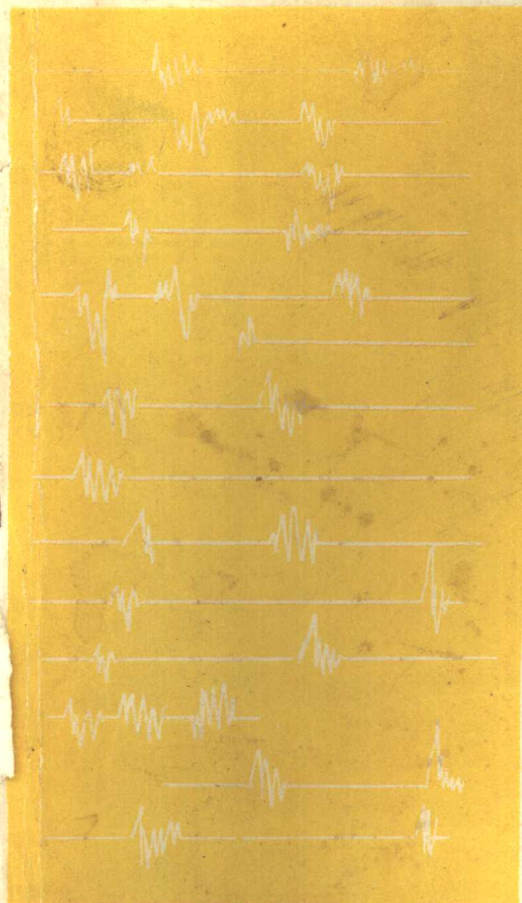

LUBO LILUN

# 滤波理论

李文清　施鼎汉　蔡建立

# 滤 波 理 论

李文清 施鼎汉 蔡建立 编著

厦 门 大 学 出 版 社

**滤 波 理 论**

李文清 施鼎汉 蔡建立 编著

●

厦门大学出版社出版发行

福建第二新华印刷厂印刷

●

开本787×1092 1/16 14 印张 337千字

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7—5615—0211—7/O·8

定价：2.80 元

## 内 容 简 介

本书按历史发展的顺序，由浅入深地介绍门式滤波、维纳滤波和卡尔曼滤波的基本思想和方法。同时也用工程数学的观点介绍现代滤波理论的基本工具——随机微分方程。为具有微积分、线性代数知识，又兴趣于现代控制理论，尤其是：滤波理论与随机系统的读者提供一个入门的导引。

本书是作者多年教学实践的总结，可作为控制理论、系统科学、电子科学、应用数学等专业的教材和教学参考书。

# 前　言

在第二次世界大战期间，维纳和罗森勃吕特领导了每月一次的科学方法讨论会，产生一个新的学科——控制论。1949年维纳的名著《控制论》问世（由郝季仁译为中文，1962年出版）。这本著作对信息论和通讯、计算机科学给出综合的介绍。随着科学技术的进步，控制论思想的工程实现产生各种各样的自动机，归根到底它们是传递信息的控制系统。

一个闭环系统的分析设计包括：系统结构分析，干扰讯号的排除以及在一定性能指标下控制器的优化设计三大组成部分。源于这种实际问题产生了系统辩识，滤波理论及最优控制。随着六十年代新的产业革命的兴起，控制系统理论日益受到科学技术界的重视，于是应运而生的贝尔曼的动态规划，庞特里雅金的极大值原理，维纳——卡尔曼的滤波理论构成现代控制系统科学的三大支柱。过去在机器使用的初级阶段，人眼观测讯号，人脑决策，人手启动开关转化为讯号识别，优化决策，自动开关的闭环系统。由于噪声对系统的干扰往往造成讯号失真，引起决策的失误，因而如何恢复真实讯号引起种种对策，而探讨这种对策的研究促进了信息论，滤波理论的发展。讯息传递中如何排除噪声是滤波理论的核心，它是系统科学的主要组成部分。

本书是滤波理论的入门书。我们用历史是连续的这一观点来写。按历史发展顺序先介绍门式滤波，再介绍维纳滤波，最后介绍卡尔曼滤波及随机微分方程。我们赞同瑞典著名学者阿斯特姆的观点“在工程问题上用一简单方法能解决的，故意用复杂的数学方法去解决是愚蠢的，”不赞同由后来的学说把以前的全部否定的做法。特别是那些可用简单计算方法就解决的课题更是如此。因而在写法上也注意尽量用简单的方法说明基本思想而不只追求数学上的严密性。这样由简单到复杂，由过去到现在的介绍，便于读者比较学习，容易掌握，使搞实际工作的科技人员可选取他认为方便的方式开拓思路解决问题。

本书的内容自1974年起在我校计算机与系统科学系作为本科生教材多次使用，并在使用中逐步修改充实。最后两章可能更适合于作为研究生的教材或参考资料。出版后欢迎读者提出宝贵意见，以便进一步修改。林成德博士认真审阅了书稿，并提出宝贵意见。本书的出版还得到国家自然科学基金，厦大科研处和出版社的支持。对于上述各方的支持，作者深致谢意。

作者于厦门大学

1988年 9月

# 目　　录

## 第一篇　门式滤波与维纳滤波



## 第二篇　卡尔曼滤波

# 第一篇　门式滤波与维纳滤波

## 第一章　门式滤波

### §1．周期信号的频域表示

在滤波理论中，维纳、李郁荣等人用信号的振幅、频率来考虑问题，这种方法是所谓的频域方法。门式滤波是在频域上处理和解决问题的。

物理信号通常是时间函数，可以记为 $f(t)$、$s(t)$等，这种表示称为信号的时域表示。那么，一个信号在频域上如何表示？分两种情况：周期信号和非周期信号。本节先讨论周期信号情形。

所谓周期信号 $f(t)$是指它作为时间函数是一个周期函数，即存在$T>0$使下式成立：

$$f(t+T)=f(t) \qquad t\in R^1$$

最简单最基本的周期函数如：

$$\sin t,\ \cos t \qquad \text{周期}T=2\pi$$

$$\sin\omega t,\ \cos\omega t \qquad \text{周期}T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$A\sin(\omega t+\omega),\ B\cos(\omega t+\psi) \qquad \text{周期}T=\frac{2\pi}{\omega}$$

其中 $\omega$ 为角频率，$A$、$B$为振幅；$\varphi$、$\psi$为相角；$T$的倒数 $f=\frac{1}{T}$是一个重要的物理量，称作频率。

一个一般的周期函数 $f(t)$，当它满足一定的条件（如分析或高数中的狄氏条件：在一个周期上分段单调，只有有限个一类间断点），那么可以展开为傅立叶级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1.1.1}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt \qquad n=0,\ 1,\ 2\cdots \tag{1.1.2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt \qquad n=1,\ 2\cdots$$

$T$为$f(t)$的周期而$\omega=\frac{2\pi}{T}$

物理上称$\omega$为基频。$a_n$、$b_n$称为$f(t)$的傅立叶系数。为简便计，我们约定，傅立叶级数、傅立叶系数简记为$F$-级数、$F$-系数等。

从上述二式可看出，已知$f(t)$按（1.1.2）可以确定出$a_n$及$b_n$从而得到$f(t)$的$F$-级数，反之已知$a_n$、$b_n$按（1.1.1）式可以完全决定出$f(t)$来，因此周期信号$f(t)$与它的$F$-级数是一一对应的。

通常称$\cos n\omega t$、$\sin n\omega t$为简谐振动。$f(t)$的(1.1.1)表达式说明了它可以表成一系列简谐振动的迭加。迭加波是日常常见的现象，如海面波浪，音乐会上听的协奏曲，或一个发生振荡的电子装置，都是迭加波的例子。

因为$f(t)$的这种表达式把组成该信号的各谐波成份的振幅、频率都表征出来，因此我们称$F$-级数为信号$f(t)$的（一种）频域表示，有时也简称$\{a_n, b_n\}$为$f(t)$的频域表示或频谱。

为了便于得到周期函数的一种今后更常用到的复的$F$-级数，我们来考察把$f(t)$展为$F$-级数的实质是什么。与此有关，下面先介绍内积空间中的正交系的概念。

内积空间首先是线性空间。设$H$是数域$F$上的线性空间，如在其上定义有一个满足下述条件的复的二元函数$(x, y)$：

i) $(x, x)\geqslant 0$；$(x, x)=0 \iff x=0$ $\quad x\in H$

ii) $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1(x_1, y)+\alpha_2(x_2, y)$ $\quad x_i\in H$，$y\in H$，$\alpha_i\in F$，$i=1, 2$。

iii) $(x, y)=\overline{(y, x)}$

那么称$H$按$(\cdot,\cdot)$为一个内积空间，$(\cdot,\cdot)$称为内积函数。

典型和最常见的内积空间的例子是：

**例1.1.1** $n$维欧氏空间$E^n$当然是一个线性空间，对任意$x=(x_1, \cdots, x_n)\in E^n$、$y=(y_1, \cdots y_n)\in E^n$，$E^n$按通常内积$(x,y)$：

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

为一内积空间。

**例1.1.2** $[a, b]$区间上平方可积的复函数全体记为空间$L^2[a, b]$，显见是一线性空间，它按：

$$(f, g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

为一内积空间。因为容易验证按上式定义的二元函数$(f, g)$是一个内积函数。

在解析几何中，二个非零向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$的夹角$\theta$的余弦为零即$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$时：

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|a|\cdot|b|}=0$$

我们称$a$与$b$垂直。垂直这概念推广到一般的内积空间来就是正交的概念。

设$H$是一个内积空间，$x$、$y\in H$，若$(x, y)=0$，则称$x$与$y$正交。若$\{\varphi_n\}\subset H$是$H$中的有限或可列个非零向量，满足：

$$(\varphi_i, \varphi_j)=0 \qquad i\neq j\text{时}$$

$$(\varphi_i, \varphi_i)\neq 0 \qquad \text{对任意}i\text{成立}$$

那么称$\{\varphi_n\}$为$H$的一个正交系。正交系的具体形式是多种多样的。今后常用到的主要有以下几种。

**例1.1.3** $L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$空间中的函数集$\{1, \cos\omega t, \cos2\omega t, \cdots\cdots, \sin\omega t, \sin2\omega t, \cdots\cdots\}$按内积

$$(x, y)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$$

是$L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上的一个正交系。因该正交系中每一个函数与自身的内积恒为1，也称其为一个标准正交系。当$T=2\pi$时是一个重要的特殊情况，此时的空间是$L^2[-\pi, \pi]$，而上述正交系相应变成：$\{1, \cos t, \cos2t, \cdots\cdots, \sin t, \sin2t, \cdots\cdots\}$（此时$\omega=\frac{2\pi}{T}=1$）

**例1.1.4** $L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$空间中的函数列$\{e^{in\omega t}, n=0, \pm1, \cdots\cdots\}$按内积：

$$(x, y)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$$

是$L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上的一个标准正交系。在$T=2\pi$时得到一个重要的特殊情形：$\{e^{int}, n=0, \pm1, \cdots\cdots\}$按内积：

$$(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$$

是$L^2[-\pi, \pi]$上的一个标准正交系。

对$E^n$而言，它的任一标准正交基都是它的标准正交系。设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是它的一个标准正交基，那么$E^n$中的任一向量都可以表为：

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n \tag{1.1.3}$$

上式称为$x$按$\{e_1,\cdots,e_n\}$分解的展开式，每个$x_i$称为$x$对应于$e_i$的坐标，并且$x_i$等于$x$与$e_i$的通常内积，实际上对(1.1.3)式两边与$e_i$取内积，并注意到$\{e_1,\cdots,e_n\}$是标准正交系就有：

$$\begin{aligned}(x,e_i)&=(x_1e_1+\cdots+x_ne_n, e_i)\\&=x_i(e_i, e_i)\\&=x_i\cdot1=x_i\end{aligned}$$

因而$x$关于$\{x,\cdots,x_n\}$的展开式(1.1.3)可以写成：

$$\begin{aligned}x&=(x, e_1)e_1+\cdots+(x, e_n)e_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\end{aligned}$$

其实，与$E^n$中向量按正交系展开的情形类似，一般的内积空间中的任一向量，均可以将之按该空间的正交系进行正交分解展开。记$f$为该空间的一向量，$\{e_n\}$为该空间的一个正交系，若$f$按$\{e_n\}$的展开式是：

$$f=\sum_n x_n e_n \tag{1.1.4}$$

那么应有

$$x_n=(f,\ e_n)/(e_n,\ e_n)$$
$$=(f,\ e_n)\qquad\text{（当}\{e_n\}\text{是标准正交系时）}$$

上式的得到只须将（1.1.4）式两边与 $e_n$ 取内积并注意到$\{e_n\}$的正交性即可。

那么，$f$ 按$\{e_n\}$的展开式（1.1.4）可以写成：

$$f=\sum_n (f,\ e_n)\cdot e_n \tag{1.1.5}$$

式（1.1.3）与式（1.1.5）形式上是一致的。

下面我们来说明，把一个周期为$T$的函数 $f(t)$展为式（1.1.1）所示的$F$-级数实质上是把 $L^2\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$中向量 $f$ 按正交系$\{1,\ \cos\omega t,\ \cos2\omega t,\ \cdots\cdots,\ \sin\omega t,\ \sin2\omega t,\ \cdots\cdots\}$分解展开的问题。为此，把（1.1.1）式重写于下：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1.1.1}$$

因为由（1.1.2）式我们实际上有：

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt=(f(t),\ \cos n\omega t)\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt=(f(t),\ \sin n\omega t)\qquad n=1,2,\cdots$$

那么，$f(t)$的展开式(1.1.1)的通项在本质上与（1.1.5）式的通项是一样的：每个通项都是两个因子的乘积，第二个因子同样是正交系中的元素，而另一因子即系数也同样都是被展的向量与该元素的内积。因此，把一周期函数展为$F$-级数实际上是把它按一个正交系分解展开。

上述正交系是实的，所得的$F$-级数（1.1.1）式称为$f(t)$的实的$F$-级数。今后要用到的$f(t)$的一种更为重要的所谓复的$F$-级数，实际上是把$f(t)$按前面例中的另一复的正交系

$$\{e^{in\omega t},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$$

进行正交分解的展开式。对此我们稍后再详细介绍。下面先举一个把周期函数展为实的 $F$-级数的例子。

**例1.1.5** 如图1.1.1所示，设周期函数$f(t)$为：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & 2k\pi-a\leqslant t\leqslant 2k\pi+a\quad k=0,\pm1,\cdots\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

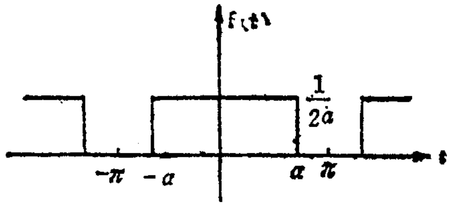


图 1.1.1

其中$0<a<\pi$。这里$T=2\pi$，$\omega=1$。

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}dt=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\cos ntdt$$

$$=\frac{1}{2a\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nt\Big|_{-a}^{a}=\frac{\sin na}{an\pi}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{n}\cos nt\Big|_{-a}^{a}$$

$$=0\qquad\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

所以

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{na\pi}\cos nt$$

$f(t)$与它的$F$-级数的$F$-系数有如下的重要关系式，所谓Parseval 等式，即若

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\qquad(1.1.1)$$

则

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\qquad(1.1.5)$$

下面证明（1.1.5）式。把（1.1.1）式两边平方得：

$$f^2(t)=\frac{a_0^2}{4}+2\cdot\frac{a_0}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)+$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty}[a_ma_n\cos m\omega t\cos n\omega t+b_mb_n\sin m\omega t\sin n\omega t+$$
$$+a_mb_n\cos m\omega t\sin n\omega t+a_nb_m\cos n\omega t\sin m\omega t]$$

对上式两边都乘以$\frac{2}{T}$后从$-\frac{T}{2}$到$\frac{T}{2}$积分，注意到三角函数系的正交性及三角函数在一个周期上积分为 0 得：

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\qquad(1.1.6)$$

或写成：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)dt=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Parseval等式（1.1.5）有以下的意义。

在物理上，（1.1.5）式表示平均功率可由各谐波分量的振幅的平方表示出来。

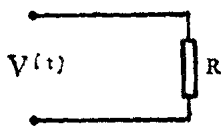


图 1.1.2

考虑如右图所示的电路。其中$V(t)$是一周期为$T$的周期电压，电阻$R$的阻值为$1\Omega$。

电学上有公式：瞬时功率$p(t)$为：

$$p(t)=V^2(t)/R$$

那么，$V(t)$在一个周期$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上的平均功率为：

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V^2(t)/Rdt$$

$$=\frac{1}{RT}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V^2(t)dt$$

鉴于此，我们今后对一个周期为$T$的信号$V(t)$，总称$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V^2(t)dt$为其在一个周期上的平均功率。

若把$V(t)$展为$F$-级数：

$$V(t)=\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

那么根据$Parseval$等式（1.1.5）有

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V^2(t)dt=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

因而平均功率可由$F$-系数的平方和表出。

在数学上，设$f(t)$是$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上的函数，我们试图以如下的三角多项式逼近$f(t)$：

$$g(t)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t)\qquad \left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

问：诸系数$\alpha_i$、$\beta_i$如何确定才能使逼近的均方误差最小：

$$\varepsilon=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(f(t)-g(t))^2dt=\min$$

为回答这问题，我们把$f(t)$在$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上展为$F$-级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

那么：

$$F(t)\overset{\Delta}{=}f(t)-g(t)=\frac{1}{2}(a_0-\alpha_0)+\sum_{n=1}^{N}(a_n-\alpha_n)\cos n\omega t+(b_n-\beta_n)\sin n\omega t+$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\qquad (1.1.7)$$

若记 $A_i = a_i - \alpha_i \qquad i \leqslant N$

$B_i = b_i - \beta_i \qquad i \leqslant N$

$A_i = a_i, \quad B_i = b_i \qquad i > N$

那么上式可写成

$$F(t) = f(t) - g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \tag{1.1.8}$$

对（1.1.8）式运用Parseval等式并注意到（1.1.7）有：

$$e = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - g(t))^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$$

$$= \frac{1}{4}(a_0 - \alpha_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[(a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2] + \sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{1.1.9}$$

上式中第三项与$\alpha_i$、$\beta_i$无关，因而，为使$\varepsilon$达最小，必须且只需取$\alpha_i = a_i$、$0 \leqslant i \leqslant N$，及$\beta_i = b_i$ $1 \leqslant i \leqslant N$。这表明，用三角多项式逼近函数时，其系数取$F$-系数能使误差达到最小。这是Parseval等式的另一意义。

下面讨论周期函数的复的$F$-级数。

在门式滤波及频谱分析中用得更多的不是实的而是复的$F$-级数。前面指出

$$\{e^{in\omega t}, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots\}$$

按内积：

$$(x, \ y) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$$

是$L^2\left[-\frac{T}{2}, \ \frac{T}{2}\right]$上的一个标准正交系。设$f(t)$是一个周期为$T$的函数，所谓$f(t)$的复的$F$-级数指的是把$f(t)$按上述正交系展开的级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{1.1.10}$$

式中的$C_n$表示$f(t)$的复的$F$-系数，称$\{C_n\}$为$f(t)$的$F$-系数集。由前面的推导我们知道，$C_n$应是$f(t)$与$e^{in\omega t}$的内积$(f, \ e^{in\omega t})$，即

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{e^{in\omega t}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \tag{1.1.11}$$

其实$C_n$的上述表达式也可从（1.1.10）推得，对（1.1.10）式的两边同乘$\frac{1}{T}\overline{e^{in\omega t}}$后，从$-\frac{T}{2}$到$\frac{T}{2}$积分，注意到正交性有：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, \overline{e^{in\omega t}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{iK\omega t} \cdot \overline{e^{in\omega t}}dt$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K \cdot \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{iK\omega t}\overline{e^{in\omega t}}dt$$

$$= C_n$$

所以有：

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

$f(t)$的复的$F$-级数的Parseval等式是：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \qquad (1.1.12)$$

式中的$C_n$是$f(t)$的$F$-级数的$F$-系数。（1.1.12）式的证法类同实的$F$-级数的情形。因为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad 其中 \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}$$

对展式的两边各自乘以自身的共轭得：

$$|f(t)|^2 = \sum_{m、n} C_m\overline{C}_n e^{im\omega t}\,\overline{e^{in\omega t}}$$

$$= \sum_{m、n} C_m\overline{C}_n e^{i(m-n)\omega t}$$

两边再乘以$\frac{1}{T}$后从$-\frac{T}{2}$到$\frac{T}{2}$积分，并利用正交性得：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{m、n} C_m\overline{C}_n e^{i(m-n)\omega t}dt$$

$$= \sum_{m、n} C_m\overline{C}_n \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{im\omega t}\overline{e^{in\omega t}}dt$$

$$= \sum_{m、n} C_m\overline{C}_n (e^{im\omega t},\ e^{in\omega t})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\overline{C}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2.$$

两种$F$-级数的系数有密切的关系。从下述二式：

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t-i\sin n\omega t)\,dt=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$$

$$C_{-n}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t+i\sin n\omega t)dt$$

$$=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

可得：

$$\begin{cases} C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n) \\ C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n) \\ C_0=\frac{a_0}{2} \end{cases} \tag{1.1.12}$$

及

$$\begin{cases} a_0=2C_0 \\ a_n=C_n+C_{-n} \\ b_n=i(C_n-C_{-n}) \end{cases} \tag{1.1.13}$$

由(1.1.12)及(1.1.13)可见，$f(t)$的两种$F$-级数是等价的，因为它们的系数是可以相互推出。但复的$F$-级数形式上更简单，它的通项是复数，其幅角及模对应着信号的相应频率分量的幅角和振幅，因此复的$F$-级数同样能起到刻划表征信号的频率特征的作用，因而我们称级数或更直接地称$\{C_n\}$为$f(t)$的频域表示。与实的$F$-级数的情形类似，$f(t)$和它的$F$-系数集$\{C_n\}$是一一对应的：已知$f(t)$，按(1.1.11)式可以完全决定出付里叶系数集$\{C_n\}$；反之若已知$\{C_n\}$那么$f(t)$按(1.1.10)式完全被$\{C_n\}$决定出来。

## §2. 非周期信号的频域表示

所谓非周期信号就是在时间上没有重复性的信号，但从数学上看非周期信号是周期信号当周期$T$趋向无限大的极限情况。下面我们用一种简单的方法，而不象数学分析中那种严格细致的方法推导非周期函数的傅立叶变换（今后简称$F$-变换），这种方法的好处是简单直观且结果与分析中的结果一样。

设$f(t)$是一非周期函数，$T>0$是一个正数。今后我们总假定$f(t)$绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$$

以保证它的$F$-变换的存在。此外，还设$f(t)$在任一有限区间上满足获氏条件。

我们先把$f(t)$限制在区间$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上，然后按此延拓出去得：

$$f_T(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} f(t) & -\frac{T}{2} \leqslant t < \frac{T}{2} \\ f(t-nT) & \left(n-\frac{1}{2}\right)T \leqslant t < \left(n+\frac{1}{2}\right)T \quad n=0,\ \pm 1,\ \cdots \end{cases} \tag{1.2.1}$$

那么$f_T(t)$是一个周期为$T$的函数，又它在每一周期上满足获氏条件，因此，可将之展为复的$F$-级数：

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2.2}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)代入(1.2.2)中得

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \cdot \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-in\omega u} du\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} e^{in\omega t}\left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(u) e^{-in\omega u} du\right)$$

$f(t)$与$f_T(t)$显然有关系：

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)$$

因而得到：

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(u) e^{-in\omega u} du \cdot w$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-in\omega u} du\right) dw \tag{1.2.4}$$

上式的推导用到了$T\to\omega$时$\omega\to 0$、$\frac{\pi}{\omega}\to\infty$的事实。如把(1.2.4)中的积分记成$F(\omega)$：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

那么我们得到

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i\omega t}\, dw & (1.2.5) \\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt & (1.2.6) \end{cases}$$