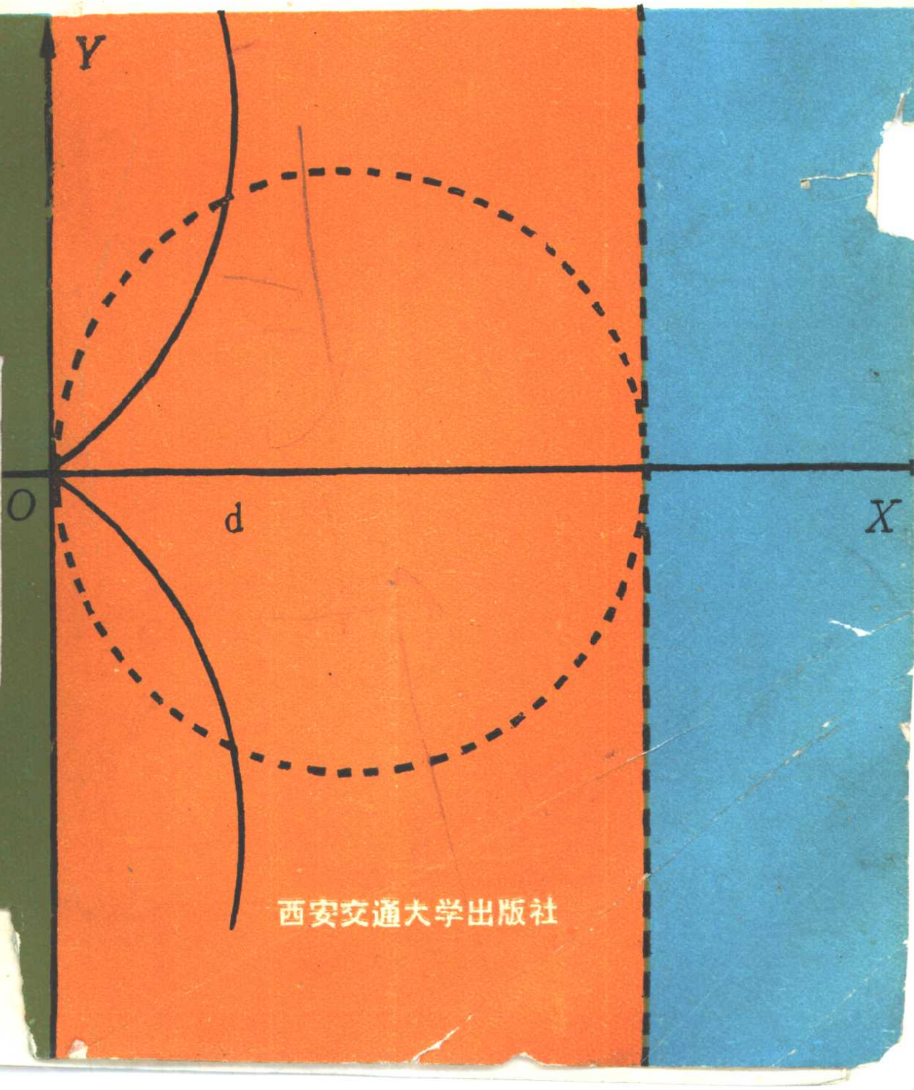
高等数学

重点内容辅导

西安交通大学数学系



西安交通大学出版社

高等数学重点内容辅导

西安交通大学数学系

内容简介

本书为《高等数学课外读物》续篇，着重分析高等数学中的基本概念和难点，帮助学生深入理解教学内容，培养学生分析和解决问题的能力。

本书共10篇，内容包括：多元函数的极限、多元复合函数和隐函数的求导法、多元函数的极值和重积分的计算、多元函数积分应用举例、线、面积分的计算、常微分方程应用举例、傅里叶级数展开的若干技巧、分段由多项式表示的周期函数的傅里叶系数公式、著名数学家的简介等。

本书可配合各高等理工科院校高等数学的教学，可作为夜大、职大、电大、函大的辅导材料，也可供高等院校教师参考

高等数学重点内容辅导

西安交通大学数学系

责任编辑　林　全

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

长延堡印刷厂装

陕西省新华书店发行　　各地新华书店经售

*

开本787×1092　1/32　印张8　字数：198千字

1988年1月第1版　　1988年5月第1次印刷

印数：1—7000册

ISBN 7—5605—0007—2/O—4　　定价：1.25元

目　　录

多元函数的极限

多元函数概念是从一元函数推广得来的，特别是引进了点函数的概念后，这种推广就显得更为自然。但是，由于自变量个数的增加，它的极限要比一元函数的极限复杂得多。学习这一部分内容时，会感到从概念到计算，特别是在计算上有很多困难，不易掌握。本篇除了举例说明二重极限的求法以外，先来探讨一下二重极限和所谓累次极限之间的关系，以加深对二重极限的理解。

二重极限 设函数$z=f(x, y)$在点(ξ, η)的去心邻域内有定义，那末二重极限

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ y\to\eta}} f(x, y)=A$$

是指当动点(x, y)在点(ξ, η)的去心邻域内以任意方式趋于(ξ, η)时，$f(x, y)$趋于同一常数A。

但是，我们常常会遇到这样一种情形，就是在点(ξ,η)的邻域内除了(ξ, η)点外，可能还有不属于函数定义域的点，同时总有异于(ξ, η)而属于函数定义域的点。这时，我们可把二重极限的定义推广如下：

如果对于任意给定的正数ε，总存在与它相应的另一个正数δ，使得对一切属于函数的定义域而同时满足不等式

$$0<\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta$$

的点(x, y)，都能使不等式

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，那末称常数A为函数$z=f(x, y)$当$(x, y) \to (\xi, \eta)$（或$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \to 0$）时的极限。仍记作

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ y \to \eta}} f(x, y)=A \quad \text{或} \quad \rho \to 0 \text{时，} f(x, y) \to A$$

在本文下面的例子中，凡遇到这样情形时，均属上述定义下的二重极限，不再逐一说明。

累次极限 所谓$f(x,y)$的累次极限是先将x，y两个变量中的一个固定，例如把y固定，然后在$x \to \xi$时，求$f(x,y)$的极限，一般说来，如果这一极限存在，那末它将与y有关：

$$\lim_{x \to \xi} f(x, y)=\varphi(y)$$

再求极限$\lim\limits_{y \to \eta} \varphi(y)=\lim\limits_{y \to \eta} \lim\limits_{x \to \xi} f(x, y)$，这就是$f(x,y)$在$(\xi, \eta)$的一个累次极限，记作

$$\lim_{y \to \eta} \lim_{x \to \xi} f(x, y)=A_{21}$$

如果先固定x，就得$f(x, y)$在(ξ, η)的另一个累次极限，记作

$$\lim_{x \to \xi} \lim_{y \to \eta} f(x, y)=A_{12}$$

其实，累次极限是连续两次求一元函数的极限。

对于二重极限与累次极限我们必然会提出一系列的问题，如：两种不同次序的累次极限是否一定相等？累次极限跟二重极限的关系如何？二重极限怎样求法？对于这些问题，下面就二元函数分别举例加以说明。三元与三元以上的

函数的情况完全类似。

一　累次极限及其与重极限的关系

1. 一个二元函数的两个累次极限不一定相等　一个二元函数的两个累次极限，虽然只是对两个不同变量求极限的次序不同，但结果不一定总是相等的。例如，函数

$$f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

在（0，0）的两个累次极限是相等的。因为，

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,\ y)=\lim_{y\to0}y\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\lim_{y\to0}0=0$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,\ y)=\lim_{x\to0}x\left(\lim_{y\to0}\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}0=0$$

但函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\tag{1}$$

在(0，0)的两个累次极限却不相等：

$$A_{21}=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,\ y)=\lim_{y\to0}(-1)=-1,$$

$$A_{12}=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,\ y)=\lim_{x\to0}1=1.$$

有时甚至还会出现有一个累次极限存在而另一个不存在的情形。例如，函数

$$f(x,\ y)=y\sin\frac{1}{xy}$$

在(0，0)的两个累次极限：

$$A_{21}=\lim_{y\to 0}y\left(\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{xy}\right)\text{ 不存在}$$

$$A_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{xy}{}^{①}=0$$

由此可见，一个二元函数的两个累次极限既可以相等，也可以不等，甚至可以一个存在而另一个不存在，因此，求多元函数的累次极限时，不能随便交换对不同变量求极限的次序。

2．重极限与累次极限之间的关系 重极限与累次极限之间的关系是比较复杂的。例如，函数

$$f(x,y)=y\sin\frac{1}{xy}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)\to 0$，即重极限为零，但它在$(0,0)$的累次极限A_{21}不存在，$A_{12}=0$。又如，函数

$$f(x,y)=(x+y)\cos\frac{1}{xy}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)\to 0$，即重极限为零，但它在$(0,0)$的两个累次极限均不存在。可见，由重极限的存在不能保证累次极限的存在。

下面我们再通过例子来说明：由累次极限的存在且相等，也不能保证重极限的存在。

例如，当$(x,y)\to(0,0)$时，函数$z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$的两个累次极限都存在且相等：

---

① $\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\leq 1$

$$A_{21}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0,$$

$$A_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0$$

但重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$不存在（参见《高等数学》①下册第十章1—2节例2）。读者还可验证，函数

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

在(0，0)的两个累次极限都存在且相等：$A_{12}=A_{21}=1$，但重极限却不存在。

那末，在累次极限和重极限之间是否毫无关系可寻呢？事实并非如此。我们有下面的定理：

定理 当$(x,y)\to(\xi,\eta)$时，如果函数$f(x,y)$的二重极限和它的两个累次极限中的某一个极限都存在，那末这两个极限一定相等。

证明从略，有兴趣的读者可参看M.K.格列本卡著《数学分析教程》第二卷第一分册第79页（高等教育出版社出版）

由这个定理还可推得以下两个推论：

（1）当$(x,y)\to(\xi,\eta)$时，如果$f(x,y)$的二重极限和它的两个累次极限都存在，那末这些极限都相等，即

①高等教育出版社1985年再版的《高等数学》第二版（西安交通大学高等数学教研室编）以后本书中提到《高等数学》都是指这本书。

$$\lim_{\substack{y \to \xi \\ x \to \eta}} f(x,y) = \lim_{y \to \eta} \lim_{x \to \xi} f(x,y) = \lim_{x \to \xi} \lim_{y \to \eta} f(x,y)$$

（2）如果两个累次极限都存在，但不相等，那末二重极限不存在。

例如上面（1）式中的函数，当$(x,y) \to (0,0)$时，两个累次极限存在但不相等：$A_{21} = -1$，$A_{12} = 1$，所以二重极限$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$不存在。

综上所说，可知二重极限与累次极限的存在性，彼此不能保证。就是说，二重极限存在，不能保证累次极限的存在；累次极限存在，纵然相等，也不能保证二重极限的存在，当然，更不用说三个极限相等了，除非预先知道二重极限是存在的。

二　二重极限的求法

我们知道，要问一个函数的极限是什么？首先要问它的极限是否存在？极限是存在的，去求极限才有意义。如果极限不存在，就没有求极限的问题。所以，存在问题居于重要地位。但对二重极限来说，要证明极限存在比单极限更为困难。所以，我们在处理二重极限问题时，往往采取直接求出极限值或证明极限不存在的办法。下面举例说明求极限的几种常用方法。在举例过程中，凡用到求极限的有理运算、复合函数求极限运算以及连续函数求极限运算等法则时，不再逐一加以说明。

1．利用函数连续性的定义　根据函数连续性的定

义：$\lim\limits_{\substack{x\to\xi\\y\to\eta}} f(x,y)=f(\xi,\ \eta)$，用直接代入法即可确定出极限值。

例 1 求极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^{y})}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$

【解】 因为函数

$$\frac{\ln(x+e^{y})}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$$

是初等函数，在它的定义域内是连续的，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^{y})}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=\frac{\ln(1+e^{0})}{\sqrt{1^{2}+0^{2}}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2$$

2．利用"无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量"的性质 一般是将函数分成两部分的乘积，使其一部分为有界函数，另一部分为无穷小量。

例 2 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\y\to 0+}}\dfrac{xy}{x+y}=0$

【证】 因为当$x>0$，$y>0$时，$0<\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}<1$，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\y\to 0+}}\sqrt{xy}=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\y\to 0+}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0+\\y\to 0+}}\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\cdot\sqrt{xy}=0$$

例 3 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$。

【证】 因为 $\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant 1$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)=0$，

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

3．利用分子或分母有理化 对于含有根式的分式函数，一般采用先将分子或分母有理化的方法．

例4 求极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=1\cdot 2=2$

例5 求极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{xy}{x+y}$

$\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=0\cdot\dfrac{1}{2}=0\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\dfrac{xy}{x+y}=0\right.$

见例2）

4．利用一元函数中的已知极限 对含有三角函数或幂指函数的二重极限，首先要考虑它是否能通过变形或变量代换化为跟一元函数中几个基本极限，如

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, t}{t}=1,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

等有关的形式，然后利用这些基本极限去求它的极限值。

例6 求极限：（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{\sin xy}{\mathrm{tg}(x+y)}$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

【解】（1）因为$\frac{\sin xy}{\mathrm{tg}(x+y)}=\frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{x+y}{\mathrm{tg}(x+y)}\cdot\frac{xy}{x+y}$，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{\sin xy}{xy}=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{x+y}{\mathrm{tg}(x+y)}=1$，

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{xy}{x+y}=0$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{\sin xy}{\mathrm{tg}(x+y)}=1\cdot 1\cdot 0=0$$

（2）因为 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}$

$$=e^{\frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

故有

$$\lim_{\substack{x\to \\ y\to 1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\frac{x}{x+y}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\frac{x}{x+y}=\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e$$

例7 求极限：（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$,

$$（2）\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$$

【解】 （1）因为

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{(x^2y^2\ln(x^2+y^2))}$$

$$=e^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}$$

由于 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|<\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2$,

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$, 而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

$$=\lim_{t\to 0}t\ln t=\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}(-t)=0$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{0\cdot 0}=1$$

（2） 由于

$$\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=2\cdot\left(\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

$$=2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$=2\cdot 1^2\cdot 0=0$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\infty$$

5．利用夹逼准则

例8　证明：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$

【证】　因为当$x>0$，$y>0$时，$0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以　$0<\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$

由于　$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$　0，从而有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

6．利用定义　利用定义求二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to\xi\\ y\to\eta}}f(x,y)$时我们往往先以$y=k(x-\xi)+\eta$代入$f(x,y)$，然后去探求$\lim\limits_{\substack{y=k(x-\xi)+\eta\\ x\to\xi}}f(x,y)$（即令$(x,y)$沿各种不同的直线方向趋向$(\xi,\eta)$），看所得的结果$A$是否与$k$有关，如果与$k$有关，那末根据定义，可以肯定极限不存在。如果结果$A$与$k$无关，那末极限有可能存在。这时，我们用定义去验证$A$是不是所求的极限。当然，$(x,y)$沿各种直线趋向$(\xi,\eta)$的

结果相同时，也可能跟沿某一曲线趋向(ξ, η)时的结果不同，这时，极限仍然不存在。例如$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，因为

$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$与$k$有关，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在。又如$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$，因为$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$虽与$k$无关，但$(x, y)$沿抛物线$y=x^2$趋向$(0,0)$时，有$\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$，所以，$(x, y)$沿直线与沿抛物线趋向$(0, 0)$时，结果不同，从而极限仍然不存在。

求$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)$时，同样可以从$y=kx$代入$f(x,y)$，然后去探求$\lim\limits_{\substack{x\to kx\\y\to}}f(x,y)$入手，这里不再赘述。

例9　求极限：$\lim\limits_{\substack{y\to\infty\\x\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

【解】　$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$，以$y=kx$代入，得$f(x,kx)=\frac{1+k^2}{(1+k^4)x^2}$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x,kx)=0$。因此，零可能是所