OLYMPIC MATHS

奥林匹克数学训练题集

初三分册

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

与《奥林匹克数学》初三分册配套

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学训练题集．初三分册/钱展望，朱华伟编著
—武汉：湖北教育出版社，2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3148-4

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①钱…②朱…　Ⅲ．数学课-初中-习题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011132 号

出版　发行：湖北教育出版社 网址：http://www.hbedup.com	武汉市青年路 277 号 邮编：430015　传真：027-83619605 邮购电话：027-83669149

经　销：新　华　书　店	
印　刷：湖北新华印务有限公司	(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本：850mm×1168mm　1/32	5 印张
版　次：2002 年 3 月第 1 版	2002 年 3 月第 1 次印刷
字　数：124 千字	印数：1-5 000

ISBN 7-5351-3148-4/G·2554　　定价：8.00 元

目 录

测试题一 …… 1
测试题二 …… 5
测试题三 …… 11
测试题四 …… 15
测试题五 …… 20
测试题六 …… 25
测试题七 …… 30
测试题八 …… 37
测试题九 …… 43
测试题十 …… 49
测试题十一 …… 53
测试题十二 …… 57
测试题十三 …… 62
测试题十四 …… 68
测试题十五 …… 75
测试题十六 …… 81
测试题十七 …… 88
测试题十八 …… 94
测试题十九 …… 100
测试题二十 …… 105
测试题二十一 …… 108
测试题二十二 …… 113
测试题二十三 …… 117
综合测试题一 …… 124
综合测试题二 …… 131
综合测试题三 …… 139
综合测试题四 …… 144
综合测试题五 …… 151

测试题一

一、选择题

1.若方程$(1996x)^2-1995\cdot1997x-1=0$的较大根为 m,方程 $x^2+1995x-1996=0$ 的较小根为 n,则 $m-n$ 等于 (　　).

(A)1997　(B)1996　(C)$\frac{1996}{1997}$　(D)$\frac{1995}{1996}$.

2.如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根,那么关于 x 的方程$(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$的实根个数为 (　　).

(A)2　(B)1　(C)0　(D)不确定

3.若 x_o 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,则其判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_o+b)^2$ 的关系是 (　　).

(A)$\Delta<M$　(B)$\Delta=M$　(C)$\Delta<M$　(D)不能确定

4.关于 x 的方程$(a^2-4)x^2-2(a+2)x+1=0$恰有一个实数根,则 $a=$ (　　).

(A)2　(B)-2　(C)±2　(D)不存在

二、填空题

5.若方程 $x^2+ax+2b=0$ 有相等二实根,$x^2+2bx+a=0$ 也有相等二实根,且 $a\neq b$,则 $ab=$______.

6.已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根,则 $2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}$的值是______.

7.已知三个方程 $x^2+4mx+4m^2+2m+3=0$,$x^2+(2m+1)x+m^2=0$,$(m-1)x^2+2mx+m-1=0$ 中至少有一个方程有实数根,则 m 的取值范围是______.

8.对任意实数 a, b,用 $\max(a,b)$表示其中较大的数,则方程 $\max(x,-x)=22x+1$ 的不同解是______.

三、解答题

9. 已知 $pr>1$, $pc-2b+ra=0$, 求证：关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实数根.

10. 设 a, b 为正整数，两个二次项系数不相等的关于 x 的二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

与

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$

有一公共根，求 ab 的值.

11. 已知 a, b, c 都是正数，且关于 x 的方程

$$(c+a)x^2+2bx+(c-a)=0$$

有两个相等的实根，问 a, b, c 可否作为同一个三角形的三边的长？如果可以，试确定三角形的形状.

12. 设 $a_1\neq a_2$, 且 $(a_1+b_1)(a_1+b_2)=(a_2+b_1)(a_2+b_2)=1$, 求证：$(a_1+b_1)(a_2+b_1)=(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1$.

解　答

一、选择题

1. **解**　第一个方程可变为 $(x-1)(1996^2x+1)=0$, 得 $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{1996^2}$. 第二个方程可变为 $(x-1)(x+1996)=0$, 得 $x_3=1$, $x_4=-1996$. 于是 $m=1$, $n=-1996$, 故 $m-n=1997$. 选(A)

2. **解**　显然 $m\neq 0$. 因第一个方程没有实数根，故

$$\Delta=4(m+2)^2-4m(m+5)<0,$$

解得 $m>4$. 对于第二个方程，若 $m=5$, 则方程有且只有一个实数根；若 $m\neq 5$, $m>4$, 其判别式

$$\Delta=4(m+2)^2-4m(m-5)=4(9m+4)>0,$$

方程有两个不相等实数根. 故选(D).

3. **解**　$M=4a^2x_0^2+4abx_0+b^2=4a(ax_0^2+bx_0+c)+b^2-4ac=\Delta$. 选(B)

4. **解**　当 $a^2\neq 4$, 即 $a\neq\pm 2$ 时，

$$\Delta = 4(a+2)^2 - 4(a^2-4) = 16a+32 = 0,$$

解得 $a=-2$,舍去;当 $a=2$ 时,$x=\frac{1}{8}$;当 $a=-2$ 时,原方程无解.选(A).

二、填空题

5.**解** 二方程的根的判别式均为0,可得 $a^2=8b, a=b^2$.于是 $b^4=8b$,即 $b(b-2)(b^2+2b+4)=0$.因 $b^2+2b+4=(b+1)^2+3>0$,故 $b=0$ 或2.但 $b=0$ 时,$a=0$,与 $a\neq b$ 矛盾,而 $b=2$ 时,$a=4$,可得 $ab=8$.

6.**解** 依题设,有 $a^2-3a+1=0$,即 $a^2+1=3a, a+\frac{1}{a}=3$.

故原式 $=2(a^2-3a+1)+a-4+\frac{3}{3a}=-1$.

7.**解** 若三个方程均无实数根,则它们的根的判别式都小于0,于是

$$\begin{cases}(4m)^2-4(4m^2+2m+3)<0,\\(2m+1)^2-4m^2<0,\\(2m)^2-4(m-1)^2<0,\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{4}$.因此,当 $m\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant-\frac{1}{4}$ 时三个方程中至少有一个方程有实数根.

8.**解** 当 $x\geqslant -x$,即 $x\geqslant 0$ 时,$\max(-x,x)=x$.原方程变为 $x^2=2x+1$,解得 $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}$(舍去).当 $x<-x$,即 $x<0$ 时,$\max(-x,x)=-x$,原方程变为 $x^2+2x+1=0$,解得 $x_3=x_4=-1$.故方程的解为 $1+\sqrt{2}, -1$.

三、解答题

9.**证明** 依题设,$2b=pc+\mathrm{r}a$,于是

$$\begin{aligned}\Delta &= (2b)^2-4ac=(pc+\mathrm{r}a)^2-4ac\\&=(pc)^2+2\cdot pc\cdot \mathrm{r}a+(\mathrm{r}a)^2-4ac\\&=(pc-\mathrm{r}a)^2+4ac(p\mathrm{r}-1).\end{aligned}$$

因 $(pc-\mathrm{r}a)^2\geqslant 0, p\mathrm{r}-1>0$,且 $a\neq 0$,故 $ac\geqslant 0$ 时,$\Delta\geqslant 0$,又 $ac<0$ 时,$\Delta=(2b)^2-4ac>0$,所以 $\Delta\geqslant 0$ 恒成立,方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实数根.

10.**解** 依题设,$a>1, b>1, a\neq b$,两方程可变为

$$[(a-1)x-(a+2)](x-a)=0, \quad ①$$

$$[(b-1)x-(b+2)](x-b)=0. \quad ②$$

①的两根为 $x_1=a, x_2=\frac{a+2}{a-1}$,②的根为 $x_3=b, x_4=\frac{b+2}{b-1}$.显然 $x_2\neq x_4$,故 $x_1=x_4$ 或 $x_2=x_3$,均可变为

$$ab-a-b-2=0,$$

即
$$(a-1)(b-1)=3.$$

因 a,b 均为正整数,故$\begin{cases}a-1=1,\\b-1=3,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1=3,\\b-1=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=2,\end{cases}$得 $ab=8$.

11.**解** $\Delta=4b^2-4(c+a)(c-a)=4(b^2+a^2-c^2)=0$,可得 $a^2+b^2=c^2$. 又因 a,b,c 为正数,由

$$(a-b)^2<c^2<(a+b)^2,$$

可知$|a-b|<c<a+b$,故 a,b,c 可作为同一个三角形的三边的长,该三角形为直角三角形.

12.**证明** 依题设,可知 a_1,a_2 为方程

$$(x+b_1)(x+b_2)=1$$

的两个实数根.于是

$$(x+b_1)(x+b_2)-1=(x-a_1)(x-a_2).$$

令 $x=-b_1$,得

$$(a_1+b_1)(a_2+b_1)=-1.$$

同理
$$(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1.$$

测试题二

一、选择题

1. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根之比为 1:2,判别式的值为 1,则 p,q 的值分别为 (　　).

(A) $p=1,q=2$　　(B) $p=3,q=2$

(C) $P=\pm 3,q=2$　　(D) $p=3,q=\pm 2$

2. 如果方程 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ 的三根可以作为一个三角形的三边之长,那么 m 的取值范围是 (　　).

(A) $0\leqslant m\leqslant 1$　　(B) $m\geqslant \frac{3}{4}$

(C) $\frac{3}{4}<m\leqslant 1$　　(D) $\frac{3}{4}\leqslant m\leqslant 1$

3. 若方程 $x^2+px-q=0$ 的二根为 x_1,x_2,且 $x_1>1,p+q+3>0$,则 x_2 (　　).

(A) 小于 1　　(B) 等于 1

(C) 大于 1　　(D) 不能确定

4. 已知 a,b 是方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两个根,则 $(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)$ 的值为 (　　).

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

二、填空题

5. 已知方程 $2x^2-2ax+\frac{1}{2}a(a+4)=0$ 的两个实数根分别是 x_1,x_2,且 $(x_1-1)(x_2-1)=\frac{109}{100}$,则 $a=$______.

6. 已知 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根,则 $2\alpha^5+5\beta^3=$____.

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根,甲由于看错了二次项系数,误求得两根 2,4,乙由于看错了某一项的符

号,误求得两根为 -1 和 4,则$\frac{2b+3c}{a}=$______.

8.已知△ABC 的三边长 a,b,c 满足 $b+c=8,bc=a^2-12a+52$,则可确定△ABC 的形状是______.

三、解答题

9.已知关于 x 的二次方程

$$a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$$

有等根,求证:$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$.

10.设方程 $a_1x^2+b_2x+c_1=0(a_1\neq 0)$的根为 $1-a_1,1+a_1$,方程 $a_1x^2+b_1x+c_2=0$ 的根为$\frac{3}{a_1}-1,1-\frac{2}{a_1}$,又设方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 的两根相等,求 a_1,b_1,c_1 的值.

11.已知 a,b 分别满足$\frac{4}{a^4}-\frac{2}{a^2}-3=0,b^4+b^2-3=0$ 求$\frac{a^4b^4+4}{a^4}$的值.

12.若适当选取非零实数 p_0,q_0 为初始值,写出方程

$$x^2+p_0x+q_0=0, \quad ①$$

若①有实根 p_1,q_1 可再写出方程

$$x^2+p_1x+q_1=0, \quad ②$$

若②有实根 p_2,q_2,可再写出方程

$$x^2+p_2x+q_2=0. \quad ③$$

一般地,只要所写出的第 k 个方程 $x^2+p_{k-1}x+q_{k-1}=0$ 有实根 p_k,q_k 就可继写出第$(k+1)$个方程

$$x^2+p_kx+q_k=0.$$

依上述规则一直写下去,当写出第 1997 个方程 $x^2+p_{1996}x+q_{1996}=0$ 有二实根 p_{1997},q_{1997}时算“达标”,求证:可以找到选定初始值 p_0、q_0 的策略必定可以“达标”,并请你说明理由.

解　答

一、选择题

1.**解**　设方程两根为 $t, 2t$，根据韦达定理，有 $3t=-p, 2t^2=q$，可得 $p^2=\frac{9}{2}q$，又 $\Delta=p^2-4q=1$，所以 $q=2, p=\pm 3$. 选(C).

2.**解**　设 α, β 为方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根，原方程的另一根为 1.

由 $\Delta=4-4m\geqslant 0$，得 $m\leqslant 1$.

显然 $\alpha+\beta=2>1$，又由三角形两边之差小于第三边，知 $|\alpha-\beta|<1$，即 $(\alpha-\beta)^2<1$.

由韦达定理知

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4-4m<1,$$

解得 $m>\frac{3}{4}$. 所以 $\frac{3}{4}<m\leqslant 1$. 故应选(C).

3.**解**　根据韦达定理，可知 $x_1+x_2=-p, x_1x_2=q$，则

$$0<p+q+3=-x_1-x_2-x_1x_2+3,$$

于是

$$x_2<\frac{3-x_1}{1+x_1}=\frac{4}{1+x_1}-1<\frac{4}{1+1}-1=1.$$

选(A).

4.**解**　依题设，有 $a^2+(m-2)a+1=0$，即

$$a^2+ma+1=2a.$$

同理

$$b^2+mb+1=2b.$$

所以

$$(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)=2a\cdot 2b=4ab.$$

由韦达定理知 $ab=1$，所以 $(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)=4$，故应选(D).

二、填空题

5.**解**　依据韦达定理得 $x_1+x_2=a, x_1x_2=\frac{1}{4}(a+4)a$，于是

$$\begin{aligned}(x_1-1)(x_2-1)&=x_1x_2-(x_1+x_2)+1\\&=\frac{1}{4}a(a+4)-a+1\\&=\frac{1}{4}a^2+1=\frac{109}{100},\end{aligned}$$

所以 $a^2=\frac{36}{100}, a=\pm\frac{3}{5}$,又 $\Delta\geqslant 0$,即

$$(2a)^2-4\times 2\times\frac{1}{2}(a+4)a=-16a\geqslant 0,$$

故 $a\leqslant 0$.所以 $a=-\frac{3}{5}$.

6.**解** 依题设,有 $\alpha^2=\alpha+1, \beta^2=\beta+1, \alpha+\beta=1$,于是

$$\begin{aligned}2\alpha^5+5\beta^3&=2\alpha(\alpha+1)^2+5\beta(\beta+1)\\&=2\alpha(\alpha^2+2\alpha+1)+5\beta^2+5\beta\\&=2\alpha(\alpha+1+2\alpha+1)+5(\beta+1)+5\beta\\&=6\alpha^2+4\alpha+10\beta+5\\&=6(\alpha+1)+4\alpha+10\beta+5\\&=10(\alpha+\beta)+11\\&=21.\end{aligned}$$

7.**解** 对于甲,根据韦达定理,有 $-\frac{b}{a'}=6, \frac{c}{a'}=8$,故 $-\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$.对于乙,根据韦达定理,有 $\left|\frac{b}{a}\right|=3, \left|\frac{c}{a}\right|=4$.因 $\Delta=b^2-4ac<0$,故 $ac>0$,于是 $\frac{c}{a}=4$.因此,$\frac{b}{a}=-3$,有

$$\frac{2b+3c}{a}=2\cdot\frac{b}{a}+3\cdot\frac{c}{a}=2\times(-3)+3\times 4=6.$$

8.**解** 根据韦达定理的逆定理,可知 b, c 是方程 $x^2-8x+a^2-12a+52=0$ 的两根,故

$$\begin{aligned}\Delta&=8^2-4(a^2-12a+52)\\&=-4(a^2-12a+36)=-4(a-6)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

可得 $a=6$.此时 $b=c=4$,$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

三、解答题

9.**证明** 当 $x=1$ 时,方程的左边等于右边,都为 0,故方程含有实数根 1.又方程有等根,根根据韦达定理,可得

$$\frac{c(a-b)}{a(b-c)}=1,$$

即 $$c(a-b)=a(b-c),$$

所以 $$2ac=b(a+c),$$

即 $$\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

10.**解** 利用韦达定理,由第一个方程得

$$\frac{c_1}{a_1}=(1-a_1)(1+a_1)=1-a_1^2,$$

即 $$c_1=a_1-a_1^3$$

由第二个方程得

$$\frac{b_1}{a_1}=-\left[\left(\frac{3}{a_1}-1\right)+\left(1-\frac{2}{a_1}\right)\right]=-\frac{1}{a_1},$$

即 $b_1=-1$.

于是第三个方程变为

$$a_1x^2-x+(a_1-a_1^3)=0$$

由于它的两根相等,故有

$$1-4a_1(a_1-a_1^3)=0,$$

即 $$(1-2a_1^2)^2=0.$$

所以 $a_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,$c_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.因此 a_1,b_1,c_1 有两组值:$\frac{\sqrt{2}}{2},-1,\frac{\sqrt{2}}{4}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11.**解** 依题设,得$\left(\frac{2}{a^2}\right)^2-\frac{2}{a^2}-3=0$,$(-b^2)^2-(-b)^2-3=0$.又$\frac{2}{a^2}>0$,$-b^2\leqslant 0$,即$\frac{2}{a^2}\neq -b^2$,故$\frac{2}{a^2}$和$-b^2$ 是关于 x 的一元二次方程$x^2-x-3=0$的不同两根.由韦达定理得

$$\frac{2}{a^2}+(-b^2)=1,$$

$$\frac{2}{a^2}\cdot(-b^2)=-3.$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{a^4b^4+4}{a^4}&=b^4+\frac{4}{a^4}\\&=\left[\frac{2}{a^2}+(-b^2)\right]^2-2\cdot\frac{2}{a^2}\cdot(-b^2)\\&=1^2-2\times(-3)=7.\end{aligned}$$

12.**解** 只须任取实数 $p_0>0,q_0<0$ 即可.这时 $p_0^2-4q_0>0$,方程一定有不等实根 p_1,q_1.又因 $p_1q_1=q_0<0$,故 p_1,q_1 必定一正一负.于是只须取 $p_1>0,q_1$

<0,写出方程 $x^2+p_1x+q_1=0$,这样下去,…,一般地,设已选定 $p_k>0$, $q_k<0$,则可以写出方程 $x^2+p_kx+q_k=0$ 必有实根,且一正一负,记正根为 p_{k+1},负根为 q_{k+1}又可写出方程 $x^2+p_{k+1}x+q_{k+1}=0$,而这个方程判别式 $\Delta>0$, $q_{k+1}<0$,又有两个异号实根 p_{k+2}, q_{k+2},…,可以无限进行下去.当然按上述规则可以保证写出第 1997 个方程 $x^2+p_{1996}x+q_{1996}=0$ 有二实根 p_{1997}, q_{1997},从而"达标".

测试题三

一、选择题

1.若关于 x 的整系数一元二次方程 $x^2+2mx+2n-1=0$ 有一个整数根,则它的另一根 (　　).

(A)一定是整数　(B)一定是正整数

(C)可能是无理数　(D)不是无理数也可能不是整数

2.如果有理数 a 使方程

$$2x^2+(a+1)x-(3a^2-4a+b)=0$$

的根总是有理数,则 b 的值应为 (　　).

(A)1　(B)-1　(C)大于 1　(D)不存在

3.若 p,q 为正整数,方程 $px^2-qx+1985=0$ 的两个根都是素数,则 $12p^2+q$ 的值等于 (　　).

(A)404　(B)414　(C)1996　(D)1998

4.若方程 $x^2-mnx+m+n=0$ 有整数根,且 m,n 为正整数,则 mn 的值有 (　　).

(A)1 个　(B)3 个　(C)5 个　(D)无数个

二、填空题

5.已知 k 为整数,关于 x 的二次方程 $(k^2-1)x^2-3(3k-1)x+18=0$ 有两个正整数根,则 $k=$______.

6.关于 x 的方程 $x^2+kx+4-k=0$ 有两个整数根,则 k 的值为______.

7.若 k 为正整数,关于 x 的方程 $(k-1)x^2-px+k=0$ 有两个正整数根,则 $pk=$______.

8.两个素数 p,q 是整系数方程 $x^2-99x+m=0$ 的两根,则 $\frac{q}{p}+\frac{p}{q}=$______.

三、解答题

9. 设 m 为正整数，求证：方程 $x^2-(4m-1)x+(2m-5)=0$ 的两根都不是整数.

10. 若 p 是素数，且方程 $x^2+px-444p=0$ 的两个根均为整数，求 p 的值.

11. 已知 a,b 为整数，且 $a>b$，方程

$$3x^2+3(a+b)x+4ab=0$$

的两个根 α,β 满足 $\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$，试求所有的整数对 (a,b).

12. 已知 t 为方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，求有理数 b,c，使得 $(t+a)(bt+c)=1$ 对任一给定的有理数 a 都成立.

解　答

一、选择题

1. **解**　设方程两根为 x_1,x_2，且 x_1 为整数，因 $x_1+x_2=-2m$（整数），故 $x_2=-2m-x_1$ 也为整数. 选(A).

2. **解**　依题设，

$$\begin{aligned}\Delta&=(a+1)^2+8(3a^2-4a+b)\\&=25a^2-30a+1+8b\\&=(5a-3)^2+8(b-1)\end{aligned}$$

恒为平方数，故 $b=1$. 选(A).

3. **解**　根据韦达定理，方程两根 x_1,x_2 满足

$$x_1x_2=\frac{1985}{p}=\frac{5\times397}{p},$$

因 5 和 397 都是素数，且 x_1,x_2 也都是素数，故 $p=1$，x_1,x_2 分别为 5,397，

$$x_1+x_2=\frac{q}{p}=q=5+397=402.$$

于是　　$12p^2+q=12+402=414.$

选(B).

4. **解**　设方程两根为 x_1,x_2，根据韦达定理，有 $x_1+x_2=mn>0$，$x_1x_2=m+$

$n>0$,于是 x_1,x_2 都为正数且

$$-(x_1+x_2)+x_1x_2=-mn+m+n,$$

即
$$(x_1-1)(x_2-1)+(m-1)(n-1)=2.$$

其中 $x_1-1,x_2-1,m-1,n-1$ 均非负.不妨设 $m\leqslant n$,则 $m=2,n=3$ 或 $m=n=2,m=1,n=5$.故 mn 的值有且仅有 3 个:6,4,5.选(B).

二、填空题

5.**解** 原方程可变为

$$[(k+1)x-6][(k-1)x-3]=0,$$

于是方程两根为 $x_1=\dfrac{6}{k+1},x_2=\dfrac{3}{k-1}$.因两根应为正整数,故 $k=2$.此时 $x_1=2,x_2=3$.

6.**解** 设方程的两整数根为 x_1,x_2,根据韦达定理,得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-k, & ①\\ x_1x_2=4-k. & ② \end{cases}$$

①-②得
$$x_1+x_2-x_1x_2+4=0,$$

可得
$$(x_1-1)(x_2-1)=5. \qquad ③$$

不妨设 $x_1\leqslant x_2$,由③可知 $\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1-1=-5,\\x_2-1=-1.\end{cases}$ 解得 $x_1+x_2=8$ 或 $x_1+x_2=-4$.所以 $k=-8$ 或 4.

7.**解** 设方程的两正整数根为 x_1,x_2,根据韦达定理,有

$$x_1-x_2=\frac{k}{k-1}=1+\frac{1}{k-1}.$$

则 $k=2,x_1,x_2$ 为 1,2,进而知 $x_1+x_2=3$.故 $pk=6$.

8.**解** 根据韦达定理,有 $p+q=99,pq=m$.因 p,q 都是素数,不妨设 $p\leqslant q$,则 $p=2,q=97,m=194$.于是

$$\frac{q}{p}+\frac{p}{q}=\frac{q^2+p^2}{pq}=\frac{(p+q)^2-2pq}{pq}$$
$$=\frac{99^2-2m}{m}=\frac{99^2-2\times194}{194}=\frac{9413}{194}.$$

三、解答题

9.**证明** 因

$$\Delta=(4m-1)^2-4(2m-5)=16(m^2-m)+21$$

为奇数,且 Δ 被 8 除余 5,故 Δ 一定不会是平方数,方程的两根都不是整数.

10.**解**　设 x_1,x_2 是原方程两根,根据韦达定理,有 $x_1x_2=-444p$.因 p 为素数,故 x_1,x_2 中有一个是 p 的倍数.不妨设 $x_1=kp$(k 为整数),又 $x_1+x_2=-p$,故

$$x_1\cdot x_2=kp[-(k+1)p]=-k(k+1)p^2=-444p,$$

即 $$k(k+1)p=2^2\times3\times37,$$

故 $k=3$,此时 $p=37$.

11.**解**　根据韦达定理,得

$$\alpha+\beta=-(a+b), \quad ①$$

$$\alpha\beta=\frac{4}{3}ab, \quad ②$$

依题设,又有

$$(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta=1. \quad ③$$

将①,②代入③得

$$(a+b)^2-4ab=1, \quad ④$$

即 $(a-b)^2=1$.又 $a>b$,所以 $a-b=1$.由 $\Delta\geqslant0$ 可得

$$3(a+b)^2\geqslant16ab, \quad ⑤$$

由④,⑤得 $$(a+b)^2\leqslant4. \quad ⑥$$

将 $a=b+1$ 代入⑥解得 (a,b) 为 $(1,0)$,$(0,-1)$.

12.**解**　显然 t 是无理数,且 $t^2-3t+1=0$,即 $t^2=3t-1$.依题设,有

$$(ab+3b+c)t-b+ac-1=0.$$

这里 a,b,c 为有理数,且对任一给定的有理数 a 上式成立,故

$$\begin{cases}ab+3b+c=0,\\-b+ac-1=0,\end{cases}$$

解之,得 $b=-\dfrac{1}{a^2+3a+1}$,$c=\dfrac{a+3}{a^2+3a+1}$.