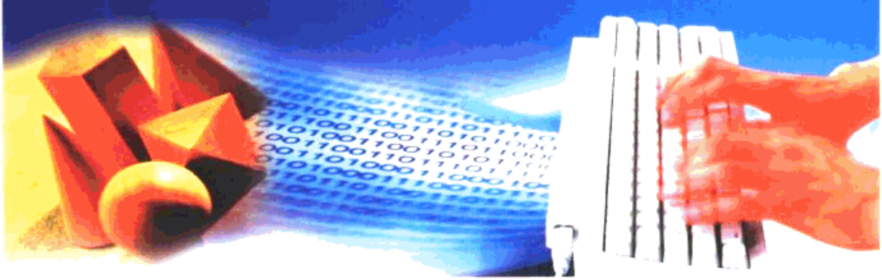
北京海淀区特高级教师联合编写

海淀星级题大参考



依据新大纲 与教材同步

预习 复习 练习 应试 成功四步

基本题 重点题 提高题 题题经典

高二数学

吉林教育出版社

再 版 说 明

国家教委下发的《关于推进素质教育调整中小学教育教学内容，加强教学过程管理的意见》，要求各级教研部门、学校和广大教师要把优化教学过程作为现阶段教学改革的重点，努力减轻学生过重课业负担，认真提高教学质量。而优化教学过程最根本的是引导学生积极主动参与学习过程，学会学习，使他们成为真正的学习主体，学校和教师要为他们提供更多的获取信息、分析、讨论、利用信息，解决问题的机会。本书就是遵照这一原则修订的。

一、这套书在加强基础知识、基本技能的同时，加强学生自主学习能力的培养，重视智力的开发。它以教师为学生提供信息的形式，帮助学生在课前预习和课后复习中，理解和掌握教材的重点和难点，跟上教师的教学思路，启发学生的思维，提高自主学习的能力，培养良好的素质。

二、本书不仅给学生传授知识，更重要的是通过对典型题的解析、提示，使学生能够举一反三，熟悉各种类型题，提高解决问题的能力。这也符合“是给学生金子，还是给学生点金术”的素质教育的基本精神。

三、把所有习题分为一星级基本题、二星级重点题、三星级提高题，是本书特色。为减轻学生过重的课业负担，学生可以选做习题，有能力的同学可以选做三星级，一般掌握二星级就可以了。这使各层次的同学都有所收获。

为了保证本套书的编写质量，我们邀请了北京海淀区教师进修学校、中国科大附中、北大附中、人大附中、清华附中、师大二附中、北京实验中学、101 中学等在教学第一线的教研员、学科带头人、特高级教师编写了这套书。他们是王佩侠、王建民、范仲平、张英贞、杜友明、陈玉凤、张鸿菊、张主、崔平、刘春燕等。本套书不设总主编，而由这些著名教师分任各学科分册主编，他们将对各学科分册的编写质量负责。编写大纲经编委会讨论通过后，由各分册主编具体实施。

目 录

上篇 代数

下篇　解析几何

上篇 代数

第五章 不等式

不等式是许多数学分支的重要基础，我们已经知道在求函数的定义域，研究其增减性、研究方程根的性质时，不等式所起的作用．在进一步的高等数学学习中，不等式也将起很大的作用．数学家闵嗣鹤教授曾经说过："不等式是数学分析里最深的一块基石．"

本章将系统地研究不等式的性质，并通过这些基本性质建立起不等式证明的基础理论．应用这些理论对数学各个章节有关部分进行深一步的探讨．

在前一阶段，我们已经学过了一次不等式及一元二次不等式的基本解法，将分式不等式、无理不等式、指数不等式、对数不等式、绝对值不等式等……转化成基本不等式予以解决，是本章的另一个内容．

对不等式的学习，可以深刻地体会数学思想方法在实际解题中作用．提高分析问题和解决问题的能力．

第一单元 不等式的性质与解法

预习·复习重点指导

1．不等式一章有哪些重要内容？

本章内容主要包括以下四部分：不等式性质、不等式解法、不等式的证明和应用．

2．不等式的性质有什么作用？

不等式的性质是解不等式和证明不等式的重要依据. 解不等式和证明不等式时出现的错误多数是错用和随意杜撰不等式的性质造成的.

3. 学习不等式的性质应注意什么问题?

第一要注意条件与结论之间是否可逆, 第二要注意推出的条件是否全具备. 如两个同向不等式可以相乘必须具备的条件是它们全是正数.

4. 应掌握哪些不等式的解法?

主要有有理不等式、无理不等式、指对不等式和绝对值不等式, 而有理不等式主要包括: 一元一次、一元二次不等式, 某些高次不等式和分式不等式.

5. 解不等式时应注意哪些问题?

在解答不等式时应注意所使用的变形是否为同解变形, 即变形前后的不等式解集相同. 一般来讲, 解不等式时忌讳不加分析地用平方、开方、取(去)对数等这样的变形方法.

6. 本章学习中应注意对哪些数学思想方法的体会和掌握?

重要的有以下两种: 分类讨论的思想和等价非等价转化的思想.

练习·答疑难点引导

一、典型题解析、提示

★1. 以下推理正确的是 ( )

A. $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$ B. $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

C. $a > b > 0$, $c > d > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ D. $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

解: 选 B.

★2. a、$b \in R$, 下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ B. 若 $|a| > b$, 则 $a^2 > b^2$

C. 若 $a > |b|$, 则 $a^2 > b^2$ D. 若 $a > b$, $c > d$, 则 $a - c > b - d$.

解: 选 C.

★★3. 如果 x、$y \in R$, 且 $xy < 0$, 在下列各式中, 一定成立的是

( )

A. $|x+y|>|x|$　　　　B. $|x+y|<|x|$

C. $|x+y|<|x|-|y|$　　　　D. $|x+y|>|x|-|y|$

分析：因为所选式对任意 x、$y\in R$，且 $xy<0$ 都成立，当 $x=2$、$y=-1$ 时也应成立，分别代入验证，知只有 B 正确，故选 B.

另解：由绝对值不等式的性质 $||x|-|y||\leqslant|x+y|$ 可知，当 $xy<0$ 时取等号. 因此

$|x+y|=||x|-|y||<|x|$.

∴　B 正确

★★4. 不等式 $\frac{|a+b|}{|a|+|b|}$ 成立的充要条件是　　　　(　　)

A. $a<1$，$b<0$　B. $a>0$，$b>0$　C. $ab\neq0$　D. a，b 是任意实数

解：当 $ab\neq0$ 时，$\frac{|a+b|}{|a|+|b|}\leqslant1\Leftrightarrow|a+b|\leqslant|a|+|b|$

故选 C.

★5. 下列不等式同解的是　　　　(　　)

A. $3x>\frac{6x}{2x+1}$ 与 $\frac{x}{2x+1}<1$　　　　B. $(x+1)^2>2$ 与 $x>\sqrt{2}-1$

C. $\frac{x+2}{x-1}>1$ 与 $x+2>x-1$　　　　D. $\frac{x+2}{1-x}>0$ 与 $(x+2)(x-1)>0$

解：选 D

★★6. 解关于 x 的不等式

$ax+1>x+a^2$

解：原不等式即 $(a-1)x>a^2-1$

当 $a>1$ 时，$x>a+1$

当 $a<1$ 时，$x<a+1$

当 $a=1$ 时，$x\in\varnothing$

★7. 解关于 x 的不等式：

(1) $x^2-7x+12>0$

(2) $x^2<121$

(3) $12x<9x^2+4$

解：(1) 不等式解集为 $\{x|x<3$ 或 $x>4\}$

(2) 不等式的解集为 $x\in(-11,11)$

(3) 原不等式即 $9x^2-12x+4>0\Leftrightarrow(3x-2)^2>0$

$\therefore\ x\neq\dfrac{2}{3}$

因此，原不等式的解为 $\{x\mid x\neq\dfrac{2}{3},\ x\in R\}$

★★8. 解关于 x 的不等式

(1) $x^2-ax+4>0$

(2) $x^2-2x+m<0$

解： (1) 当 $a>4$ 或 $a<-4$ 时 $\Delta=a^2-16>0$，这时 $x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{2}$ 或 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{2}$；

当 $-4<a<4$ 时，$\Delta=a^2-16<0$，这时 $x\in R$

当 $a=\pm4$ 时，$\Delta=a^2-16=0$，这时 $x\neq\dfrac{a}{2}$

因此，当 $a<-4$ 或 $a>4$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{2}$ 或 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{2}\}$；当 $-4<a<4$ 时，不等式的解集为 R；当 $a=\pm4$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x\neq\dfrac{a}{2}\}$

(2) 当 $m<1$ 时，不等式的解集为 $x\in(1-\sqrt{1-m},\ 1+\sqrt{1-m})$；

当 $m>1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$；

当 $m=1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$

综上，当 $m<1$ 时，不等式解集为 $(1-\sqrt{1-m},\ 1+\sqrt{1-m})$，当 $m\geqslant1$ 时，不等式解集为 $\varnothing$.

★★9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+5x+6>0$ 的解集为 $(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$，求关于 x 的不等式 $x^2-ax+b<0$ 的解集.

解：$x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$ 应是方程 $ax^2+5x+b=0$ 的两个实根，由韦达定理，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{5}{a}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a=-6 \\ b=-1. \end{cases}$$

因此不等式 $x^2-ax+b<0$ 即 $x^2+6x-1<0$

其解集为 $x\in(-3-\sqrt{10},\ 3+\sqrt{10})$.

★★10. 已知不等式 $ax^2+(a-1)x+a-1<0$ 对所有实数 x 都成立，求 a 的取值范围.

解：由题意，得

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta=(a-1)^2-4a(a-1)<0 \end{cases}$$

解得 $a<-\dfrac{1}{3}$.

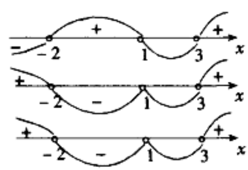
因此 a 的取值范围为 $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

★11. 解关于 x 的不等式：

(1) $(x-1)(x+2)(x-3)>0$

(2) $(x-1)^2(x+2)(x-3)>0$

(3) $|x-1|(x+2)(x-3)\geqslant 0$.



解：(1) 不等式的解集为

$x\in(-2,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$

(2) 不等式的解集为

$x\in(-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty)$

(3) 不等式的解集为

$\{x\mid x\leqslant -2 \text{ 或 } x=1 \text{ 或 } x\geqslant 3\}$

注：(1) 高次不等式的解法是先分解因式，然后利用“穿线法”求解；(2) 当某一因式为偶次方或带有绝对值符号时，线不穿过 x 轴.

★★12. 解下列不等式

(1) $\dfrac{2-4x}{x^2-3x+2}\geqslant 0$ (2) $\dfrac{x^2+5x+1}{3+2x-x^2}>1$ (3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}\leqslant\dfrac{3}{x+2}$

解：(1) 原不等式同解于

$$\begin{cases}(1-2x)(x-1)(x-2)\geqslant 0\\(x-1)(x-2)\neq 0\end{cases}$$

解得 $x>2$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$

因此，原不等式的解集为 $x\in[\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$.

(2) 原不等式移项通分，得 $\frac{2x^2+3x-2}{3+2x-x^2}>0$

$\Leftrightarrow(2x^2+3x-2)(x^2-2x-3)<0$

$\Leftrightarrow(2x-1)(x+2)(x-3)(x+1)<0$

解得 $-2<x<-1$ 或 $\frac{1}{2}<x<3$.

因此，原不等式的解集为 $x\in(-2,-1)\cup(\frac{1}{2},3)$

(3) 原不等式移项并通分，得 $\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\geqslant 0\\(x+1)(x+2)(x+3)\neq 0\end{cases}$$

$\therefore$ $x<-3$ 或 $-2<x<-1$ 或 $x\geqslant 1$.

原不等式的解集为 $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup[1,+\infty)$

注：分式不等式的同解原理为

(1) $\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$

(2) $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0\\g(x)\neq 0\end{cases}$

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}>a\Leftrightarrow\frac{f(x)-ag(x)}{g(x)}>0$

解分式不等式时应按同解原理去作，不要盲目地去分母，除非你知道分母的正负或用讨论分母正负的方法去作.

★★13. 解关于 x 的不等式 $\frac{x^2+x-2a}{1-x}<-a$

解：原不等式同解于 $\frac{x^2+x-2a+a-ax}{1-x}<0$

即 $\dfrac{x^2-(a-1)x-a}{x-1}>0 \Leftrightarrow (x-a)(x-1)(x+1)>0$

当 $a\geqslant 1$ 时，$-1<x<1$ 或 $x>a$；

当 $-1\leqslant a<1$ 时，$-1<x<a$ 或 $x>1$；

当 $a<-1$ 时，$a<x<-1$ 或 $x>1$.

注：本题是利用分类讨论的思想来求解的．分类讨论的思维过程是：

1．确定讨论对象及讨论范围，如本题的讨论对象为 a，讨论范围为实数集.

2．对讨论范围分类，这一步的关键是界点的选取，如本题为确定最后的解集必须比较 -1、1 和 a 的大小，因此把 ± 1 选为两个界点，这两点把实数集划分为三部分.

3．对每一种情况进行讨论，即分类讨论.

4．总结讨论结果.

★★14．若 $a>0$，$b>0$，求不等式

$a>\dfrac{1}{x}>-b$ 的解集.

解法一：$\because\ a>0$，$b>0$，$\therefore\ \dfrac{1}{a}>0$，$-\dfrac{1}{b}<0$　$\therefore\ a>\dfrac{1}{x}>-b$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}>-b\\ \dfrac{1}{x}<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{bx+1}{x}>0\\ \dfrac{ax-1}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(bx+1)>0\\ x(ax-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\text{ 或 }x<-\dfrac{1}{b}\\ x<0\text{ 或 }x>\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

$\therefore\ x<-\dfrac{1}{b}$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$.

因此，原不等式解集为 $\{x\mid x<-\dfrac{1}{b}$ 或 $x>\dfrac{1}{a}\}$.

解法二：当 $x>0$ 时，原不等式同解于

$\dfrac{1}{x}<a\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{a}$（$\because\ a>0$）

当 $x<0$ 时，原不等式即 $\dfrac{1}{x}>-b\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{b}$（$\because\ -b<0$）.

因此，原不等式的解集为 $\{x\mid x>\dfrac{1}{a}$ 或 $x<-\dfrac{1}{b}\}$.

★★15．解下列不等式：

(1) $|2x-3|<2$ (2) $|x^2-\frac{1}{2}|\geqslant 2x$ (3) $|2x-5|-|4x+7|>0$

解：(1) $|2x-3|<2\Leftrightarrow -2<2x-3<2\Leftrightarrow 1<2x<5\Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$.

不等式的解集为 $x\in(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

(2) $|x^2-\frac{1}{2}|\geqslant 2x$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{2}\geqslant 2x$ 或 $x^2-\frac{1}{2}\leqslant -2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x-\frac{1}{2}\geqslant 0$ 或 $x^2+2x-\frac{1}{2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x\leqslant\frac{2-\sqrt{6}}{2}$或 $x\geqslant\frac{2+\sqrt{6}}{2}$或$\frac{-2-\sqrt{6}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore\quad x\leqslant\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$或 $x\geqslant\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

(3) $|2x-5|-|4x+7|>0\Leftrightarrow|2x-5|>|4x+7|\Leftrightarrow(2x-5)^2>(4x+7)^2$
$\Leftrightarrow 3x^2+19x+6<0$

$\therefore\quad -6<x<-\frac{1}{3}$.

原不等式的解集为 $x\in(-6,-\frac{1}{3})$.

注：1. 绝对值不等式的同解原理如下：

(1) $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$或 $f(x)<-g(x)$

(2) $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

其中 $g(x)$可以是关于 x 的解析式，也可以表示某一正数.

2. 去绝对值符号的方法有平方法、分段讨论法或由绝对值的意义去绝对值符号.

3. 以上三个不等式也可以用图象法求解.

★★16. 解下列不等式：

(1) $\sqrt{2x+5}>x+1$ (2) $\sqrt{x^2-7x+10}<x-3$ (3) $\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>0$

解：(1) $\sqrt{2x+5}>x+1$ 同解于

$$\begin{cases}2x+5\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\\2x+5>(x+1)^2\end{cases} \text{或} \begin{cases}2x+5\geqslant 0\\x+1<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x<2$ 或 $-\dfrac{5}{2}\leqslant x<-1$

∴ $x\in[-\dfrac{5}{2},2)$

(2) 原不等式同解于

$$\begin{cases}x^2-7x+10\geqslant 0\\x-3\geqslant 0\\x^2-7x+10<(x-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 5 \text{ 或 } x\leqslant 2\\x\geqslant 3\\x>1\end{cases}$$

∴ $x\in\{x\mid x\geqslant 5\}$

(3) 原不等式同解于

$$\begin{cases}3x-4\geqslant 0\\x-3\geqslant 0\\3x-4>x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\dfrac{4}{3}\\x\geqslant 3\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

∴ $x\in[3,+\infty)$.

注：1. 无理不等式的同解原理如下.

(1) $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)\geqslant 0\\f(x)>g^2(x)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)<0\end{cases}$

(2) $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)\geqslant 0\\f(x)<g^2(x)\end{cases}$

(3) $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)\geqslant 0\\f(x)>g(x)\end{cases}$

2. 无理不等式多数也可以用图象法来解.

★★★17. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{2ax-a^2}>1-x$. 其中 a 是一个正的常数.

解：原不等式同解于

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\2ax-a^2\geqslant 0\\2ax-a^2>(1-x)^2\end{cases}\quad 或\begin{cases}2ax-a^2\geqslant 0\\1-x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\geqslant 0\\2ax-a^2>(1-x)^2\end{cases}或\begin{cases}2ax-a^2\geqslant 0\\1-x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\x^2-2(a+1)x+a^2+1<0\end{cases}或\begin{cases}x>1\\x\geqslant\frac{a}{2}\end{cases}(a>0)$$

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$0<\frac{a}{2}\leqslant 1$ 并且

$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+1)=8a>0$

$\therefore\quad\begin{cases}x\leqslant 1\\a+1-\sqrt{2a}<x<a+1+\sqrt{2a}\end{cases}$ 或 $x>1$

$\because\quad a+1+\sqrt{2a}>1$ 且 $a+1-\sqrt{2a}\leqslant 1$

$\therefore\quad a+1+\sqrt{2a}<x\leqslant 1$ 或 $x>1$，$\therefore\quad x>a+1+\sqrt{2a}$

当 $a>2$ 时，$\frac{a}{2}>1$，$a+1-\sqrt{2a}\geqslant 1$

$\therefore\quad x\in\varnothing$ 或 $x\geqslant\frac{a}{2}$

$\therefore\quad x\geqslant\frac{a}{2}$

综上可知，当 $0<a\leqslant 2$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x>a+1+\sqrt{2a}\}$；当 $a>2$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x\geqslant\frac{a}{2}\}$.

18. 解下列关于 x 的不等式：

★★（1）$4^x-6^x>2\cdot 9^x$

★★（2）$x^{\log_a x}>a^{-2}x^{\frac{9}{2}}$.

★★★（3）$a^{x^4-2x^2}>(\frac{1}{a})^{a^2}(a>0,\ a\neq 1)$.

（1）$4^x-6^x>2\cdot 9^x$

$\Leftrightarrow(\frac{2}{3})^{2x}-(\frac{2}{3})^x-2>0$

$\Leftrightarrow[(\frac{2}{3})^x-2]\cdot[(\frac{2}{3})^x+1]>0$

$\because\ (\frac{2}{3})^x+1>0\quad\therefore\ (\frac{2}{3})^x-2>0\quad\therefore\ x<\log_{\frac{2}{3}}2$

因此，原不等式的解集为 $x\in(-\infty,\log_{\frac{2}{3}}2)$.

(2) 当 $a>1$ 时，原不等式两边取以 a 为底的对数，得

$(\log_a x)^2>\frac{9}{2}\log_a x-2\Leftrightarrow 2\log_a{}^2x-9\log_a x+4>0$

$\therefore\ \log_a x>4$ 或 $\log_a x<\frac{1}{2}$

$\therefore\ x>a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}$

当 $0<a<1$ 时，两边取以 a 为底的对数，得

$\log_a{}^2x<\frac{9}{2}\log_a{}^{x-2}\Leftrightarrow 2\log_a{}^2x-9\log_a x+4<0$

$\therefore\ \frac{1}{2}<\log_a x<4\Leftrightarrow a^4<x<\sqrt{a}$

因此，当 $a>1$ 时原不等式解集为 $\{x|x>a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}\}$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\{x|a^4<x<\sqrt{a}\}$.

(3) 当 $0<a<1$ 时，由原不等式得

$x^4-2x^2+a^2<0$

$\because\ 0<a<1,\ \therefore\ \Delta=4-4a^2=4(1-a^2)>0$

$\therefore\ 1-\sqrt{1-a^2}<x^2<1+\sqrt{1-a^2}$.

又 $1-\sqrt{1-a^2}<x^2\Leftrightarrow x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ 或 $x>\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$，$x^2<1+\sqrt{1-a^2}\Leftrightarrow-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}$

$\therefore\ 0<a<1$ 原不等式解集为

$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}<x<-\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ 或 $\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$

当 $a>1$ 时，由原不等式得

$x^4-2x^2+a^2>0$

$\because\ a>1,\ \therefore\ \Delta=4(1-a^2)<0$

$\therefore\ a>1$ 时原不等式的解集为 R.

注：指数不等式的同解原理如下：

(1) $a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>0,\ a\neq1)$

当 $a>1$ 时同解于 $f(x)>g(x)$

当 $0<a<1$ 时同解于 $f(x)<g(x)$.

(2) $a^{f(x)}>b$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0)\Leftrightarrow f(x)\lg a>\lg b$.

(3)除了以上同底时比较指数法，不同底时取对数法解指数不等式外，常用的还有换元法.

19. 解下列不等式：

★★(1) $\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{4}}(x-1)>\log_4(2x-1)$

★★ (2) $\lg\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0$

★★ (3) $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2$

解：(1) 原不等式同解于

$\log_2(x+1)-\dfrac{1}{2}\log_2(x-1)>\dfrac{1}{2}\log_2(2x-1)\Leftrightarrow 2\log_2(x+1)-\log_2(x-1)>\log_2(2x-1)\Leftrightarrow 2\log_2(x+1)>\log_2(x-1)+\log_2(2x-1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x-1>0\\2x-1>0\\(x+1)^2>(x-1)(2x-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x^2-5x<0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<5$$

因此，原不等式的解集为 $x\in(1,5)$

(2) $\lg\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}>0\\x-\dfrac{1}{x}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2-1)>0\\x(x^2-x-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-1<x<0\text{ 或 }x>1\\x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ 或 }0<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ 或 }1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$