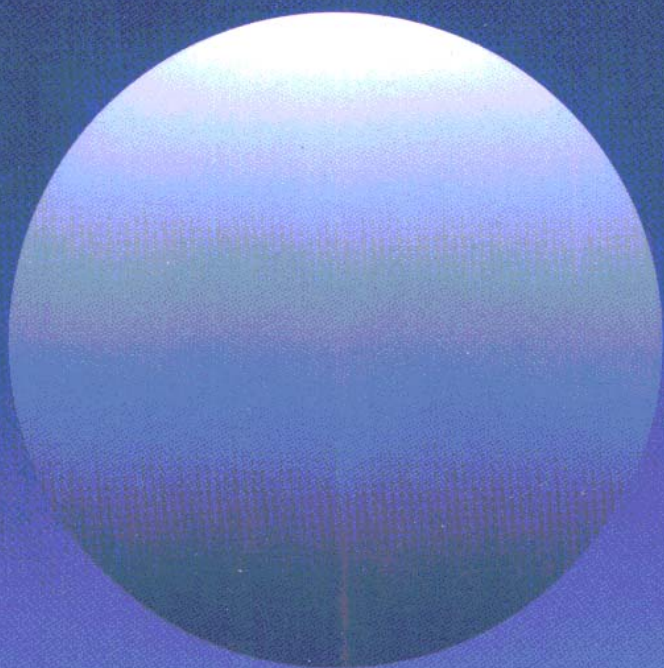


● 研 究 生 用 书 ● STOCHASTIC PROCESSES

华中理工大学出版社

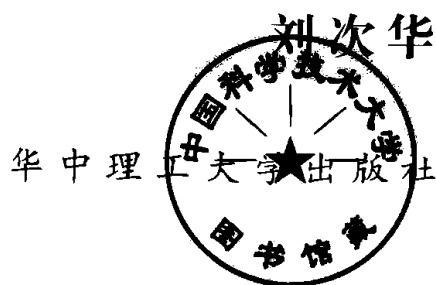


刘次华

随 机 过 程

0211.1-07
1-71

随机过程



图书在版编目(CIP)数据

随机过程/刘次华

武汉:华中理工大学出版社, 2000年1月

ISBN 7-5609-2123-X

I. 随…

II. 刘…

III. 随机过程-高等学校-教材

IV. O211.6

随机过程

刘次华

责任编辑:李立鹏

责任校对:张欣

监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074

电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中理工大学出版社照排室

印 刷:华中理工大学出版社印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:7.875 插页:2 字数:183 000

版次:2000年1月第1版 印次:2000年9月第2次印刷 印数:3 001—6 000

ISBN 7-5609-2123-X/O · 202

定价:10.80 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

前 言

随机过程理论在物理、生物、工程、经济和管理等方面都得到了广泛应用,已成为近代科技工作者谋求掌握的一个理论工具.目前,有条件的高等学校在本科学或研究生中开设了随机过程课程.本书是编者根据多年的教学实践,在自编讲义的基础上,充实和修改而编成的.

本书在工科大学生已有的数学知识基础上,采用为工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式,较全面地介绍了现代科学技术中常见的几种重要的随机过程.全书分为四个部分:预备知识和基本概念(第一章、第二章),泊松过程(第三章),马尔可夫过程(第四章、第五章),平稳随机过程(第六章、第七章、第八章).第二、三、四部分相互独立,读者可根据专业的需要,对内容进行适当取舍.

本书是为具有高等数学、线性代数、概率论等知识的高等理工科院校本科生、研究生,或工程技术人员学习随机过程编写的,它既可作为教材或教学参考书,也可作为需要随机过程知识的读者的自学读本.

本书的编写得到黄志远教授和唐月英教授的支持与鼓励;樊孝述教授和汪昌瑞副教授曾对本书原始讲义的编写提出过许多宝贵的意见.华中理工大学研究生院和出版社对本书的出版给予了大力的支持和帮助,在此谨表示衷心感谢.

由于编者水平有限,书中的缺点在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

1999年8月于华中理工大学

第一章 预备知识

§ 1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念,试验的结果事先不能准确地预言,但具有如下的三个特性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,但预先知道试验的所有可能的结果;

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的样本空间或基本事件空间,记为 Ω . Ω 中的元素 e 称为样本点或基本事件, Ω 的子集 A 称为事件,样本空间 Ω 称为必然事件,空集 $\emptyset$ 称为不可能事件.

由于事件是集合,故集合的运算(并、交、差、上极限、下极限、极限等)都适用于事件.

在实际问题中,我们不是对所有的事件(样本空间 Ω 的所有子集)都感兴趣,而是关心某些事件(Ω 的某些子集)及其发生的可能性大小(概率).这样,便导致 σ -代数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}$ 上的概率的概念.

定义 1.1 设 Ω 是一个集合, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族. 如果

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$;

则称 $\mathcal{F}$ 为 σ -代数 (Borel 域). $(\Omega, \mathcal{F})$ 称为可测空间, $\mathcal{F}$ 中的元素称为事件.

由定义易知:

(4) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(5) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \setminus B \in \mathcal{F}$;

(6) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

定义 1.2 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, $P(\cdot)$ 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值函数. 如果

(1) 任意 $A \in \mathcal{F}, 0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, \dots$ (当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$) 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i);$$

则称 P 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间, $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义易知:

$P(\emptyset) = 0$;

(4) 若 $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$, 则 $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, 即概率具有单调性;

(5) 设 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \begin{cases} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), & \text{若 } A_1 \subset A_2 \subset \dots \\ P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right), & \text{若 } A_1 \supset A_2 \supset \dots \end{cases}$$

定义 1.3 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, 如果对任意 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{G}, n = 1, 2, \dots$ 有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i),$$

则称 $\mathcal{G}$ 为独立事件族.

§ 1.2 随机变量及其分布

随机变量是概率论的主要研究对象,随机变量的统计规律用分布函数来描述.

定义 1.4 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间. $X = X(e)$ 是定义在 Ω 上的实函数,如果对任意实数 x , $\{e: X(e) \leq x\} \in \mathcal{F}$, 则称 $X(e)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的随机变量,简记为随机变量 X . 称

$$F(x) = P(e: X(e) \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

为随机变量 X 的分布函数.

分布函数 $F(x)$ 具有下列性质:

- (1) $F(x)$ 是非降函数: 即当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- (2) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
- (3) $F(x)$ 是右连续, 即 $F(x+0) = F(x)$.

可以证明, 定义在 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上实值函数 $F(x)$, 若具有上述三个性质, 必存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及其上的随机变量 X , 其分布函数是 $F(x)$.

在应用中, 常见的随机变量有两种类型: 离散型随机变量和连续型随机变量.

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述:

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

其分布函数

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述, 其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

常见随机变量的分布参见表 1-1.

下面我们讨论 n 维随机变量及其概率分布.

定义 1.5 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, $X = X(e) = (X_1(e), \dots, X_n(e))$ 是定义在 Ω 上的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中取值的向量函数. 如果对于任意 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\{e: X_1(e) \leq x_1, x_2, \dots, X_n(e) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$, 则称 $X = X(e)$ 为 n 维随机变量或 n 维随机向量. 称

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P(e: X_1(e) \leq x_1, X_2(e) \leq x_2, \dots, X_n(e) \leq x_n), \\ &\quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

为 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布函数.

n 维联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有下列性质:

(1) 对于每个变元 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是非降函数;

(2) 对于每个变元 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是右连续的;

(3) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域 $(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$, 其中 $a_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} &F(b_1, b_2, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^n F(b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n F(b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \dots, b_n) \\ &+ (-1)^n F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0; \end{aligned}$$

(4) $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\lim_{x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$$

可以证明, 对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上具有上述性质的实函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 必存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及其上的 n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 其联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

在应用中, 常见的 n 维随机变量也有两种类型: 离散型和连续

型.

若随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的每个分量 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, 都是离散型随机变量, 则称 X 是离散型随机向量.

对于离散型随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 其联合分布列为

$$p_{x_1, \dots, x_n} = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n),$$

其中 $x_i \in I_i, I_i$ 是离散集, $i = 1, 2, \dots, n$. X 的联合分布函数

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{\substack{x_i \leq y_i \\ i=1, \dots, n}} p_{x_1, \dots, x_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

若存在定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对于任意 $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布函数

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

则称 X 是连续型随机向量, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 X 的联合概率密度.

定义 1.6 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是一族随机变量, 若对于任意 $n \geq 2$ 和 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$, 有

$$P(X_{t_1} \leq x_1, x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_{t_i} \leq x_i), \quad (1.1)$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 是独立的.

如果 $\{X_t, t \in T\}$ 是一族独立的离散型随机变量, (1.1) 式等价于

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_{t_i} = x_i),$$

其中 x_i 是 X_{t_i} 的任意可能值, $i = 1, 2, \dots, n$.

如果 $\{X_t, t \in T\}$ 是一族独立的连续型随机变量, (1.1) 式等价于

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{t_i}(x_i),$$

其中 $f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 的联合概

率密度, $f_i(x_i)$ 是随机变量 X_i 的概率密度, $i = 1, 2, \dots, n$.

独立性是概率中的重要概念. 在实际问题中, 独立性的判断通常是根据经验或具体情况来决定的.

§ 1.3 随机变量的数字特征

随机变量的概率分布完全由其分布函数描述, 但是如何确定分布函数却是相当麻烦的. 在实际问题中, 我们有时只需要知道随机变量的某些特征值就够了.

定义 1.7 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$, 则称

$$EX \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

为 X 的数学期望或均值. 上式右边的积分称为 Lebesgue-Stieltjes 积分.

若 X 是离散型随机变量, 分布列

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

则

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

若 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, 则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

随机变量的数学期望是随机变量的取值依概率的平均.

定义 1.8 设 X 是随机变量, 若 $EX^2 < \infty$, 则称 $DX \stackrel{\text{def}}{=} E(X - EX)^2$ 为 X 的方差.

随机变量的方差反映随机变量取值的离散程度.

定义 1.9 设 X, Y 是随机变量, $EX^2 < \infty, EY^2 < \infty$, 则称

$B_{XY} \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - EX)(Y - EY)]$ 为 X, Y 的协方差, 而

$$\rho_{XY} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B_{XY}}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$$

为 X, Y 的相关系数.

若 $\rho_{XY} = 0$, 则称 X, Y 不相关.

相关系数 ρ_{XY} 表示 X, Y 之间的线性相关程度的大小.

随机变量的数学期望和方差具有如下性质:

(1) 若 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 维连续函数, 则

$$Eg(X_1, X_2, \dots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) dF(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

(2) $E(aX + bY) = aEX + bEY$, 其中 a, b 是常数;

(3) 若 X, Y 独立, 则 $E(XY) = EXEY$;

(4) 若 X, Y 独立, 则 $D(aX + bY) = a^2DX + b^2DY$, 其中 a, b 是常数;

(5) (Schwarz 不等式) 若 $EX^2 < \infty, EY^2 < \infty$, 则

$$E(XY)^2 \leq EX^2 EY^2.$$

(6) (单调收敛定理) 若 $0 \leq X_n \uparrow X$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

(7) (Fatou 引理) 若 $X_n \geq 0$, 则

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq E(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

有关的证明可参考[5].

§ 1.4 特征函数、母函数和拉氏变换

特征函数是研究随机变量分布律的一个重要工具. 由于分布律和特征函数之间存在一一对应关系, 因此在得知随机变量的特

征函数之后,就可以知道它的分布律.用特征函数求分布律比直接求分布律容易得多,而且特征函数具有良好的分析性质.为此,我们首先介绍特征函数.

定义 1.10 设随机变量的分布函数为 $F(x)$, 称

$$g(t) \triangleq E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad -\infty < x < \infty$$

为 X 的特征函数.

特征函数 $g(t)$ 是实变量 t 的复值函数, 由于 $|e^{itx}| = 1$, 故随机变量的特征函数必然存在.

当 X 是离散型随机变量, 分布列

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

则

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k.$$

当 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, 则

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

随机变量的特征函数具有下列性质:

(1) $g(0) = 1, |g(t)| \leq 1, g(-t) = \overline{g(t)}.$

(2) $g(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续.

(3) 若随机变量 X 的 n 阶矩 EX^n 存在, 则 X 的特征函数 $g(t)$ 可微分 n 次, 且当 $k \leq n$ 时, 有 $g^{(k)}(0) = i^k EX^k.$

(4) $g(t)$ 是非负定函数. 即对任意正整数 n 及任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 和复数 $z_1, z_2, \dots, z_n$, 有

$$\sum_{k,l=1}^n g(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0.$$

(5) 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立的随机变量, 则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 的特征函数

$$g(t) = g_1(t)g_2(t)\cdots g_n(t)$$

其中 $g_i(t)$ 是随机变量 X_i 的特征函数, $i = 1, 2, \dots, n.$

(6) 随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定.

我们只对(4),(5)进行证明.

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^n g(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E[e^{i(t_k - t_l)X}] z_k \bar{z}_l \\ &= E\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{it_k X} z_k \overline{e^{it_l X} z_l}\right] \\ &= E\left|\sum_{k=1}^n e^{it_k X} z_k\right|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

所以 $g(t)$ 是非负定函数.

因为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 所以 $e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}$ 也相互独立, 所以

$$\begin{aligned}g(t) &= Ee^{ix} = Ee^{i(x_1 + \dots + x_n)} = E(e^{ix_1} \dots e^{ix_n}) \\ &= Ee^{ix_1} \dots Ee^{ix_n} = g_1(t) \dots g_n(t).\end{aligned}$$

对于 n 维随机变量也可以定义特征函数.

定义 1.11 设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维随机变量, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}$, 则称

$$g(t) = g(t_1, t_2, \dots, t_n) = Ee^{ix^T} = E\left[\exp\left\{i \sum_{k=1}^n t_k X_k\right\}\right],$$

为 X 的特征函数.

n 维随机变量的特征函数具有类似于一维随机变量的特征函数的性质.

例 1.1 设 X 服从 $B(n, p)$, 求 X 的特征函数 $g(t)$ 及 EX 、 EX^2 、 DX .

解 X 的分布列为

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{k=0}^n e^{ikt} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} \\ &= (pe^{it} + q)^n.\end{aligned}$$

由性质知

$$EX = -i g'(0) = -i \frac{d}{dt} (pe^{it} + q)^n \Big|_{t=0} = np,$$

$$EX^2 = (-i)^2 g''(0) = (-i)^2 \frac{d^2}{dt^2} (pe^{it} + q)^n \Big|_{t=0} = npq + n^2 p^2,$$

故

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = npq.$$

例 1.2 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 X 的特征函数 $g(t)$.

$$\text{解 } g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.2)$$

由于 $|ixe^{itx - \frac{x^2}{2}}| = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$, 且 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty$, 故可对 (1.2) 式右端在积分号下求导, 得

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (-de^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx - \frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= -tg(t), \end{aligned}$$

于是得微分方程

$$g'(t) + tg(t) = 0.$$

这是可分离变量方程, 有

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = -t dt.$$

两边积分得

$$\ln g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + C,$$

故得方程的通解为

$$g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2 + C}$$

由于 $g(0) = 1$, 所以 $C = 0$, 于是 X 的特征函数为

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

例 1.3 设随机变量 X 的特征函数为 $g_X(t)$, $Y = aX + b$, 其

中 a, b 为任意实数, 证明 Y 的特征函数 $g_Y(t)$ 为

$$g_Y(t) = e^{ib} g_X(at).$$

证 $g_Y(t) = E[e^{it(aX+b)}]$

$$= E[e^{i(at)X} e^{ibt}] = e^{ibt} E[e^{i(at)X}] = e^{ibt} g_X(at).$$

例 1.4 设随机变量 $Y \sim N(a, \sigma^2)$, 求 Y 的特征函数 $g_Y(t)$.

解 设 $X \sim N(0, 1)$, 则由例 1.2 知 X 的特征函数 $g_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, 令 $Y = \sigma X + a$, 则 $Y \sim N(a, \sigma^2)$. 由例 1.3 知, Y 的特征函数

$$g_Y(t) = e^{iat} g_X(\sigma t) = e^{iat} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

常见随机变量的数学期望、方差和特征函数见表 1-1.

表 1-1

分 布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
0-1 分布	$P(X=1)=p, P(X=0)=q,$ $0 < p < 1, p+q=1$	p	pq	$q + pe^{it}$
二项分布	$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k},$ $0 < p < 1, p+q=1, k=0, 1, \dots, n$	np	npq	$(q + pe^{it})^n$
泊松分布	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0,$ $k=0, 1, \dots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
几何分布	$P(X=k) = pq^{k-1}, 0 < p < 1,$ $p+q=1, k=1, 2, \dots$	$1/p$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$
$N(a, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
指数分布	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$

研究非负整数值随机变量, 母函数是非常方便的工具.

定义 1.12 设 X 是非负整数值随机变量, 分布列

$$p_k = P(X = k), k = 0, 1, \dots$$

则称

$$P(s) \stackrel{\text{def}}{=} E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

为 X 的母函数.

母函数具有以下性质:

(1) 非负整数值随机变量的分布列由其母函数唯一确定.

(2) 设 $P(s)$ 是 X 的母函数, 若 EX 存在, 则

$$EX = P'(1), \quad (1.3)$$

若 DX 存在, 则

$$DX = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2. \quad (1.4)$$

(3) 独立随机变量之和的母函数等于母函数之和.

(4) 若 $X_1, X_2, \dots$ 是相互独立且同分布的非负整数值随机变量, N 是与 $X_1, X_2, \dots$ 独立的非负整数值随机变量, 则 $Y = \sum_{k=1}^N X_k$ 的母函数

$$H(s) = G(P(s)), \quad (1.5)$$

其中 $G(s), P(s)$ 分别是 N, X_1 的母函数.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \quad P(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \\ &= \sum_{k=0}^n p_k s^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k s^k, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

上式两边对 s 求 n 阶导数, 得

$$P^{(n)}(s) = n! p_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) p_k s^{k-n}.$$

令 $s = 0$, 则 $P^{(n)}(0) = n! p_n$, 故

$$p_n = P^{(n)}(0)/n!, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(2) \quad \text{由 } P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \text{ 所以 } P'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \text{ 令 } s \uparrow 1, \text{ 得}$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = P'(1).$$

同理可证(1.4)式.

(3) 显然.

$$\begin{aligned} (4) \quad H(S) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k, \bigcup_{l=0}^{\infty} (N = l)) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) P(Y = k) s^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) s^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^l X_j = k\right) s^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) [P(s)]^l = G[P(s)]. \end{aligned}$$

由公式(1.3), (1.5)可得

$$EY = ENEX_1. \quad (1.6)$$

例 1.5 设商店在一天的额客数 N 服从参数 $\lambda = 1000$ 人的泊松分布, 又设每位额客所花的钱 X_i 服从 $N(100, 50^2)$, 求商店的日销售额 Z 的平均值.

解 由条件知 $EN = 1000, EX_1 = 100$, 故由(1.6)式

$$EZ = EN \cdot EX_1 = 1000 \times 100 = 100000(\text{元}).$$

§ 1.5 n 维正态分布

正态分布在概率论中扮演极为重要的角色. 一方面, 由中心极限定理知实际中许多随机变量服从或近似地服从正态分布. 另一