

高考总复习

3+X

考点测试与评析

数学

湖南教育出版社

前言

湖南是中南基础教育重镇，教学经验丰富的优秀教师云集。我们邀请了重点中学教学第一线备考经验丰富的名、特、优老师，精心编写的《考点测试与评析》是《“3+X”高考总复习》丛书中的一种，包括语文、数学、英语、文科综合（政治、历史、地理）、理科综合（物理、化学、生物）、理科综合试题例析（物理、化学、生物）6本。这套丛书，从编写意图到设计思想，努力体现当前教育改革和高考改革方向，着眼于全面提高学生的素质，培养学生综合能力和创新精神，以期帮助广大师生达到最佳使用效果。全国很多中学把它作为高考总复习的首选用书。

特点突出，以精制胜

本书由“考点测试卷”与“答案、提示与讲评”两部分组成，是根据近几年高考成功的制胜经验，在体现各学科主体知识的前提下，突出对重点、难点、疑点、热点的分析、考查与讲评。全书不强调覆盖面，以精制胜。

提炼考点，各个突破

本书把那些容易混淆的概念，容易出错的原理、规律，高考中出题频率最高的问题，精心提炼出来作为考点，每个考点设置测试卷，试题针对考点，由浅入深，从不同角度，不同层面上各个突破。测试卷在考查内容上，关注热点，具有时代性；在形式上，突出综合性和开放性。做到问题明确、有测试、有答案、有讲评，让学生有的放矢，及时有效地扫除复习进程中一个个拦路虎，增强必胜信心。

名师讲评，指点迷津

本书每套测试卷附有“答案、提示和讲评”，既给出试题的参考答案和必要的提示，又对考点逐个分析，指出常犯错误、产生原因，给出解题思路、解题技巧和解题方法，并结合2001年高考中新动向及近几年高考中出现的有关题型进行分析与讲评。

方便实用，事半功倍

测试卷为“45分钟、100分”一卷（数学少数测试卷为“100分钟，100分”）。16开双面，可做单页试卷，也可整本练习，便于临考前回顾错题、查漏补缺、扫除弱项，事半功倍。

参加本书编写的有湖南师大数学系沈文选，长沙市一中周建新，中南大学铁道校区子弟学校李一麟，湖南师大附中李昌平，长沙市雅礼中学李再湘。

《“3+X”高考复习·考点测试与评析》丛书研究会
2001年8月

3+X

精析高考要点 把握命题脉搏
展示新颖题型 突出综合思维

高考总复习

考点测试与评析 ● 语文
考点测试与评析 ● 数学
考点测试与评析 ● 英语
考点测试与评析 ● 文科综合 (政治、历史、地理)
考点测试与评析 ● 理科综合 (物理、化学、生物)
理科综合试题例析 (物理、化学、生物)

模拟试卷 ● 语文
模拟试卷 ● 数学
模拟试卷 ● 英语
模拟试卷 ● 文科综合 (政治、历史、地理)
模拟试卷 ● 理科综合 (物理、化学、生物)

“3 + x” 高考总复习

考点测试与评析

数 学

《“3 + x” 高考总复习》丛书研究会编

责任编辑: 郑绍辉

湖南教育出版社出版发行 (长沙市韶山北路 643 号)
湖南新华书店经销 湖南宏达包装印刷有限公司印刷

787 × 1092 16 开 印张: 9.5 字数: 230000
2000 年 8 月第 1 版 2001 年 9 月第 2 版第 2 次印刷

ISBN 7-5355-3303-5/G·3298

定 价: 13.00 元

本书若有印刷、装订错误, 可向承印厂调换。

ISBN 7-5355-3303-5



9 787535 533036 >

目 录

2013-106

1	考点 1 集合及其运算	67	考点 16 等差数列与等比数列
3	考点 1 答案、提示与讲评	69	考点 16 答案、提示与讲评
5	考点 2 函数的图象与性质	71	考点 17 数列极限与数学归纳法
7	考点 2 答案、提示与讲评	75	考点 17 答案、提示与讲评
9	考点 3 二次函数与二次不等式	79	考点 18 数列与函数
11	考点 3 答案、提示与讲评	83	考点 18 答案、提示与讲评
13	考点 4 指数函数与对数函数	85	考点 19 复数的三种表示及转换
15	考点 4 答案、提示与讲评	87	考点 19 答案、提示与讲评
17	考点 5 函数的值域和最值	89	考点 20 复数的运算及几何意义
19	考点 5 答案、提示与讲评	91	考点 20 答案、提示与讲评
21	考点 6 函数性质的应用	93	考点 21 复数集上的方程及复数的应用
25	考点 6 答案、提示与讲评	95	考点 21 答案、提示与讲评
27	考点 7 三角函数的图象与性质	97	考点 22 排列组合与二项式定理
29	考点 7 答案、提示与讲评	99	考点 22 答案、提示与讲评
31	考点 8 三角函数式的化简与求值	101	考点 23 空间直线与平面
33	考点 8 答案、提示与讲评	105	考点 23 答案、提示与讲评
35	考点 9 三角形中的三角函数问题	107	考点 24 多面体与旋转体
37	考点 9 答案、提示与讲评	111	考点 24 答案、提示与讲评
39	考点 10 三角函数中的最值问题	113	考点 25 空间图形的计算与证明
41	考点 10 答案、提示与讲评	117	考点 25 答案、提示与讲评
43	考点 11 反三角函数和简单三角方程	119	考点 26 直线和圆
45	考点 11 答案、提示与讲评	123	考点 26 答案、提示与讲评
47	考点 12 不等式的性质与证明	127	考点 27 椭圆、双曲线、抛物线的定义和性质
49	考点 12 答案、提示与讲评	131	考点 27 答案、提示与讲评
51	考点 13 解不等式	133	考点 28 曲线的轨迹问题
53	考点 13 答案、提示与讲评	137	考点 28 答案、提示与讲评
55	考点 14 含参数的不等式	141	考点 29 参数方程与极坐标
59	考点 14 答案、提示与讲评	143	考点 29 答案、提示与讲评
61	考点 15 不等式的综合应用	145	考点 30 圆锥曲线的应用
65	考点 15 答案、提示与讲评	149	考点 30 答案、提示与讲评

考点1 集合及其运算

一、选择题 (每小题7分, 共56分)

- [] 1. 设集合 $A = \{x | 1 < x \leq 2\}$, $B = \{x | x - a > 0\}$, 若 $A \subsetneq B$, 则实数 a 的取值范围是
 A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$
- [] 2. 设集合 $M = \{x | x > 2\}$, $N = \{x | x < 3\}$, 那么, “ $x \in M$ 或 $x \in N$ ” 是 “ $x \in M \cap N$ ” 的
 A. 充分条件但非必要条件 B. 必要条件但非充分条件
 C. 充分必要条件 D. 非充分条件也非必要条件
- [] 3. 已知集合 $M = \{y | y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 那么 $M \cap N$ 等于
 A. $\{2, 4\}$ B. $\{4, 16\}$ C. $\{(2, 4), (4, 16)\}$ D. $\{y | y > 0\}$
- [] 4. 若集合 $A = \{1, 3, 3 - 2x\}$, $B = \{x^2, 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则满足条件的实数 x 的个数是
 A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个
- [] 5. 设 $S = \{x | x = m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}\}$, $x_1 \in S$, $x_2 \in S$, 则
 A. $x_1 + x_2 \in S$, $x_1 \cdot x_2 \in S$ B. $x_1 + x_2 \notin S$, $x_1 \cdot x_2 \in S$
 C. $x_1 + x_2 \in S$, $x_1 \cdot x_2 \notin S$ D. $x_1 + x_2 \notin S$, $x_1 \cdot x_2 \notin S$
- [] 6. 已知集合 A, B, C 满足 $A \cup B = A \cup C$, 则有
 A. $B = C$ B. $A \cap B = A \cap C$
 C. $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ D. $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$
- [] 7. 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 那么 $\overline{M \cup N}$ 等于
 A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$ C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y = x + 1\}$
- [] 8. 设 M, N 是两个非空集合, 定义 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$, 则 $M - (M - N)$ 等于
 A. $M \cup N$ B. $M \cap N$ C. M D. N

二、填空题 (每小题7分, 共14分)

9. 设全集 $I = \{x | 1 \leq x < 10, x \in \mathbf{Z}\}$, 若 $A \cap \bar{B} = \{1, 4, 6\}$, $\bar{A} \cap B = \{8, 9\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集共有 _____ 个.
10. 已知 $f(x) = x^2$, 集合 $A = \{x | f(x+1) = ax, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+$, 则实数 a 的取值范围是 _____

三、解答题(每小题 15 分,共 30 分)

11. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid \log_3(x^2 + x - 3) = 1\}$, $C = \{x \mid 2^{x^2-x} - 4^{3x-5} = 0\}$, 且 $A \cap B \supset \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求实数 m 的值.

12. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x \mid x = f[f(x)], x \in \mathbf{R}\}$.
(I) 证明 $A \subseteq B$;
(II) 若 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B .

考点1 答案、提示与讲评

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	D	C	A	D	B	B

5. 设 $x_1 = m_1 + n_1\sqrt{2}$, $x_2 = m_2 + n_2\sqrt{2}$, $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$.

则 $x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}$, $x_1 x_2 = (m_1 m_2 + 2n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\sqrt{2}$.

又 $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_1 + m_2, n_1 + n_2, m_1 m_2 + 2n_1 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1 \in \mathbb{Z}$.

$\therefore x_1 + x_2 \in S, x_1 x_2 \in S$.

6. 特例判断, 取全集 $I = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{2, 4\}$ 满足 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$, $A \cap B \neq A \cap C$, $A \cap \bar{B} \neq A \cap \bar{C}$.

8. 画出文氏图判断或利用 $M - N = M \cap \bar{N}$ 解之.

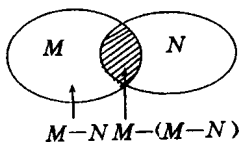


图 1-1

二、9. 8个. 10. $(0, +\infty)$, 不要忽视 $A = \emptyset$ 情形.

三、11. 由已知条件可得 $B = \{-3, 2\}$, $C = \{2, 5\}$. $\because A \cap C = \emptyset, \therefore 2 \notin A, 5 \notin A$. 又 $A \cap B \supset \emptyset \Rightarrow A \cap B$ 非空. $\therefore -3 \in A$, 即 -3 是方程 $x^2 - mx + m^2 - 19 = 0$ 的一根. $\therefore 9 + 3m + m^2 - 19 = 0 \Rightarrow m = 2$ 或 -5 . 当 $m = 2$ 时, $A = \{-3, 5\}$, 这与 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾, 当 $m = -5$ 时, $A = \{-3, -2\}$, 符合题意, $\therefore m = -5$.

12. (I) 任取 $x_0 \in A$, 则 $x_0 = f(x_0)$, 从而 $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, 即 $x_0 \in B, \therefore A \subseteq B$.

(II) $\because A = \{-1, 3\}, \therefore$ 方程 $x = x^2 + ax + b$ 即 $x^2 + (a-1)x + b = 0$ 的两根是 -1 和 3 .

故由韦达定理有 $\begin{cases} -1+3 = -(a-1) \\ (-1) \times 3 = b \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \therefore f(x) = x^2 - x - 3.$$

由 $f(f(x)) = x$ 得 $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x \Rightarrow (x^2 - x - 3)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1, 3, \therefore B = \{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}$.

集合是数学中的一个基本概念, 许多数学分支和其他自然科学都广泛地使用集合的思想、术语和符号, 高考中经常把集合的概念、符号和运算放在一起进行考查, 因此复习中要把重点放在准确理解概念, 正确使用符号上.

复习时, 在理解和掌握集合的概念和运算的基础上还应注意以下四点:

1. 集合的运算常借助于数轴或文氏图进行;
2. 空集 $\emptyset$ 的特殊性: $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, \emptyset \subseteq A$;
3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A, A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ 等在解题中的运用;
4. 重视集合与其他数学知识的综合运用, 其中理解和转化集合语言所描述的事物及关系是解题的关键.

下面我们结合测试题列举分析一些求解集合问题时的常见错误, 以期引起重视, 防止发生类似错误.

1. 忽视对集合元素及关系的正确理解导致错误

例 1 (测试题第 3 题)

错解: 由 $\begin{cases} y = 2^x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}, \therefore$ 选 C

辨析: 此解答误将 $M \cap N$ 理解为函数 $y = 2^x (x \in \mathbb{R})$ 和 $y = x^2 (x \in \mathbb{R})$ 的图象的交点坐标集合, 其错误原因就在于没有弄清集合 M, N 中元素是什么以及 $M \cap N$ 的含义, 事实上, 集合 M, N 分别表示函数 $y = 2^x (x \in \mathbb{R})$ 和 $y = x^2 (x \in \mathbb{R})$

$\mathbf{R}$)的值域,即 $M = \{y | y > 0\}$, $N = \{y | y \geq 0\}$,
从而 $M \cap N = \{y | y > 0\}$,故应选 D.

2. 忽视集合中元素的互异性导致错误

例 2 (测试题第 4 题)

错解: $\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$. 于是 $x^2 = 3$ 或 $x^2 = 3 - 2x$, 由 $x^2 = 3$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$, 由 $x^2 = 3 - 2x$ 得 $x = -3$ 或 1 . 故满足条件的 x 值有 4 个, 选 D.

辨析: 当 $x = 1$ 时, $B = \{1, 1\}$. 这与集合中元素的互异性相矛盾, 应舍去. 此类问题应特别注意检验集合元素的互异性.

3. 忽视空集的特殊性导致错误

例 3 (测试题第 10 题)

错解: 由 $A \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+$ 知 $A \subseteq \mathbf{R}^+$, 故方程 $f(x + 1) = ax$, 即 $x^2 + (2 - a)x + 1 = 0$ 的两根均为正数,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (2 - a)^2 - 4 \geq 0 \\ -(2 - a) > 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 4.$$

辨析: 此解答的错误在于将关系 $A \subseteq \mathbf{R}^+$ 解释为方程 $x^2 + (2 - a)x + 1 = 0$ 的两根为正数而忽视了 $A = \emptyset$ (即方程无实根) 的情形, 因为空集是任何集合的子集, $\emptyset \subseteq \mathbf{R}^+$. 因此解题时要全面正确理解和识别集合语言. 正确解答应分 $A \neq \emptyset$ 与 $A = \emptyset$ 两种情形讨论. 当 $A \neq \emptyset$ 时, 就是上述过程, 得 $a \geq 4$, 当 $A = \emptyset$ 时, 有 $\Delta = (2 - a)^2 - 4 < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$, 综合两种情形知 a 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

4. 忽视集合语言转译的准确性导致错误

例 4 (测试题第 7 题)

错解: $\because M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\} = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ 表示坐标平面上直线 $y = x + 1$ 上点的集合, $N = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$ 表示坐标平面上不在直线 $y = x + 1$ 上的点的集合. $\therefore M \cup N$ 是整个坐标平面上点的集合, 从而 $\overline{M \cup N} = \emptyset$, 选 A.

辨析: 此解答错误的原因在于将集合 M 错译为直线 $y = x + 1$ 上的点构成的集合. 实际上, 集合 M 是由直线 $y = x + 1$ 除去点 $(2, 3)$ 后的点组成的, 因而 $M \cup N$ 表示坐标平面上除去点 $(2, 3)$ 的所有点的集合. $\therefore \overline{M \cup N} = \{(2, 3)\}$, 应选 B.

5. 忽视思考集合问题的周密性导致错误

例 5 (测试题 11)

错解: 由已知条件得 $B = \{-3, 2\}$, $C = \{2, 5\}$. $\because A \cap C = \emptyset, \therefore 2 \notin A, 5 \notin A$. 又 $A \cap B \supset \emptyset \Rightarrow A \cap B$ 非空, $\therefore -3 \in A$, 即 -3 是方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ ① 的一根, $\therefore 9 + 3a + a^2 - 19 = 0 \Rightarrow a = 2$ 或 -5 .

辨析: 上述解法是在 $-3 \in A$ 即 -3 是方程①的根的结论下求出的 a 值. 但细审题意, 当 $a = 2$ 或 -5 时, 二次方程①除 -3 外还有另一根, 因而集合 A 是否满足题设 $A \cap B \supset \emptyset, A \cap C = \emptyset$ 还需检验. 事实上, $a = 2$ 时, $A = \{-3, 5\}$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾, 应舍去. $a = -5$ 时 $A = \{-3, -2\}$, 符合题意. 因此, 在确定集合中待定字母的值时, 应重视解题后的反思与检验, 否则可能会产生与题设条件不相容的增解.

考点2 函数的图象与性质

一、选择题 (每小题7分, 共56分)

- [] 1. 对函数 $y = f(x) (x \in [a, b])$ 的图象与直线 $x = 3$ 的交点个数, 下列说法正确的是
- A. 必有一个交点 B. 一个或两个交点
C. 至多一个交点 D. 可能有两个以上的交点
- [] 2. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上是减函数, 且关于 x 的函数 $y = f(x + 2)$ 是偶函数, 那么
- A. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{5}{2}\right) < f(3)$ B. $f(3) < f\left(\frac{5}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$
C. $f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{5}{2}\right)$ D. $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right)$
- [] 3. 已知不恒为零的函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 满足 $f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)]$, 则函数 $f(x)$
- A. 是偶函数不是奇函数 B. 是奇函数不是偶函数
C. 既是奇函数又是偶函数 D. 既不是奇函数又不是偶函数
- [] 4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 并且满足 $f(x + 2) = -\frac{1}{f(x)}$, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(105.5)$ 等于
- A. -2.5 B. 2.5 C. 5.5 D. -5.5
- [] 5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x - 1)$ 是单调递减函数, 其图象如图 2-1, 给出 4 个结论: ① $f(0) = 1$; ② $f(1) < 1$; ③ $f^{-1}(2) > 0$; ④ $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.
- 其中正确结论的个数是
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4
- [] 6. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位得到曲线 C_1 , 又将 C_1 上各点纵坐标不变, 横坐标变为原来的 2 倍得曲线 C_2 , 再将曲线 C_2 向右平移 2 个单位得曲线 C_3 . 则 C_3 所表示的函数表达式是
- A. $y = f(2x - 3)$ B. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
C. $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ D. $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$
- [] 7. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图 2-2, 则

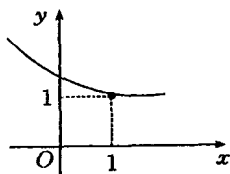


图 2-1

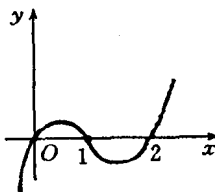


图 2-2

A. $b \in (-\infty, 0)$

B. $b \in (0, 1)$

C. $b \in (1, 2)$

D. $b \in (2, +\infty)$

- [] 8. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 1\}$, 已知 $f(x+1)$ 为奇函数, 当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2x^2 - x + 1$, 那么当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 的递减区间是

A. $[\frac{5}{4}, +\infty)$

B. $(1, \frac{5}{4}]$

C. $[\frac{7}{4}, +\infty)$

D. $(1, \frac{7}{4}]$

二、填空题 (每小题 7 分, 共 14 分)

9. 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和. 如果 $f(x) = \lg(10^x + 1)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $h(0), h(1), g(0), g(1)$ 从小到大的顺序是 _____.

10. 函数 $f(x) = \log_3 |2x + a|$ 的图象的对称轴为 $x = 2$, 则常数 $a =$ _____.

三、解答题 (每小题 15 分, 共 30 分)

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 设 $F(x) = f(x) - f(a-x)$.

(I) 用函数单调性定义证明 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(II) 证明函数 $y = F(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2}, 0)$ 为中心对称.

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$, 它的图象既关于直线 $x = 1$ 对称, 又关于直线 $x = 3$ 对称. 并且当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = 2x - x^2$. 对于整数 m , 记 $I_m = [4m - 1, 4m + 3]$, 求 $f(x)$ 在 $x \in I_m$ 时的解析表达式.

考点2 答案、提示与讲评

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	B	C	B	A	C

1. 当 $3 \in [a, b]$ 时, 交点个数为 1; 当 $3 \notin [a, b]$ 时, 无交点.

4. $f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x)$, $f(x)$ 是周期函数, 且 4 为其一个周期.

5. 将所给图象左移 1 个单位得 $y = f(x)$ 图象, 再由图象判断.

6. $y = f(x) \Rightarrow C_1: y = f(x+1) \Rightarrow C_2: y = f\left(\frac{1}{2}x+1\right) \Rightarrow C_3: y = f\left[\frac{1}{2}(x-2)+1\right] = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

7. 由图象可设 $f(x) = ax(x-1)(x-2)$ 则 $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - 3ax^2 + 2ax$, 比较系数得 $b = -3a$, $\because f(3) = 6a > 0 \Rightarrow a > 0$, $\therefore b = -3a \in (-\infty, 0)$.

8. 由 $f(x+1)$ 为奇函数知 $f(x)$ 图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 可画出 $f(x)$ 图象判断.

二、9. $g(0) < h(0) < g(1) < h(1)$. 可求出 $g(0) = 0$, $g(1) = \frac{1}{2}$, $h(0) = \lg 2 < \frac{1}{2}$, $h(1) = \lg 11 - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

10. $a = -4$. 利用 $f(2+x) = f(2-x)$ 解之.

三、11. (I) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $F(x_1) - F(x_2) = [f(x_1) - f(a-x_1)] - [f(x_2) - f(a-x_2)] = [f(x_1) - f(x_2)] + [f(a-x_2) - f(a-x_1)]$. $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 又由 $x_1 < x_2$ 得 $a-x_2 < a-x_1$, 从而 $f(a-x_2) - f(a-x_1) < 0$, $\therefore F(x_1) - F(x_2) < 0$ 即 $F(x_1) < F(x_2)$, $\therefore F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

数.

(II) 点 (x, y) 关于点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 为中心对称的点为 $(a-x, -y)$, 证明 $F(x)$ 关于点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 为中心对称, 只须证明对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $F(x) = -F(a-x)$. 任取 $x \in \mathbf{R}$, 则 $F(a-x) = f(a-x) - f[a-(a-x)] = f(a-x) - f(x) = -F(x)$, $\therefore F(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 成中心对称.

12. $\because$ 函数 $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象关于直线 $x=1$, $x=3$ 对称, $\therefore$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) = f(2-x) = f[6-(2-x)] = f(x+4)$. $\therefore y = f(x)$ 是周期函数, 4 是它的一个周期. 故对 $m \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x-4m) = f(x)$. 设 $x \in [1, 3]$, 则 $-1 \leq 2-x \leq 1$, 而 $x \in [-1, 1]$ 时 $f(x) = 2x - x^2$, $\therefore x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = f(2-x) = 2(2-x) - (2-x)^2 = 2x - x^2$. 从而 $x \in [-1, 3]$ 时, $f(x) = 2x - x^2$. 故当 $x \in I_m$ 时, $x-4m \in [-1, 3]$, $f(x) = f(x-4m) = 2(x-4m) - (x-4m)^2 = -x^2 + 2(1+4m)x - 8m(1+2m)$.

函数是中学数学的重要内容, 函数的图象和性质是函数的基本问题, 是解决函数有关问题的重要工具, 也是高考中重点考查的知识点之一. 其内容包括: 函数的奇偶性、单调性、周期性的判定与应用; 奇、偶函数的图象特征; 奇偶性与单调性的关系及运用; 函数图象的对称性以及图象变换等, 其中函数的图象变换往往是难点.

中学数学中所涉及的函数图象的基本变换有:

1. 平移变换: 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(x+a)$ ($a \neq 0$)、 $y = f(x) + b$ ($b \neq 0$) 图象间的关系;
2. 对称变换: 函数 $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 、 $y = f(-x)$ 、 $y = -f(-x)$ 、 $y = f^{-1}(x)$ 、 $y = |f(x)|$ 、 $y = f(|x|)$ 图象间的关系(后两种为部分对称);

3. 伸缩变换: 函数 $y = f(x)$ 与 $y = Af(x) (A > 0)$ 、 $y = f(ax) (a > 0)$ 图象间的关系.

深刻理解函数 $y = f(x)$ 与上述各函数的关系及相应的图象变换方法是解好图象变换题的关键. 这里通过列举几种典型的错误, 并辨析错因, 帮助同学们澄清一些错误的认识和加深对这个难点的理解.

错误1 函数 $y = f(-x + a)$ 的图象是函数 $y = f(-x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $(a < 0)$ 或向左平移 $(a > 0) |a|$ 个单位得到的.

辨析: 平移的方向错了. 函数图象变换的依据是自变量 x 的变化情况, 而此错误中确定图象变换是依据中间变量 $-x$ 的变化而非 x 的变化. 对比 $y = f(-x)$ 与 $y = f(-x + a) = f[-(x - a)]$, 自变量 x 的变化情况是 $x \rightarrow x - a$ (而非 $x + a$), 所以 $y = f(-x + a)$ 的图象是 $y = f(-x)$ 图象沿 x 轴向左平移 $(a < 0)$ 或向右平移 $(a > 0) |a|$ 个单位得到的.

错误2 函数 $y = f(ax + b) (a > 0, a \neq 1, b \neq 0)$ 的图象是函数 $y = f(ax)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $(b > 0)$ 或向右平移 $(b < 0) |b|$ 个单位得到的.

辨析: 平移的单位数错了, 由 $y = f(ax)$ 到 $y = f(ax + b) = f\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$, 自变量 x 的变化是 $x \rightarrow x + \frac{b}{a}$, 故应沿 x 轴平移 $\left|\frac{b}{a}\right|$ 个单位. 因此, 函数图象变换的关键是对比变化前后的函数关系, 抓住“ x ”的变化情况作判断. 请同学们细心体会下面例题的两种解法:

例 怎样变换 $y = \lg x$ 的图象, 得到函数 $y = \lg(3x + 2)$ 的图象?

方法1: $y = \lg x \xrightarrow{\text{左移2个单位}} y = \lg(x + 2)$
 横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$
 纵坐标不变 $\rightarrow y = \lg(3x + 2)$.

方法2: $y = \lg x \xrightarrow{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{3}, \text{纵坐标不变}} y = \lg 3x$

左移 $\frac{2}{3}$ 个单位
 $\rightarrow y = \lg(3x + 2)$.

错误3 函数 $y = f(x - a)$ 的图象与函数 $y = f(a - x)$ 的图象关于 y 轴对称.

辨析: 把函数 $y = f(x)$ 中的自变量 x 换成 $-x$ 所得到的函数 $y = f(-x)$, 它们之间的图象关于 y 轴对称, 而 $y = f(x - a)$ 中的 x 换成 $-x$ 则变为 $y = f(-x - a)$, 而不是 $y = f(a - x)$, 因此, 依据 $x - a$ 与 $a - x$ 互为相反数, 认定其图象关于 y 轴对称是错误的, 正确的变换关系为 $y = f(x - a)$ 关于 y 轴对称 $\rightarrow y = f(-x - a) \xrightarrow{\text{右移} 2a(a > 0), \text{左移} 2|a|(a < 0)} y = f[-(x - 2a) - a] = f(a - x)$.

由上述变换过程可以看出, 此两函数图象关于直线 $x = a$ 对称.

错误4 函数 $y = f(a + x)$ 与函数 $y = f(a - x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称 $(a \neq 0)$.

辨析: 这种错误认识的理由是联立方程组 $\begin{cases} y = f(a + x) \\ y = f(a - x) \end{cases}$, 消去 y , 得 $f(a + x) = f(a - x)$ 所以它们的图象关于直线 $x = a$ 对称. 这就与正确命题“若函数 $f(x)$ 满足 $f(a + x) = f(a - x)$, 则其图象关于直线 $x = a$ 对称”相混淆了, 因为这里并不是函数 $f(x)$ 本身具有性质 $f(a + x) = f(a - x)$, 而是考察两个函数 $y = f(a + x)$ 与 $y = f(a - x)$ 图象间的关系. 由联立方程组 $\begin{cases} y = f(a + x) \\ y = f(a - x) \end{cases}$ 只能求得这两个函数图象的交点坐标, 并不能判定这两个函数图象间的变换关系. 实际上, 对比 $y = f(a + x)$ 与 $y = f(a - x)$, 知 x 的变化是 $x \rightarrow -x$. 由此即知此两函数图象关于 y 轴对称.

考点3 二次函数与二次不等式

一、选择题 (每小题7分, 共56分)

- [] 1. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. 如果 $f(x_1) = f(x_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$), 则 $f(x_1 + x_2)$ 等于
- A. $-\frac{b}{2a}$ B. $-\frac{b}{a}$ C. c D. $\frac{4ac - b^2}{4a}$
- [] 2. 已知不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是
- A. $(-2, 2)$ B. $(-2, 2]$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$
- [] 3. 已知函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 在区间 $[0, m]$ 上有最大值3, 最小值2, 则 m 的取值范围是
- A. $[1, +\infty)$ B. $[0, 2]$ C. $(0, 1]$ D. $[1, 2]$
- [] 4. 不等式 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解集为 $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$, 其中 $\alpha < \beta < 0$. 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为
- A. $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$ B. $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ C. $(-\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\alpha})$ D. $(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta})$
- [] 5. 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + b^2 - b + 1 (a, b \in \mathbf{R})$, 对任意实数 x , 都有 $f(1-x) = f(1+x)$ 成立. 若当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 则 b 的取值范围是
- A. $-1 < b < 0$ B. $b > 2$
C. $b < -1$ 或 $b > 2$ D. $b < -1$
- [] 6. 已知 $f(x) = (x-a)(x-b) - 2$, 并且 α, β 是方程 $f(x) = 0$ 的两根, 则实数 a, b, α, β 的大小关系可能是
- A. $\alpha < a < b < \beta$ B. $a < \alpha < \beta < b$
C. $a < \alpha < b < \beta$ D. $\alpha < a < \beta < b$
- [] 7. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图3-1所示, 则下列6个代数式 $ab, ac, a+b+c, a-b+c, 2a+b, 2a-b$ 中, 其值为正的式子个数为
- A. 2个 B. 3个
C. 4个 D. 4个以上
- [] 8. 已知二次函数 $f(x) = 4x^2 - 2(p-2)x - 2p^2 - p + 1$, 若区间 $[-1, 1]$ 内至少存在一个实数 c , 使 $f(c) > 0$, 则实数 p 的取值范围是

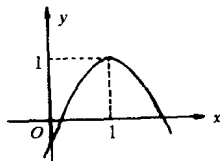


图3-1

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

二、填空题 (每小题 7 分, 共 14 分)

9. 如果二次函数 $f(x) = x^2 - (a-1)x + 5$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上是增函数, 那么 $f(2)$ 的取值范围是_____.

10. 若函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 1$ 在 $[-3, 2]$ 上的最大值是 4, 则实数 $a =$ _____.

三、解答题 (每小题 15 分, 共 30 分)

11. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 为常数且 $a \neq 0$) 满足条件 $f(-x+5) = f(x-3)$, 且方程 $f(x) = x$ 有等根.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 是否存在实数 m, n ($m < n$) 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[3m, 3n]$. 如果存在, 求出 m, n 的值; 如不存在, 说明理由.

12. 设二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbf{R}$), 已知不论 α, β 为何实数, 恒有 $f(\sin\alpha) \geq 0, f(2 + \cos\beta) \leq 0$.

(I) 求证: $b + c = -1$;

(II) 求证: $c \geq 3$;

(III) 若函数 $f(\sin\alpha)$ 的最大值为 8, 求 b, c 的值.

考点3 答案、提示与讲评

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	D	C	A	A	B

4. 由题设知 α, β 是方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两根, 且 $a < 0$, $\therefore \alpha + \beta = \frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, 从而 $cx^2 + bx + a > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 < 0 \Leftrightarrow a\beta x^2 + (a + \beta)x + 1 < 0 \Leftrightarrow (a\alpha + 1)(\beta x + 1) < 0$ ① $\because \alpha < \beta < 0$, $\therefore -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{\beta}$, 故 ① $\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$.
5. $f(1-x) = f(1+x)$, $x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称 $\Rightarrow a=2$, $\therefore x \in [-1, 1]$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(x) > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} = f(-1) > 0 \Leftrightarrow b^2 - b - 2 > 0 \Leftrightarrow b < -1$ 或 $b > 2$.
6. $\because f(x)$ 二次项系数为正, 且 $f(a) = f(b) = -2 < 0$, 故当 $x \in (a, b)$ 时, $f(x) < 0$, 又 $f(a) = f(b) = 0$, $\therefore \alpha, \beta$ 均不可能在 a, b 两数之间.
7. 由图象知, $y = a(x-1)^2 + 1 = ax^2 - 2ax + a + 1$, $\therefore b = -2a, c = a + 1$, 又由 $y(0) < 0$, 知 $c < 0 \Rightarrow a < -1$. $\therefore ab < 0, ac > 0, a + b + c = y(1) = 1 > 0, a - b + c = 3a + c < 0, 2a + b = 0, 2a - b = 4a < 0$.
8. 题设条件 $\Leftrightarrow f(-1) > 0$ 或 $f(1) > 0$, 解之即得.

二、9. $[7, +\infty)$. 10. $\frac{3}{8}$ 或 -3 .

三、11. (I) $\because f(x) = x$, 即 $ax^2 + (b-1)x = 0$ 有等根, $\therefore \Delta = (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b=1$, 又 $f(-x+5) = f(x-3)$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore -\frac{b}{2a} = 1$, 从而 $a = -\frac{1}{2}$, $\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ 为所求.

(II) $\because f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, $\therefore 3n \leq \frac{1}{2}$, 即 $n \leq \frac{1}{6}$, 从而 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上为增函

数. 设存在 m, n , 则 $\begin{cases} f(m) = 3m \\ f(n) = 3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 0 \end{cases}$, $m < n \leq \frac{1}{6}$

即存在 $m = -4, n = 0$ 使 $f(x)$ 定义域为 $[-4, 0]$, 值域为 $[-12, 0]$.

12. (I) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ 且 $f(\sin \alpha) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(1) \geq 0; 1 \leq 2 + \cos \beta \leq 3$ 且 $f(2 + \cos \beta) \leq 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(1) \leq 0$, $\therefore f(1) = 0 \Rightarrow b + c = -1$.

(II) 由 (I) $b + c = -1$, $\therefore b = -1 - c$, $f(x) = x^2 + (-1 - c)x + c = (x-1)(x-c)$. $\therefore$ 当 $1 \leq x \leq 3$ 时 $f(x) = (x-1)(x-c) \leq 0$ 恒成立, $\therefore x - c \leq 0$ 即 $c \geq x$ 恒成立. $\therefore c \geq x_{\max} = 3$.

(III) $f(\sin \alpha) = \left(\sin \alpha - \frac{1+c}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{1+c}{2}\right)^2$.

由 (II) $c \geq 3$, $\therefore \frac{1+c}{2} \geq 2$. 故当 $\sin \alpha = -1$ 时 $f(\sin \alpha)_{\max} = f(-1) = 2 + 2c = 8$, $\therefore c = 3, b = -1 - c = -4$.

二次函数是中学数学中最重要的函数之一, 中学数学的许多问题都可以转化归结为二次函数来处理, 它与二次不等式、二次方程的密切联系, 使得中学数学中的“二次函数问题”多姿多彩, 灵活多变. 因而历年来总成为高考中久考不衰、常考常新的热点与难点. 对此考点, 复习时应重点掌握:

1. 二次函数的表示及图象特征;
2. 二次函数在区间上的最值问题的解法;
3. 利用二次函数讨论二次方程根的分布问题.

下面举例说明

例1 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) - x = 0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

(1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 证明 $x < f(x) < x_1$;

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称,

证明 $x_0 < \frac{x_1}{2}$.

证明: (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, $\because x_1, x_2$ 是 $f(x) - x = 0$ 的根, $\therefore F(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 由 $x_1 < x_2$ 得 $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, 又 $a > 0$, $\therefore F(x) = a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, 即 $x < f(x)$; $x_1 - f(x) = x_1 - [x + F(x)] = (x_1 - x) - a(x - x_1)(x - x_2) = (x_1 - x)[1 + a(x - x_2)]$, $\because 0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$, $\therefore x_1 - x > 0, 1 + a(x - x_2) = 1 + ax - ax_2 > 1 - ax_2 > 0$, $\therefore x_1 - f(x) > 0$ 即 $f(x) < x_1$.

(2) 由题意知, $x_0 = -\frac{b}{2a}$. $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) - x = 0$, 即 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的根, $\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b-1}{a}$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{a(x_1 + x_2) - 1}{2a} = \frac{ax_1 + ax_2 - 1}{2a}$, $\because ax_2 < 1$, $\therefore x_0 < \frac{ax_1}{2a} = \frac{x_1}{2}$.

说明: 二次函数的表示有 3 种形式: ① 定义式: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$); ② 顶点式: $y = a(x - h)^2 + k$, 其中 $a \neq 0, (h, k)$ 是顶点坐标; ③ 零点式: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 其中 $a \neq 0, x_1, x_2$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根. 解题时, 应根据已知条件和解题需要合理选用一种形式, 以方便求解, 如本例中, $F(x)$ 的表示用零点式便是明智的选择.

例 2 已知 $f(x) = -4x^2 + 4ax - 4a - a^2$ 在区间 $[0, 1]$ 内有最大值 -5 , 求 a 的值.

解: $f(x) = -4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 4a$.

当 $\frac{a}{2} \geq 1$ 即 $a \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 递增, $\therefore x = 1$ 时 $f(x)$ 取最大值 $-4 - a^2$. 由 $-4 - a^2 = -5$ 得 $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \leq 2$, 应舍去.

当 $0 < \frac{a}{2} < 1$ 即 $0 < a < 2$ 时, $x = \frac{a}{2}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $-4a$, 由 $-4a = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \in (0, 2)$.

当 $\frac{a}{2} \leq 0$ 即 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内递减, $\therefore x = 0$ 时 $f(x)$ 取最大值 $-4a - a^2$. 由 $-4a - a^2 = -5 \Rightarrow a = -5$ 或 $a = 1$, 其中 $-5 \in (-\infty, 0]$.

综上所述, $a = \frac{5}{4}$ 或 $a = -5$.

说明: 二次函数在某区间上的最值问题常常通过考察其图象特征 (开口方向、对称轴与该区间的位置关系) 得出结论. 请同学们自己作出 $f(x)$ 的图象, 充分理解上述解答.

例 3 已知两点 $P(0, 1)$ 和 $Q(2, 3)$, 如果二次函数 $f(x) = x^2 + mx + 2$ 的图象与线段 PQ 有两个不同的公共点, 求实数 m 的取值范围.

解: 线段 PQ 方程为 $y = x + 1$ ($0 \leq x \leq 2$). 将 $y = x + 1$ 代入 $y = x^2 + mx + 2$ 得 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ① $f(x)$ 图象与线段 PQ 有两个不同的公共点 $\Leftrightarrow$ 方程①在区间 $[0, 2]$ 上有两个不同的实根. 记 $g(x) = x^2 + (m-1)x + 1$, 由 $g(x)$ 图象 (图 3-2) 知其条件为:

$$\begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 4 > 0 \\ 0 < -\frac{m-1}{2} < 2 \\ g(0) \geq 0 \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ 或 } m > 3 \\ -3 < m < 1 \\ m \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m < -1$$

说明: 利用二次函数图象, 求解二次方程根的分布问题时, 一般应考虑: 图象开口方向、判别式、对称轴位置、区间端点处函数取值情况等方面, 建议同学们结合图象, 对二次方程 $f(x) = 0$ 的根的各种分布情形, 思考 $f(x)$ 应满足的条件.

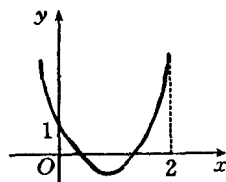


图 3-2

考点4 指数函数与对数函数

一、选择题 (每小题7分, 共56分)

- [] 1. 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x) = \log_2 a(x+1)$ 满足 $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是
- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{1}{2}]$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
- [] 2. 已知函数 $f(x) = x^\alpha - x^\beta$ 在 $(1, +\infty)$ 上的函数值为正数, 则
- A. $\alpha > 0, \beta > 0$ B. $\alpha < 0, \beta < 0$
C. $\alpha > \beta$ D. $\alpha > \beta > 0$ 或 $\alpha < \beta < 0$
- [] 3. 函数 $y_1 = a^x, y_2 = b^x (a, b > 0 \text{ 且 } a, b \neq 1)$ 的反函数分别为 $f(x), g(x)$, 若 $\lg a + \lg b = 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象位置关系是
- A. 关于直线 $y = x$ 对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于 x 轴对称
- [] 4. 已知 $0 < a < 1$, 则方程 $a^{|x|} = |\log_a x|$ 的实根的个数是
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- [] 5. 函数 $y = -\lg^2 x - 2\lg x + 3$ 的单调递增区间是
- A. $[\frac{1}{10}, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{10}]$
- [] 6. 若 $f(x) = \log_a(-x^2 + \log_2 a x)$ 对 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 都有意义, 则实数 a 的取值范围是
- A. $[\frac{1}{16}, \frac{1}{2})$ B. $[\frac{1}{32}, \frac{1}{2})$ C. $[\frac{1}{64}, \frac{1}{2})$ D. $[\frac{1}{128}, \frac{1}{2})$
- [] 7. 若关于 x 的方程 $4^{-|x+1|} - 2^{-|x+1|+2} + 2 + m = 0$ 有实根, 那么实数 m 的取值范围是
- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 0]$ C. $(-2, 2]$ D. $(-2, 1]$
- [] 8. 已知函数 $y = \log_a(ax^2 - x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是
- A. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(\frac{1}{4}, 1)$ D. $(-\infty, \frac{1}{8}]$

二、填空题 (每小题7分, 共14分)

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & (x \geq 4) \\ f(x+2) & (x < 4) \end{cases}$, 那么 $f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$ 的值为_____.
10. 已知 $f(x) = 2 + \log_3 x (1 \leq x \leq 9)$, 则函数 $g(x) = f^2(x) + f(x^2)$ 的最大值是_____.