^p\{M(r_1, w)\}^q$,则有

$$\log M(r, w) \leqslant -\frac{p}{q}(\log r - \log r_1) + \log M(r_1, w)$$

$$\leqslant \log M(r_1, w) \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} + \log M(r_2, w)$$

$$\times \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + \varepsilon.$$

如果 $\operatorname*{Max}_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2}\{|h(z)|\} = r_2^p\{M(r_2, w)\}^q$, 则同样可证明上式成立.

令 $\varepsilon \to 0$ 即得所要求的不等式 (1.1.1).

**定理 1.2** 设 $P(z)=\sum_{n=0}^{p} a_n z^n$ 是 $p$ 次多项式，则有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,P)}{r^p}=|a_p|; \tag{1.1.2}$$

反之，对任一整函数 $w(z)$，若存在 $q\geqslant 0$，使得

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{M(r,w)}{r^q}=a<\infty, \tag{1.1.3}$$

则 $w(z)$ 必为次数不大于 $q$ 的多项式。

**证明** 首先，有

$$|P(z)|=|z|^p|\{a_p+R_p(z)\}|,$$

其中 $R_p(z)=\sum_{n=0}^{p-1}a_n z^{n-p}$。于是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $r_0$，使得当 $|z|=r\geqslant r_0$ 时，有

$$|R_p(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{p-1}|a_n|r^{n-p}<\varepsilon.$$

因此，当 $r\geqslant r_0$ 时，有

$$|a_p|-\varepsilon<\frac{M(r,P)}{r^p}<|a_p|+\varepsilon,$$

由此即得 (1.1.2)。

其次，若 (1.1.3) 成立，则存在 $r_j\to\infty$，使得

$$\frac{M(r_j,w)}{r_j^q}<a+1.$$

由 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的系数的表式 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{w(z)dz}{z^{n+1}}$，立即得到 Cauchy 不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r,w)}{r^n}, \tag{1.1.4}$$

于是有

$$|a_n|<(a+1)r_j^{q-n}.$$

令 $j\to\infty$，便导出当 $n>q$ 时，有 $a_n=0$。命题证毕。

**推论** 若 $w(z)$ 为超越整函数，则对任意 $q>0$，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,w)}{r^q}=\infty.$$

众所周知,一解析函数 $w(z)=u(z)+iv(z)$ 本质上为其实部 $u(z)$ (或虚部 $v(z)$) 所确定. 故由 Schwarz 公式

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta+iv(0),\ \zeta=Re^{i\theta}$$

立即可得 $M(r,w)$ 的估计, 它能由 $u(\zeta)$ 在 $|\zeta|=R(>r)$ 上的最大模和 $|w(0)|$ 所界囿. 下面的定理将给出较精细的结果.

设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为非常数整函数,$A(r,w)=\max\limits_{|z|\leqslant r}\{u(z)\}$. 由于 $M(r,e^{w(z)})=e^{A(r,w)}$ 是 $r$ 的严格增函数, 因此 $A(r,w)$ 也是 $r$ 的严格增函数. 我们有

**定理 1.3** (**Hadamard-Borel-Carathéodory**) 设 $w(z)$ 为非常数整函数,则对于 $0\leqslant r<R$,有

$$M(r,w)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R,w)+\frac{R+r}{R-r}|w(0)|,\qquad(1.1.5)$$

并且对所有 $n$, 有

$$|a_n|r^n\leqslant\operatorname{Max}\{4A(r,w),0\}-2\operatorname{Re}w(0).\qquad(1.1.6)$$

**证明** 令 $a_n=\alpha_n+i\beta_n, z=re^{i\theta}$,则

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 收敛, 故上述级数一致收敛. 分别乘上式两边以 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 并逐项积分便得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_nr^n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\cos n\theta d\theta,\\ \beta_nr^n&=\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta,\end{aligned}\right\}\quad n\geqslant 1$$

和

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta.$$

于是当 $n \geqslant 1$ 时，有

$$|a_n| r^n = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta.$$

因此

$$|a_n| r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{|u(re^{i\theta})| + u(re^{i\theta})\}d\theta. \quad (1.1.7)$$

现分两种情形加以讨论．若 $A(r,w) \leqslant 0$，则

$$|u(re^{i\theta})| + u(re^{i\theta}) = 0,$$

由 (1.1.7) 即得 (1.1.6)；若 $A(r,w) > 0$，则 (1.1.7) 成为

$$|a_n| r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r,w)d\theta = 4A(r,w),$$

由此亦得 (1.1.6)。

下面证明 (1.1.5)。若 $w(0) = 0$，从而 $A(0,w) = 0$．注意到 $A(r,w)$ 是 $r$ 的严格增函数，因此当 $R > 0$ 时，$A(R,w) > 0$，于是由 (1.1.7) 可得

$$|a_n| \leqslant \frac{2A(R,w)}{R^n}, \quad (1.1.8)$$

由此得

$$M(r,w) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant 2A(R,w)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{2r}{R-r} A(R,w).$$

今若 $w(0) \neq 0$，则应用上式于 $w(z) - w(0)$ 便得

$$|w(z) - w(0)| \leqslant \frac{2r}{R-r} \operatorname*{Max}_{|\zeta|\leqslant R}\{\mathrm{Re}(w(\zeta) - w(0))\}$$

$$= \frac{2r}{R-r} A(R,w) - \frac{2r}{R-r}\mathrm{Re}w(0).$$

注意到 $-\mathrm{Re}w(0) \leqslant |w(0)|$，即得 (1.1.5)。

应用 (1.1.8)，类似于定理 1.2 的证明可得

**推论** 设 $w(z)$ 为一整函数，若存在 $q \geqslant 0$ 使得

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{A(r,w)}{r^q} = a < \infty,$$

则 $w(z)$ 为次数不大于 $q$ 的多项式.

## §1.2 增长级和收敛指数

增长性是函数的基本性质之一,它是函数的一个大范围性质,许多其它的性质都与它有关. 本节我们将讨论整函数增长级的概念. 首先对一般实函数给出如下的定义:

**定义 1.1** 设 $s(r)$ 是定义于正实轴 $R^+$ 上的非负增函数,则

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}$$

和

$$\lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}$$

分别称为 $s(r)$ 的级和下级. 若 $0 < \rho < +\infty$, 则称 $s(r)$ 为有穷正级;若 $\rho = 0$ 和 $\rho = \infty$,则分别称为零级和无穷级.

**定义 1.2** 若 $s(r)$ 为有穷正级 $\rho$,则

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{s(r)}{r^\rho}$$

称为型. 并区分为下列的型类: 1° 若 $\sigma = \infty$, 则称 $s(r)$ 为 $\rho$ 级最大型;2° 若 $0 < \sigma < \infty$,则称为中型;3° 若 $\sigma = 0$, 则称为最小型;4° 若积分 $\int_{r_0}^{\infty} \frac{s(r)dr}{r^\rho}$ 收敛(或发散), 则称为收敛类(或发散类).

**例** 设 $s(r) = r^\rho(\log r)^\mu$,其中 $0 \leqslant \rho < \infty$, $\mu < \infty$. 由定义可知 $s(r)$ 为 $\rho$ 级. 并且, 当 $\mu > 0$ 时为最大型, $\mu = 0$ 时为中型, $\mu < 0$ 时为最小型, $-1 \leqslant \mu < 0$ 时为发散类, $\mu < -1$ 时为收敛类.

**定义 1.3** 整函数 $w(z)$ 的增长级 $\rho$ (或简称级) 和下级 $\lambda$ 定义为

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r, w)}{\log r} \text{ 和}$$

$$\lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r, w)}{\log r}.$$

若 $0<\rho<\infty$,则其型定义为

$$\sigma=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r,w)}{r^{\rho}}.$$

下面的定理表明整函数的级能由其 Taylor 展式的系数来确定.

**定理 1.4 (Lindelöf, Pringsheim)** 设 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为 $\rho$ 级整函数,则有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log\dfrac{1}{|a_n|}}=\rho. \tag{1.2.1}$$

**证明** 令上式左端极限为 $\hat{\rho}$,我们先证明 $\hat{\rho}\leqslant\rho$. 不妨设 $0<\hat{\rho}\leqslant\infty$,并任取 $\varepsilon$ 合于 $0<\varepsilon<\hat{\rho}$,继而当 $\hat{\rho}<\infty$ 时,命 $k=\hat{\rho}-\varepsilon$;当 $\hat{\rho}=\infty$ 时,命 $k=1/\varepsilon$. 则由上极限定义存在无穷多个 $n_j$,使得

$$n_j\log n_j\geqslant k\log\frac{1}{|a_{n_j}|}.$$

根据 Cauchy 不等式;对于这些 $n_j$ 和所有 $r$

$$\log M(r,w)\geqslant\log|a_{n_j}|+n_j\log r\geqslant n_j\left(\log r-\frac{\log n_j}{k}\right).$$

我们取 $r_j=(en_j)^{\frac{1}{k}}$,则对无穷多个 $\{r_j\}$ 有

$$\log M(r_j,w)\geqslant r_j^k/ke,$$

于是

$$\rho\geqslant\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\log\log M(r_j,w)}{\log r_j}\geqslant k.$$

令 $\varepsilon\to0$,即得 $\rho\geqslant\hat{\rho}$.

下面将指出 $\rho\leqslant\hat{\rho}$. 不妨设 $\hat{\rho}<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$0\leqslant\frac{n\log n}{\log\dfrac{1}{|a_n|}}<\hat{\rho}+\varepsilon.$$

因此,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$|a_n| \leqslant n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}}.$$

然则当 $r \geqslant r_0 \geqslant 1$ 时，

$$M(r, w) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| r^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n$$

$$\leqslant c_1 r^{n_0-1} + \left(\sum_{n_0 \leqslant n < m(r)} + \sum_{m(r) \leqslant n}\right) n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n$$

$$= c_1 r^{n_0-1} + I_1 + I_2,$$

其中 $m(r) = (2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}$. 现进一步估计 $I_1$ 和 $I_2$.

$$I_1 = \sum_{n_0 \leqslant n < m(r)} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n \leqslant r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} = c_2 r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}},$$

其中 $c_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} < +\infty$. 在 $I_2$ 中，由于 $r \leqslant \frac{1}{2} n^{\frac{1}{\hat{\rho}+\varepsilon}}$，故有

$$I_2 = \sum_{n \geqslant m(r)} n^{-\frac{n}{\hat{\rho}+\varepsilon}} r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

综上各式便得当 $r \geqslant r_1$ 时

$$M(r, w) \leqslant c_1 r^{n_0-1} + c_2 r^{(2r)^{\hat{\rho}+\varepsilon}} + 2 \leqslant r^{r^{\hat{\rho}+2\varepsilon}},$$

由此 $\rho \leqslant \hat{\rho} + 2\varepsilon$，再令 $\varepsilon \to 0$，即有 $\rho \leqslant \hat{\rho}$.

O. P. Juneja[1] 指出，整函数的下级 $\lambda$ 亦能通过 Taylor 级数的系数来确定. 他证明，若设 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是下级为 $\lambda$ 的整函数，则有

$$\lambda = \operatorname*{Max}_{\{n_j\}} \varliminf_{j \to \infty} \frac{n_j \log n_j}{\log \frac{1}{|a_{n_j}|}}.$$

整函数的型亦能通过 Taylor 展式的系数来表示.

**定理 1.5（Lindelöf, Pringshein 定理）** 设 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是有穷正级整函数，其级为 $\rho$ 型为 $\sigma$，则有

$$e\rho\sigma = \varlimsup_{n \to \infty} \left(n |a_n|^{\frac{\rho}{n}}\right). \tag{1.2.2}$$

**证明** 设上式右端极限为 $l$. 先证明 $l \geqslant e\rho\sigma$. 不妨设 $l <$

$+\infty$. 由定义,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0$,当 $n\geqslant n_0$ 时

$$n|a_n|^{\frac{\rho}{n}}<l+\varepsilon,$$

从而

$$|a_n|<\left(\frac{l+\varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

因此,当 $r\geqslant r_0$ 时

$$\begin{aligned}M(r,w)&\leqslant\left(\sum_{n=0}^{n_0-1}+\sum_{n\geqslant n_0}\right)|a_n|r^n\leqslant c_1r^{n_0-1}\\&+\sum_{n\geqslant n_0}\left(\frac{l+\varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}r^n=c_1r^{n_0-1}\\&+\left(\sum_{n\leqslant(l+2\varepsilon)r^\rho}+\sum_{n>(l+2\varepsilon)r^\rho}\right)\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}}\\&=c_1r^{n_0-1}+I_1+I_2.\end{aligned}$$

现分别估计 $I_1$ 和 $I_2$. 由于 $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{b}}$ 在 $x=a/e$ 时达最大值,因此 $I_1$ 中各求和项之值不超过当 $n=(l+\varepsilon)r^\rho/e$ 时的值,即

$$\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}}\leqslant\exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}.$$

但 $I_1$ 至多有 $(l+2\varepsilon)r^\rho$ 项,因此

$$I_1\leqslant(l+2\varepsilon)r^\rho\exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}.$$

对于 $I_2$,注意到 $n>(l+2\varepsilon)r^\rho$,便得

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{n>(l+2\varepsilon)r^\rho}\left(\frac{l+\varepsilon}{n}r^\rho\right)^{\frac{n}{\rho}}\\&<\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\left(\frac{l+\varepsilon}{l+2\varepsilon}\right)^{n/\rho}=\frac{1}{1-\left(\frac{l+\varepsilon}{l+2\varepsilon}\right)^{1/\rho}}=c_2.\end{aligned}$$

综上各式得到,当 $r$ 足够大时,

$$M(r,w)\leqslant c_1r^{n_0-1}+(l+2\varepsilon)r^\rho\exp\left\{\frac{(l+\varepsilon)r^\rho}{e\rho}\right\}$$

$$+c_2 < \exp\left(\frac{l+2\varepsilon}{e\rho} r^\rho\right),$$

于是

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r, w)}{r^\rho} \leqslant \frac{l+2\varepsilon}{e\rho}.$$

令 $\varepsilon \to 0$,即得 $l \geqslant e\rho\sigma$.

今再证明 $l \leqslant e\rho\sigma$. 不妨设 $l > 0$. 对任意给定的 $\varepsilon$ 合于 $0 < \varepsilon < l$ 者,有无穷多个 $n_j$ 使得

$$n_j |a_{n_j}|^{\frac{\rho}{n_j}} > l - \varepsilon, \quad 或 \quad |a_{n_j}| > \left(\frac{l-\varepsilon}{n_j}\right)^{\frac{n_j}{\rho}}.$$

由 Cauchy 不等式

$$M(r, w) \geqslant |a_{n_j}| r^{n_j} > \left(\frac{l-\varepsilon}{n_j} r^\rho\right)^{\frac{n_j}{\rho}}.$$

特别地取 $r_j^\rho = \dfrac{n_j e}{l-\varepsilon}$,即得

$$M(r_j, w) > \exp\left\{\frac{(l-\varepsilon) r_j^\rho}{e\rho}\right\},$$

从而有

$$\sigma \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\log M(r_j, w)}{r_j^\rho} \geqslant \frac{l-\varepsilon}{e\rho}.$$

令 $\varepsilon \to 0$,便得 $l \leqslant e\rho\sigma$.

借助于上面的定理我们可以构造具有任意级和型的整函数.

**例 1°** 整函数 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} z^n$ 的级 $\rho = \frac{1}{2}$,型 $\sigma = 2$.

**例 2°** $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n z^n$ 的级 $\rho = 1$,型 $\sigma = \infty$.

**例 3°** 对于 $\rho > 0$, $w(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \log n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$ 的级为 $\rho$, 型 $\sigma = 0$.

**定义 1.4** 设 $w(z)$ 为一整函数,令 $\{r_n\}$ 表示 $w(z)$ 的 $a$ 值点的模序列且按非减次序排列者,则

$$\lambda_w(a) = \inf \left\{\alpha > 0, 使得 \sum_n \frac{1}{r_n^{\alpha}} < \infty\right\} \tag{1.2.3}$$

称为 $w(z)$ 的 $a$ 值点收敛指数，或简记为 $\lambda(a)$.

**定理 1.6** 设 $w(z)$ 为有穷级整函数，其级为 $\rho < \infty$，则对任意 $a \in \mathbf{C}$，有 $\lambda(a) \leqslant \rho$.

**证明** 不妨设 $w(0) \neq a$. 我们先证明以下 Jensen 公式

$$\int_0^r \frac{n(t, a)dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(re^{i\theta}) - a|d\theta - \log|w(0) - a|, \tag{1.2.4}$$

其中 $n(t, a)$ 表示圆 $|z| < t$ 内 $w(z)$ 的 $a$ 值点个数，且每一值点按其重级计算. 事实上，令 $\{a_k\}$ 表示 $w(z) - a$ 的零点，置

$$w_r(z) - a = \prod_{|a_k|<r} \frac{r(z - a_k)}{r^2 - \bar{a}_k z},$$

此时 $w_r(z) - a$ 和 $w(z) - a$ 在 $|z| < r$ 内有相同的零点，且当 $|z| = r$ 时，$|w_r(z) - a| = 1$. 于是若设 $|z| = r$ 上无 $w(z) - a$ 的零点，则 $W(z) = \dfrac{w(z) - a}{w_r(z) - a}$ 在 $|z| \leqslant r$ 上全纯且无零点，因而 $\log|W(z)|$ 在 $|z| \leqslant r$ 上调和. 应用调和函数的中值公式便得

$$\log|W(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|W(re^{i\theta})|d\theta.$$

注意到 $W(z)$ 的定义，上式可写为

$$\sum_{|a_k|<r} \log\frac{r}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(re^{i\theta}) - a|d\theta - \log|w(0) - a|.$$

由 $n(t, a)$ 的定义并计及 $n(0, a) = 0$，应用分部积分于上式左端有

$$\sum_{|a_k|<r} \log\frac{r}{|a_k|} = \int_0^r \log\frac{r}{t}\, d(n(t, a)) = \int_0^r \frac{n(t, a)}{t}\, dt,$$

由此即得 (1.2.4).

由 (1.2.4) 我们有

$$n(r,a)\log 2 = n(r,a)\int_r^{2r}\frac{dt}{t} \leqslant \int_r^{2r}\frac{n(t,a)dt}{t}$$

$$\leqslant \int_0^{2r}\frac{n(t,a)dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(2re^{i\theta})-a|d\theta$$

$$-\log|w(0)-a| \leqslant \log M(2r,w)+c.$$

由假设 $w(z)$ 之级为 $\rho$，因此对任意 $\varepsilon>0$，存在正数 $r_0$，当 $r\geqslant r_0$ 时

$$\log M(2r,w)<(2r)^{\rho+\varepsilon},$$

从而存在 $c_1$ 使得当 $r\geqslant r_0$ 时

$$n(r,a)\leqslant c_1 r^{\rho+\varepsilon}.$$

特别地，如 $n\geqslant n_0$ 时有 $r_n\geqslant r_0$，则

$$n(r_n,a)\leqslant c_1 r_n^{\rho+\varepsilon}.$$

不妨设 $\lambda(a)>0$，则对任意 $\varepsilon_1>0$ 合于 $\varepsilon_1<\lambda(a)$ 者

$$\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\lambda(a)-\varepsilon_1}\leqslant c_2\{n(r_n,a)\}^{-\frac{\lambda(a)-\varepsilon_1}{\rho+\varepsilon}},$$

更有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\lambda(a)-\varepsilon_1}=\left(\sum_{n=1}^{n_0-1}+\sum_{n\geqslant n_0}\right)\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\lambda(a)-\varepsilon_1}$$

$$\leqslant c_0+c_2\sum_{n\geqslant n_0}n^{-\frac{\lambda(a)-\varepsilon_1}{\varepsilon+\rho}}.$$

按照 $\lambda(a)$ 的定义，上式左端级数发散，因此右端级数亦然，这就导出必须 $\dfrac{\lambda(a)-\varepsilon_1}{\rho+\varepsilon}\leqslant 1$。令 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon$ 趋于零便得 $\lambda(a)\leqslant\rho$。

**定理 1.7** 设 $w(z)$ 为有穷级整函数，若其级 $\rho$ 为非整数，则 $\lambda(0)=\rho$。

**证明** 设 $w(z)$ 的零点为 $\{z_n\}$，由 Hadamard-Borel 定理，$w(z)$ 可表为

$$w(z)=e^{P(z)}z^m\prod(z),$$

其中 $P(z)$ 为多项式，其次数 $\deg P(z)\leqslant\rho$，$\prod(z)$ 是一整函数

$$\prod(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right\},$$

其中 $P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)=\sum_{k=1}^{g}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k$，$g$ 是使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{g+1}}<+\infty$ 的最小整数。$\prod(z)$ 亦称为格为 $g$ 的 Weierstrass 典型乘积，其级记为 $\hat{\rho}$。由假设 $\rho$ 为非整数，而 $e^{P(z)}$ 之级为 $\deg P(z)$，故 $\rho=\mathrm{Max}\{\deg P(z),\hat{\rho}\}=\hat{\rho}$。因此，只须证明 $\lambda(0)=\hat{\rho}$。由定理 1.6，$\lambda(0)\leqslant\hat{\rho}$，故只需证明 $\hat{\rho}\leqslant\lambda(0)$。

设 $\alpha>1$，则对于 $|z|\leqslant\frac{1}{\alpha}|z_n|$，有

$$\begin{aligned}\left|\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|&=\left|\exp\left\{-\sum_{k=g+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right\}\right|\\&\leqslant\exp\left(\sum_{k=g+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k\right)\leqslant\exp\left\{\left|\frac{z}{z_n}\right|^{g+1}\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\cdots\right)\right\}\\&\leqslant\exp\left\{\frac{1}{\alpha-1}\left|\alpha\frac{z}{z_n}\right|^{g+1}\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{\alpha-1}\left|\alpha\frac{z}{z_n}\right|^{\lambda'}\right\},\end{aligned}$$

其中 $\lambda'$ 是任一不超过 $g+1$ 的数。

对于 $|z|>\frac{1}{\alpha}|z_n|$，则有

$$\begin{aligned}\left|\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|&\leqslant\left(1+\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)\\&\times\exp\left\{\frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^g\right\}\leqslant\exp\left\{c_0\left(\alpha\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^{\lambda''}\right\},\end{aligned}$$

其中 $c_0>1$，$\lambda''$ 为任一不小于 $g$ 的数。

综上两式便得，对任意的 $\left|\frac{z}{z_n}\right|$ 和任意的 $\lambda$ 合于 $g\leqslant\lambda\leqslant g+1$ 者下式成立

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp P_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\leqslant\exp\left\{c_1\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\lambda}\right\}.\qquad(1.2.5)$$

下面，我们选取适当的 $\lambda$ 以保证 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|z_n|}\right)^{\lambda}<\infty$。因此，当