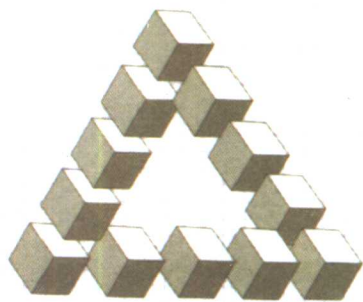
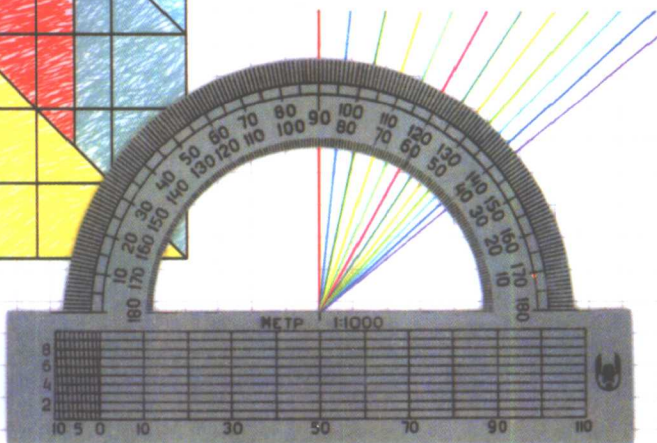
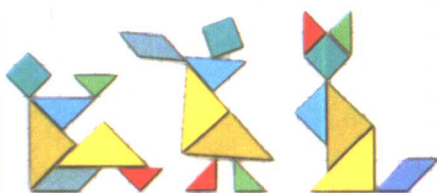
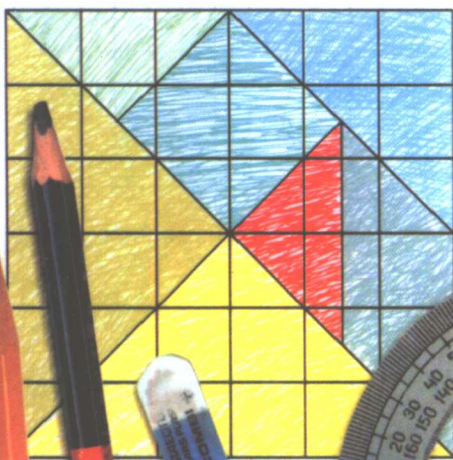
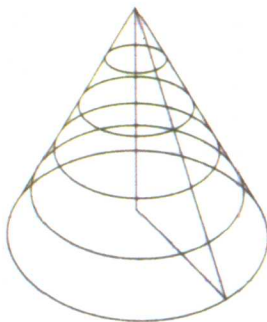
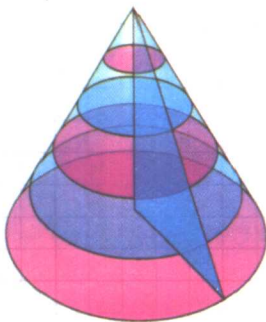


直观



(俄) И. Ф. Шарьгин 著
Л. Н. Ерганжиева
吕乃刚 译 张奠宙 校

几何



华东师范大学出版社

(俄) И. Ф. Шарыгин 著
Л. Н. Ерганжиева

吕乃刚 译 张奠宙 校
华东师范大学出版社

直观几何



图书在版编目(CIP)数据

直观几何/(俄)沙雷金等编;吕乃刚译. —上海:华东师范大学出版社,2000.12
ISBN 7-5617-2448-9

I. 直... II. ①沙... ②吕... III. 几何课-中学-课外读物 IV. G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第58674号

著 者 (俄) И. Ф. Шарьгин Л. Н. Ерганжиева

译 者 吕乃刚

校 者 张奠宙

责任编辑 陈信漪

封面设计 高山

版式设计 蒋克

出版发行 华东师范大学出版社

发行部 电话 021-62571961

传真 021-62860410

社 址 上海市中山北路3663号

邮编 200062

<http://www.hdsbook.com.cn>

照 排 南京理工排版校对有限公司

印 刷 者 华东师范大学印刷厂

开 本 787×960 16开

印 张 13.5

插 页 2

字 数 208千字

版 次 2001年1月第一版

印 次 2001年1月第一次

印 数 5100

书 号 ISBN 7-5617-2448-9/O·092

定 价 22.00元

出 版 人 朱杰人

01/ACCESS/

上海市版权局著作权合同登记号：图字：09-2000-412 号

© 《Дрофа》，1998

本书中文版由俄罗斯 Издательский дом 《Дрофа》出版社授权华东师范大学出版社独家出版发行。

观察世界,不能不感到惊奇。

——库兹马·普罗脱可夫

致亲爱的读者

当您刚打开这本书的时候,不会认为它是一本教科书。无论如何,它不像一本普通的教科书。本书将把您带入几何世界。然而,并非完全如此。事实上,从出生的那天起,您就被几何世界包围着。要知道,我们看到的周围一切,如长方形的窗户、雪花迷人的花纹、平行六面体的房屋、水珠、自行车的轮胎、绳结、抛出的石头所运动的轨迹等,所有这些都与几何学有关,任何东西都逃脱不掉几何学的关注。

我们期望,本书能帮助您睁大眼睛漫游几何世界,学会仔细观察周围的一切和发现一般物品的奥妙,从观察到思考,从思考到作出判断。

本书不应当只是读,而应当理解所读过的难点,仔细地考察图形。应当常常练习解题,如果对所做的题目感到困难,不能画出图形,也不要灰心。不要急于看题解,应多想一下,试试再作一些图。如果什么也没有获得,就看一下答案,弄清楚那里引入的题解。我们相信:美妙的几何学世界会渐渐地欢迎您,打开它的奥秘,而且您也会终身热爱几何学。

中文版序

首先,本书能在中国出版是我的莫大荣誉。中国是一个文明古国,也是一个几何学的文明古国。如果在几乎五分之一人类生活着的中国,能有一些学生、教师或其他人,通过这本书能学到些东西,能产生对几何学的兴趣,我是非常高兴的。

有一次我在联合国教科文组织出版的杂志中读到,在中国从久远的年代起就已经掌握了几何学的技巧,而且研究的主要工具甚至几乎是唯一的工具是图和画。文字几乎是不使用的,因为它们是错误的和迷妄的根源。这种对几何学的观点与我非常吻合,而且我尽力遵循古老中国的几何学匠师们的教诲。

祝愿所有走上认识几何学道路的中国读者获得成功和快乐,与几何学永不分离。请你们确信,几何学会给你们带来许多幸福的时刻,使你们的一生更有趣、更光辉或许会更为长寿。要知道,几何学不仅仅是发展智慧的手段,而且也是医治心灵和肉体上各种疾病的良药。

依·沙雷金

2000. 10

《直观几何》译校记

1999年9月,现任国际数学教育委员会(ICMI)执行委员、华东师范大学校长王建磐教授,带来了俄国I. V. 沙雷金教授等新编写的一套中学几何教材。我们打开一翻,顿觉眼前一亮。它是如此新颖和直观,竟和我们头脑中的前苏联数学教材全然不同了。

中国在1950年代实行“一边倒”、“全面学习苏联”的政策。无论其他领域的收获如何,在数学教育上确实大为受益。以数学上提倡抽象、注意严谨,体系上崇尚演绎和形式化的苏联数学教材,很快征服了当时的中国数学教育界。举例来说,苏联数学教材的内容,实行以函数为中心的安排,力图用数学描述“动态过程”,这就明显地比以“方程求解”为中心、注重“静态演算”型的英美教材体系更为深刻,立意远高出一筹了。

那时的几何教材,首先翻译过来的是基谢廖夫的《几何》,版权页载明那是由1915年沙皇时代的版本演变而来。经过千锤百炼,全书已经达到无懈可击的程度。公理化的体系,明白无误的论证,简明扼要的叙述,难易相间的习题,受到广大数学教师的欢迎和数学教育专家的称道。1949年之后,我国中小学的数学教育成绩斐然,当年的学习苏联无疑是重要的一步。

当然任何事物不会十全十美。苏联教材中的有些严格处理,叫人吃不消。记得1953年笔者到中学实习,引入坐标系之前,先要讲可公度线段和不可公度线段,再将有理数和无理数分别同数轴上的有理点和无理点构成一一对应。一条直观的数轴,经过如此严格处理,学生如堕五里雾中,教学效果可想而知。后来的中学数学教材,就把它简化了。实数和数轴上点的一一对应,成了大家公认的一个“数学平台”,承认它、使用它就是了,不必深究。这倒也从一个侧

面说明,中学数学的严格性是人为制定的,不是绝对的。

到了1960年代,苏联掀起了“数学教育改革”运动。领袖是世界级的数学大家 A. N. 柯尔莫哥洛夫。1967年,苏联庆祝“十月革命50周年”,数学教育改革迈开了大步。基谢廖夫的《几何》教材停止使用,代之以柯尔莫哥洛夫的新编教材。向量方法、几何变换成为教材的核心思想,浓厚的信息时代气息扑面而来。不过,柯尔莫哥洛夫的改革进行得并不顺利,当他于1987年病故的时候,这位在数学竞技场上的盖世英雄,却带着对数学教育改革的深深遗憾而离去。

代之而起的是另一位苏联几何学大家波戈列洛夫。他从自己设计的一套新公理展开平面几何,薄薄的一本,写得十分精练。综合的、演绎的、形式化的几何学体系重新在原苏联流行。但是,时代在前进,单纯地恢复到“欧氏几何”的样式,已不能满足当代青少年的需求。俄罗斯数学教育界已经感到这本书“太干巴巴了”。确实,数字化地球,数字化生存,数字化电视模式,数字化传送技术,不仅冲击着代数学和分析学,几何观念也受到影响。当电视画面在不断地移动、反转、放大缩小的时候,几何学不再只服从公理化的演绎。“几何学万岁”的口号,恐怕不能理解成为枯燥的、抽象的“欧氏几何”喝彩,也许更重要的是为直观的、可视的图形变换所带来的几何观念唱颂歌。

I. V. 沙雷金和 L. N. 叶尔冈日耶娃合作的《直观几何》正是在这样的背景下诞生的。

当我们把这本书带到在北京举行的“9年义务教育数学课程标准研讨会”时,许多同行和我们一样感到新奇。教育部基础教育司基础教育课程教材发展中心的刘兼同志表示,如果能够翻译,将给予支持。华东师范大学出版社立即行动,和作者签定了出版合同。译校工作就在2000年着手进行。

2000年8月,国际数学教育大会在日本东京举行。同为国际数学教育委员会的执行委员王建磐和沙雷金当然出席。我们在东京正式会面。一同前来的还有莫斯科大学教授 N. 杜勃林,他是 V. I. 阿诺尔德的学生,活跃的微分几何学家。杜勃林应邀在大会上作了45分钟的报告,题目是《俄罗斯中学里的几何:过去的传统和当前的状况》。他在介绍沙雷金等著的几何教材时这

样说：

“应当提到沙雷金的几何教材，它刚刚进入俄罗斯联邦教科书的行列。作者强调指出，学习集合的价值不仅是为了训练思维和它的实际应用。学习集合是因为它的古老、美丽，成为人类文化的有机组成部分。这本教科书包含了一系列的原始问题。沙雷金还为5~6年级的学生编制了一本非形式化的直观几何教材。该书很吸引人，能够引起学生对几何学的真正兴趣。沙雷金的这一批几何学教科书，似乎是可以接受的，因为它有望使得学习几何能感受到数学的乐趣和兴奋。”

现在，沙雷金的书已经放在大家的面前。我们期望它能对我们的几何观念的转变提供一些启示。

中国新的课程标准应当是怎样的？未来的几何学应当是怎样的？这是大家所关心的，笔者也同样在注视着。我们觉得，几何学习大致有四个步骤：直观感知——操作确认——思辨论证——度量计算。但是中国的几何教学，把前两个步骤忽略了。变成纯粹的思辨论证，以及论证基础上的计算。缺乏直观，实际上就扼杀了几何。

我们反对把几何简单地、狭隘地和日常生活相联系。不能要求学生的学习事事都在日常生活上有用，产生实际效益。数学是人类文化的一部分，而文化并不都能产生“经济效益”和“实用效果”。数学可以陶冶性情，提高文化品位，欣赏数学美学价值。

一种经常提到的说法是：“几何教学的作用是培养学生的理性思维能力”，非常正确。不过，有些同志似乎把理性思维理解得十分狭隘：仅仅注意到逻辑思维能力。其实，理性思维有多个侧面。首先是要有独立思考的意识，在真理面前人人平等，不迷信，不盲从。其次是要有探索真理的勇气，敢于创造、敢于发明、敢于发展，不墨守成规。第三，理性思维要求人们相信事实、面对现实、服从真理，不要固执己见。最后，理性思维需要有科学的思维方式，严格的科学态度，其中包括严密的逻辑思维。显然，把数学（特别是几何学）的功能局限于培养逻辑思维能力，是会“作茧自缚”的。

几何学的文化功能,除了认识周围的几何形状之外,应当把学生的经验提升到理论上来。如本书那样,折纸、火柴梗拼图、三视图、七巧板艺术、一笔画问题、欣赏爱舍尔的画等等,都是学生喜闻乐见的几何活动,为什么要将它们拒于几何学的大门之外呢?

当然,数学教育本身也是一种文化现象,没有一种观点是绝对正确的、无可辩驳的。数学教育的成果不像数学定理那样可以证明,它只能举例论证、据理说明。有的时候,只能“仁者见仁、智者见智”,或者说“公说公有理,婆说婆有理”。这里的议论,不过是读了沙雷金的教材,有感而发。观点是否正确,译校是否有错,均请读者不吝指正。

张奠宙 吕乃刚

2000年11月

于华东师范大学

目 录

1. 几何学初步	1	19. 由正方体和其部分构成的 图形	88
2. 空间与维数	4	20. 平行和垂直	94
3. 最简单的几何图形	10	21. 平行四边形	99
4. 由 T 构成	14	22. 坐标、坐标、坐标.....	105
5. 正方体和它的性质	16	23. 折纸	113
6. 图形的分割和拼接	21	24. 美妙的曲线	118
7. 三角形	24	25. 龙型曲线	123
8. 正多面体	34	26. 迷宫	127
9. 几何益智游戏	38	27. 网格纸几何	131
10. 长度的度量	41	28. 镜像	133
11. 面积和体积的度量	46	29. 对称	136
12. 长度、面积和体积的计算	50	30. 镶边	142
13. 圆	55	31. 装饰图	149
14. 几何训练	65	32. 用对称性解题	155
15. 拓扑实验	68	33. 圆的一个重要性质	158
16. 火柴问题	75	34. 问题、谜语、游戏	162
17. 密码通信	77	提示、答案、题解.....	172
18. 问题、谜语、游戏	80		

1

几何学初步

“我想,到现在为止,我们从没有生活在这样的几何时期:周围的一切都是几何学。”这是伟大的法国建筑家列·柯尔伯齐在 20 世纪初说的,它非常精确地刻画了我们的时代。我们生活的世界充满着房屋和道路、山丘和原野的几何学以及自然的和人类的创造物。本书将帮助你们更好地了解世界、发现新事物、领会周围世界的美和智慧。

几何学诞生于遥远的古代。住房和神殿的建造及其用图案加以装饰,土地的划分,距离和面积的度量等等,人们通过自己的观察和经验获得了有关物体形状、大小和彼此位置的知识。几乎全部古代和中世纪的伟大学者都是卓越的几何学家。古希腊哲学家柏拉图与自己学生在阿卡德姆丛林中进行谈话(阿卡德姆是古希腊神话中的英雄,传说葬在雅典不远的神圣的丛林中),“科学院”的拉丁名词即源于此。这一学派的座右铭中有一句是:“不懂几何学不准入内!”这些大概是 2 400 年以前的事。我们现在所谓的数学是由几何学发展起来的一门学科。

在直观几何学课上,你们会遇到有趣的难题和引人入胜的问题,如小纸人和几何游戏。观察和实验将是你们的经常伴侣。在完成作业时勤奋和认真正确将帮助你达到目的,在解题时诸如机警和敏慧也是同样重要的。

在课程进程中常常会遇到绘制某个图形或测量某个量的任务。在图 1 中你们可以看到完成这些任务所需要的东

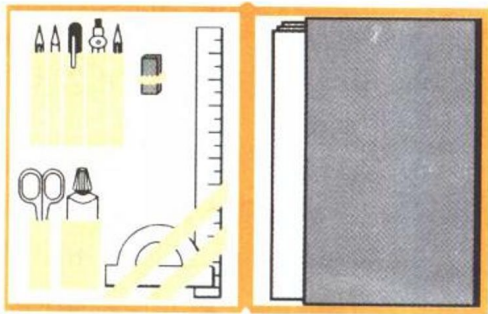


图 1

直观几何

西：直尺、圆规、量角器，它们是测量和绘图的工具。

用直尺可以：

- 画直线；
- 测量线段的长度；
- 作已知长度的线段。

我们将没有刻度的直尺称为数学直尺，用它只能画直线。

圆规能够：

- 画圆；
- 比较线段的长短(图 2)；
- 在直线上分出已知长度的线段。

量角器(图 3)使用于角的测量和构造。

量角器的刻度是将半圆分成 180 份。1 份称为度。量角器的刻度包含 180° (符号 $^\circ$ 代替词“度”)，用来测量角和圆弧。

请注意！量角器上有两个刻度！如果角边与量角器右半底重合，那么利用内刻度，而如果角边与量角器左半底重合，那么利用外刻度！

我们从一些习题开始。这些习题外貌十分多样，但是它们都以各种各样的形式与几何学有关。

好了，让我们踏上征途！祝一路平安！

1. 试用 6 根火柴，组成 4 个三角形(每一个三角形的边等于火柴的长)。

2. 用不同的方法把一正方形分割成 4 个相同部分；分割成 5 个相同部分。

3. 能否笔不离纸画出一只开口的信封(图 4)，使任何线段都只画一次？能不能画封口的信封(图 5)？

4. 如何把图 6 上所展出的图形割成两个相同的部分。

5. 西瓜切成 4 份，并且吃掉，得到 5 块皮。能否做到？

6. 怎样把一张纸割成图 7 上所画的图形？(不准粘接。)

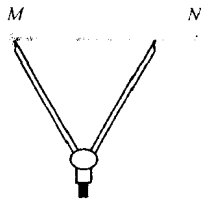
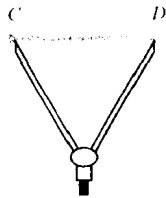


图 2

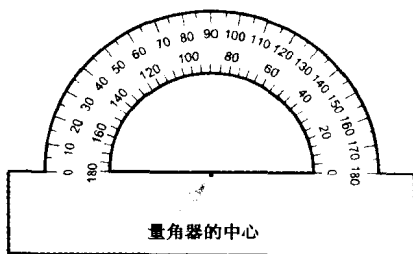


图 3

此箭头所指的内容
是最重要的，必须记住！

1. 几何学初步

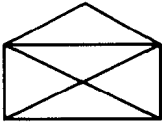


图 4

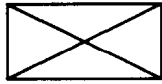


图 5

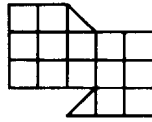


图 6

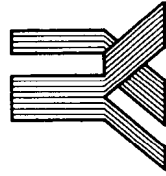


图 7

7. 4 个国家的地图都是三角形形状。如果每个国家与其他三个国家都有公共边界,国家彼此位置怎样? 画出它们的位置。

8. 一个木制的正方体外面涂上颜色。将它的棱 5 等分,然后从等分点把正方体锯开,得到许多小的正方体,它们的棱长是原来正方体棱长的 $\frac{1}{5}$ 。这样,一共有多少个小正方体? 其中多少个小正方体 3 面涂有颜色? 2 面涂颜色的有多少个? 只有 1 个面涂颜色的有多少? 有多少个小正方体各面都未涂颜色?

2 空间与维数

有一次一位著名的数学家试图对自己认识的诗人解释,什么是空间,诗人听了很久,最后说:“完全不是那么回事!我知道!空间是天蓝色的!鸟在其中飞翔!”遗憾的是,数学家眼里的空间要枯燥些。

几何学研究空间中图形的形状和彼此位置。这里是指环绕着我们的那个空间,让我们看看四周。

我们生活在3个维度的世界中。

这意味着什么?想像一下,我们面前立着一座房屋(图8)。我们想要描述它,说明它是怎么样的。我们说:“这座房屋前面有三个入口处,边上有两扇窗,有六层高。”总之,这对于房屋的概念完全够了。但是我们应当给出三个量——

长、宽和高。我们在谈论周围事物时,每天都在使用这三个量:树的高度、道路的长度、人行道的宽度……

我们周围世界的所有客体(物体)都有三个度量,尽管并非所有物体都可以指出其长度、宽度、高度。由长、宽、高三个量可以完全描述的几何物体是什么?这就是平行六面体。更确切些,是长方体。它的所有面都是矩形。很多物体有长方体的形状。譬如说,箱子、砖、横梁。长方体可以认为是我们空间的标志。的确,当我们说“长、宽和高”时,那么我们指的是测量以具体形式置于地球(或桌)上的长方体。在这种情况下我们把从地面垂直向上方向的度量称为高。如果我们不知道长方体怎样放着,那么讲长、宽和高就不确切,简单地说三

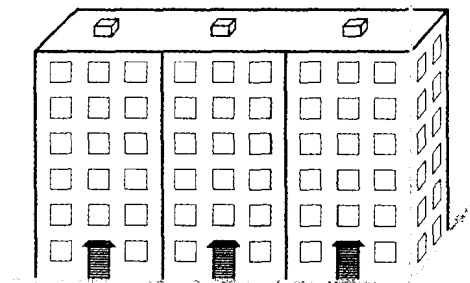


图8

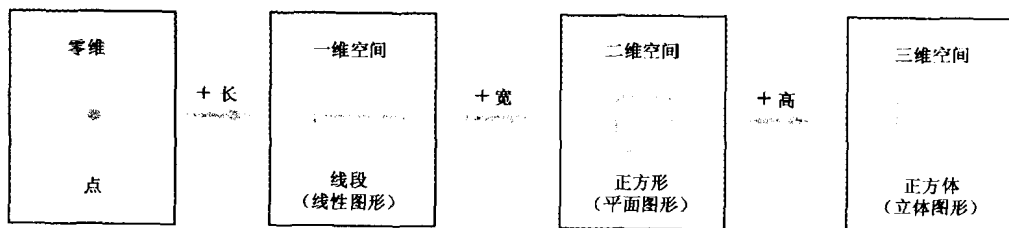
2. 空间与维数

个度量更好。现在,我们想像高消失了。整个世界变成平坦的,像一张纸一样,只留下两个度量——长和宽。


数学家说,平面是二维空间。在这个世界里有哪些几何图形可以“生存”?举例来说,这就是正方形、线段、圆。此外还有什么呢?请你们把自己也设想是平的。在你们周围有三角形、圆、正方形、线段和其他平面图形。说一说你会有什么感觉?你又会把它们看成怎样的?如果它们移动、旋转,将会发生什么?如果你们所在的平面与移动着的像穿过墙一样穿过平面的球相交,你们会看到什么?

继续想像的实验。现在再去掉宽度。留下具有一个度量——长的一维空间。这个世界完全在一条直线上;它的居民是线段、射线、点。他们彼此看作什么?

在惊人的几何学世界里也存在没有度量——长、宽、高的图形。你们猜得出这是什么吗?当然,这是点。



上面所举出的概略图指明,维数增加是怎样引起几何图形的改变和复杂化的。

 用竖线把练习本的一页划成两半,左边写出那些能安放在平面中的图形的名称(或者画出它们),右边写出那些不能安放在平面中的图形的名称(或者画出它们)。你能在每一栏中各指明 10 个图形吗?

很久以来,人们就试图把具有体积的物体画在平面上,而且能使它和平面图形区别开来,并且感受到它的空间深处这种“立体”特性。这就是曾经探讨过的能“欺骗”视觉的科学的

直观几何

透视理论。匈牙利画家维克托·瓦萨莱利的画“透视研究”是极好的例子(图9)。在该画中看到,向空间深处画去的线如何收敛于一点,而远离我们的图形以较小的尺寸画出。在图画课上你们将更详细地了解透视概念。

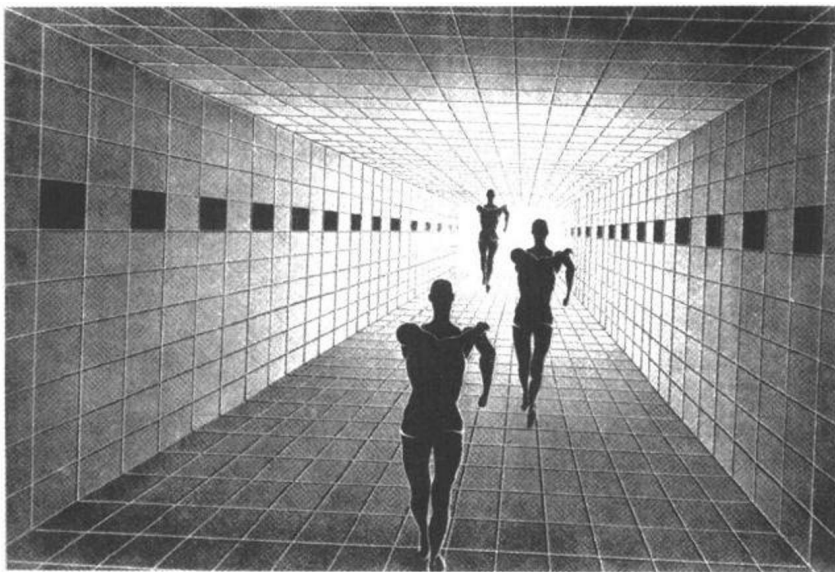


图9 维·瓦萨莱利 透视研究

透视并不是把三维空间画在平面上的唯一手段。

请仔细看一下,瓦萨莱利是如何用线条的弯曲成功地在平面纸上表达凹痕、凸状和圆锥形、圆点形的(图10、11)。



想出并在纸上画出有凸形和凹痕的图。

在几何学中为了容易领悟空间特性,商定用虚线画对观察者视线隐蔽的线,例如画正方体就采用图12a那样的形式。如果我们没有用虚线画(图12b),那么可能会产生这是否正方体的怀疑。也许这只是以一定形式拼成的一组三角形和四边形?即使我们看出了它是正方体,那么每次也都会有不同