贺兴时 薛红 主编

应用概率统计

高等工科院校教材

西北工业大学出版社

应用概率统计

高等工科院校教材

应用概率统计

主编 贺兴时 薛 红
主审 杨文鹏

西北工业大学出版社

【内容提要】 本书内容包括随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、线性统计模型共8章内容，叙述了概率论与数理统计的基本知识和方法。每章后配有习题和参考答案，有助于读者对内容的理解和掌握。

本书可作为工科院校本、专科生概率统计课的教材，也可供具有高等数学知识的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/贺兴时，薛红主编. —西安：西北工业大学出版社，2001.10

ISBN 7-5612-1403-0

Ⅰ.应… Ⅱ.①贺…②薛… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065923 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 邮编：710072 电话：(029)8493844
网　　址：www://nwpup.com
印 刷 者：西安市向阳印刷厂
开　　本：850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张：8.125
字　　数：204千字
版　　次：2001年10月 第1版 2001年10月 第1次印刷
印　　数：1～5 000册
定　　价：12.00元

前　言

概率论与数理统计是从数量的侧面来研究随机现象规律的一门应用数学学科，并广泛地应用于工业、国防、国民经济及科学技术的各个领域。目前，概率统计已经成为绝大多数工科及经济类专业大学生的一门重要的基础课程。

本书是编者在高等工科院校长期从事概率统计课程教学的基础上，根据工科院校概率统计教学大纲，结合近几年来硕士研究生入学试题及工科院校的特点编写的。

为了便于读者更好地理解概率论和数理统计的基本概念、理论和方法，初步掌握利用概率统计处理随机现象的基本思想，提高读者分析和解决实际问题的能力，本书在内容上作了如下安排：(1)从实际问题入手引入概率统计的基本概念；(2) 强调概率统计在工程技术及经济领域的应用；(3)与硕士研究生入学考试大纲相衔接，并将部分有代表性的硕士研究生入学试题作为例题或习题。本书在编写时力求做到通俗易懂，深入浅出，便于自学。对理论问题尽量简明，并提供有关实际背景及模型，理论联系实际。本书可作为高等工科院校概率论和数理统计课程教材或教学参考书。

本书由贺兴时(第一、四、八章)、薛红(第二、三、五、六、七章)编写，贺兴时负责统稿，由杨文鹏主审。在编写过程中，始终得到西北工业大学出版社的大力支持。在此，谨向主审者及出版社表示感谢。

限于编者水平，书中难免有不足之处，衷心希望读者批评指正。

编　者

2001.7

目　　录

第1章　随机事件及概率

概率统计是研究随机现象统计规律性的一门数学分支. 随机事件与概率是概率论中最基本、最重要的概念之一. 本章将介绍随机事件与概率,讨论随机事件的关系与运算以及概率的性质与计算方法.

第1节　随机事件

在自然界与人类社会活动中,常常会出现各种各样的现象. 其中一类现象叫做确定性现象,该现象在一定条件下必然发生或必然不发生. 例如,向上抛一块石头,石头必然会掉到地上;在标准大气压下,水加热到100℃时,必然沸腾;在没有水分的条件下,种子发芽是不可能的,等等. 所以这种现象有一个共同特点,即在一定条件下,其结果是完全确定的. 另一现象则不然,它是在一定条件下可能发生也可能不发生. 例如,掷一枚硬币落在平面上,可能字面朝上,也可能字面朝下;观察新生儿的性别,可能是男孩,也可能是女孩;从一批产品中任取一件产品可能是次品,也可能是正品;测试某型号纱线的强力,它可能是某区间上的这个值,也可能是那个值. 类似的例子很多,这类现象虽然形式不同,但也有一个共同特点:在一定条件下,可能出现这个结果,也可能出现那个结果,试验前不能确定出现哪个结果,即结果的出现是偶然的. 我们称这类现象为随机现象. 概率统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

一、随机试验

随机现象表面上似乎无规律可言，即可能出现这个结果，也可能出现那个结果，但实质上这种现象有它的内在规律. 例如，在发行福利彩票的现场，我们购买一张彩票，可能中奖，也可能不中奖，购买的彩票越多，中奖的机会越大，并且中奖的次数与购买彩票量的比值随着购买量的增多越来越接近彩票的设奖率. 又如，在某天中午 1 小时内，某交通道口汽车的流量是不确定的，但实际上，该交通道口汽车的流量具有规律性. 为了对随机现象的统计规律进行研究，需安排试验获取有关资料. 这里所说的试验具有如下特点：

(1) 试验具有明确的目的；

(2) 在相同的条件下，该试验可重复进行；

(3) 试验的结果不少于两个，试验的所有可能出现的结果在试验前已经明确；

(4) 每次试验前不可能预料会出现哪个结果.

我们称这种试验为随机试验，常用字母 E 表示.

【例1】 下列试验都是随机试验：

E_1：掷一枚硬币，观察硬币着地时朝上的面；

E_2：掷一枚骰子，观察骰子的点数；

E_3：在一批产品中，任取 n 件，记录次品的个数；

E_4：记录某电话总台在上午一段时间内电话呼叫的次数；

E_5：观察某交通路口在中午 1 小时内汽车的流量；

E_6：从某厂生产的电子产品中，任取一件测试其寿命.

在现实生活中，存在着许许多多随机试验的例子，读者可根据自己所学专业举出相关例子.

二、样本空间

进行随机试验，我们的目的就是要弄清这个试验可能出现的结果. 我们称随机试验中每一个可能出现的结果为样本点，记作 ω（必要时给 ω 带下标）. 全体样本点组成的集合（即试验所有可能出现的结果构成的集合）称为样本空间，记作 Ω.

【例 1 续】 下面给出例 1 中随机试验的样本空间：

E_1：$\Omega_1 = \{$字面朝上，字面朝下$\}$，含有两个样本点；

E_2：$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$，含有 6 个样本点；

E_3：$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots,n\}$，含有 $n+1$ 个样本点；

E_4：$\Omega_4 = \{0,1,\cdots,n,\cdots\}$，含有可列个样本点；

E_5：$\Omega_5 = \{0,1,\cdots,n,\cdots\}$，含有可列个样本点；

E_6：$\Omega_6 = \{t \mid t \geqslant 0\} \stackrel{\text{def}}{=} [0,\infty)$，它由所有非负实数组成，含有不可列个样本点.

由此我们可以看出，样本空间最少含有两个样本点。样本空间中样本点的个数可能有限；也可能可列；也可能不可列，充满一个区间.

三、随机事件

在研究随机现象时，我们不但关心试验后样本点是否出现，而且关心满足某些条件的样本点是否出现. 例如，测试某电子产品的寿命以确定该电子产品是否合格. 若假定该电子产品寿命超过 5×10^4 h 认为合格，则在测试中我们关心满足条件“寿命超过 5×10^4 h”的样本点是否出现，而“寿命超过 5×10^4 h”是样本空间的子集. 所以我们称样本空间的子集为随机事件. 该子集在一次试验中可能有样本点出现，也可能没有样本点出现. 若该子集有样本点出现，我们称该事件发生. 随机事件常用大写的英文字母 A，B，C，$\cdots$，或用加下标 A_i，$i = 1,2,\cdots$ 来表示.

【例2】 在有2件次品(编号为1,2)和8件正品(编号为3,4,…,10)中,随机取出两件,观察其结果.则试验E的样本空间$\Omega=\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(9,10)\}$,共45个样本点.

若令$A_1=\{(1,2)\}$,$A_2=\{(1,3)\}$,…,$A_{45}=\{(9,10)\}$,则A_1,…,A_{45}都是随机事件,且每个A_i仅含有试验E的样本空间Ω的一个样本点.

若令A表示"取到次品",B表示"取到一件次品",C表示"取到的两件全为正品".因为$A=\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(2,10)\}$,$B=\{(1,3),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(2,10)\}$,$C=\{(3,4),(3,5),\cdots,(9,10)\}$都是样本空间$\Omega$的子集,所以,$A$,$B$,$C$都是随机事件.

由例2知,有的随机事件仅含有样本空间的单个样本点,有的含有样本空间的许多样本点.为此,我们根据事件包含样本空间中样本点的个数可将事件分为:

基本事件:由单个样本点构成的事件叫做基本事件.例2中$A_1,A_2,\cdots,A_{45}$都是基本事件,且随机试验的基本事件的个数与试验所有可能出现的结果个数相等.

复合事件:由两个或两个以上样本点构成的事件叫做复合事件.例2中的A,B,C都是复合事件.

另外,为了以后讨论方便,我们将每次试验中都出现的事件叫做必然事件.它含有试验的所有可能结果,即含有所有样本点,因此也用Ω来表示.在随机试验中,决不会出现的事件叫做不可能事件.不可能事件在每次试验中一定不会出现,所以不含试验的任何结果,用$\varnothing$来表示.

四、事件的关系和运算

在随机事件中,有些简单,有些复杂,我们希望通过对简单事件的了解去掌握复杂事件,因此,我们讨论事件的关系及运算.

设试验 E 的样本空间为 Ω, A, B, C 和 $A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 为随机事件.

(1) 包含关系：若由事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$. 任何事件 A 都包含于 Ω，如图 1.

(2) 相等关系：若 $A \subset B$，同时 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

(3) 事件的并(和)：若事件 A, B 中至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的并(和)，记作 $C = A \cup B$，如图 2.

一般地，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生，我们用 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示该事件，即为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并(和)；用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并(和).

(4) 事件的交(积)：若事件 A, B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的交(积)，记作 $C = A \cap B$ 或 $C = AB$，如图 3.

一般地，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，我们用 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交(积)；用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表 $A_1, A_2, \cdots$ 的交(积).

(5) 事件的互不相容(互斥)：若事件 A, B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(互斥)，如图 4. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个都互不相容，即 $A_i \cap A_j = \varnothing, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容或两两互斥；可列个事件中任意两个都互斥时，则称该事件列两两互斥. 任何试验的基本事件都是两两互斥的.

(6) 事件的差：若事件 A 发生，事件 B 不发生的事称为事件 A 与事件 B 的差，记作 C＝A\B（或 A－B），如图 5.

(7) 对立事件(余事件)：事件 A 不发生的事件叫做 A 的对立事件或余事件，记作 A 或 A^c，如图 6.

由定义，$\overline{A}=\Omega\backslash A$，$A\backslash B=A\overline{B}$.

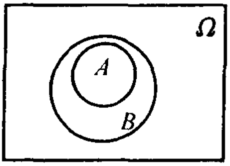

图1　$A\subset B$

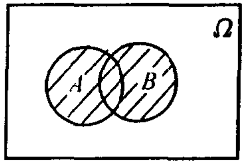

图2　$A\cup B$

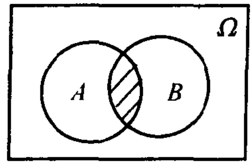

图3　$A\cap B$

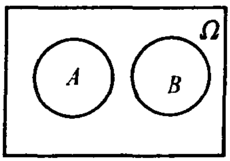

图4　$A\cap B=\varnothing$

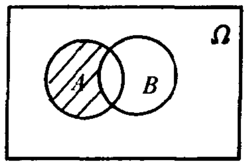

图5　$A\backslash B$

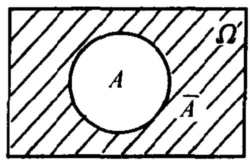

图6　$\overline{A}$

(8) 事件的运算定律：

(i) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(ii) 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$ABC=(AB)C=A(BC);$$

(iii) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C);$$

(iv) 德摩根(De Morgan)公式：

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

【例3】　将一枚硬币连续掷3次，观察其结果.

(1) 写出样本空间.

(2) 用A表示第1次出现字面朝上的事件，用B表示第2次出现字面朝上的事件；C表示第3次出现字面朝上的事件. 试用样本点的集合表示事件A，B，$A\cup B$，AB，$A\backslash B$，$\overline{A}$，$A\cup B\cup C$，ABC，$\overline{A}BC$，$\overline{A}\,\overline{B}C$.

(3) 对事件A，B，验证德摩根公式.

解 用 H 表示字面朝上,T 表示字面朝下.

(1) 样本空间 $\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

(2) $A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$;

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(T,H,H),(T,H,T)\}$;

$C = \{(H,H,H),(H,T,H),(T,H,H),(T,T,H)\}$;

$A \cup B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T)\}$;

$AB = \{(H,H,H),(H,H,T)\}$;

$A \backslash B = \{(H,T,H),(H,T,T)\}$;

$\overline{A} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T))\}$;

$A \cup B \cup C = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$;

$ABC = \{(H,H,H)\}$;

$\overline{A}BC = \{(T,H,H)\}$;

$\overline{A}\overline{B}C = \{(T,T,H)\}$.

(3) 由(2) 有 $\overline{(A \cup B)} = \{(T,T,H),(T,T,T)\}$,因为

$\overline{A} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$,

$\overline{B} = \{(H,T,H),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$.

所以 $$\overline{A}\overline{B} = \{(T,T,H),(T,T,T)\}$$

所以 $$\overline{(A \cup B)} = \overline{A}\overline{B}$$

又由(2) 有

$\overline{AB} = \{(H,T,H),(T,H,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(H,T,H),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\} = \{(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),$

$(T,T,H),(T,T,T)\} = \overline{AB}$

【例 4】 某人在一次彩票发行现场摸了 3 张彩票，设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示摸的第 i 张彩票中奖. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件：

(1) 3 张都中奖；

(2) 3 张都没中奖；

(3) 至少有一张中奖；

(4) 恰有一张中奖；

(5) 至多有一张中奖.

解 $\overline{A}_i$ 表示第 i 张彩票没有中奖，$i=1,2,3$，则有

(1) 3 张都中奖的事件为：$A_1A_2A_3$；

(2) 3 张都没中奖的事件为：$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(3) 至少有一张中奖的事件为：$A_1 \cup A_2 \cup A_3$；

(4) 恰有一张中奖的事件为：$(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$；

(5) 至多有一张中奖的事件为：$(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \cup (A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$.

第 2 节　概率及性质

在随机试验中，随机事件可能发生，也可能不发生，虽然我们不能肯定地回答它是否发生，但是事件发生的可能性大小是客观存在的，是可以度量的. 概率就是对事件发生可能性大小的数量描述.

一、古典概型

我们抛一枚均匀硬币，自然想到该硬币着地时，由于硬币两面对称，所以出现“字面朝上”和“字面朝下”的可能性是一样的. 因

此，我们就有理由认为出现“字面朝上”和“字面朝下”的概率都是$\frac{1}{2}$.

在概率论早期，对于某些特殊情形，人们利用所研究对象的物理和几何性质的对称性，确定了计算概率的方法.这种特殊情形的随机试验满足：

（1）试验的样本空间由有限个样本点构成，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

（2）每个样本点出现的可能性相等，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$$

我们称这类随机试验的数学模型为古典概型.在古典概型中，若事件 A 包含 n_A 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.2.1}$$

由这种方法得到的概率叫做古典概率.公式(1.2.1)为古典概率的计算公式.由此看到，计算古典概率转化为计算样本空间中样本点个数和事件 A 中样本点个数.一般情形下计算古典概率要借助排列组合知识.

【例1】 考虑有3个小孩的家庭，假设生男生女等可能的，求恰有两个男孩的概率.

解 由题意知，该问题是古典概型.为了方便，用b表示男孩，用 g 表示女孩，则样本空间为

$$\Omega=\{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b),(b,g,g),\\(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}$$

设 A 表示3个孩子中恰有2个男孩的事件.则

$$A=\{(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b)\}$$

所以

$$P(A)=\frac{3}{8}$$