计算数学丛书

不动点算法

王则柯 编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书

不动点算法

王则柯　编著

内 容 提 要

本书从一个具体算法入手，系统介绍七十年代迅速发展起来的单纯不动点算法．具有微分学和线性代数基础的读者阅读本书不会发生原则上的困难．

第 1 章专讲 Kuhn 多项式求根算法．第 2 章是 Brouwer 不动点定理的一个构造性的证明，也是关于不动点算法基本思想的一章．第 3 章介绍不动点算法的部分应用．第 4 章是不动点算法的基本概念和第一代的基础算法．第 5 章介绍在第一代算法基础上发展起来的各种有效算法．

本书可作为高等学校应用数学专业和计算数学专业的学生和研究生的教学参考书，也可供高等学校数学系和计算机科学系师生及有关科技工作者参考．

责任编辑　唐仲华

计算数学丛书

不 动 点 算 法

王则柯　编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏泗阳印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 7.125　字数 157,000

1987 年 5 月第 1 版　1987 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—4,700

统一书号：13119·1419　　定价：1.45 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物. 读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考.

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果. 每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解.

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的伽辽金法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《演化方程的有限元理论》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版.

前　言

六十年代后期出现的不动点算法(Fixed Point Algorithms)，在短短十几年时间里得到迅速发展，引起人们的注意．不动点算法在非线性规划、非线性方程和方程组数值解、微分方程边值问题、单参数或多参数分岐点问题、特征值问题，乃至对策论、马尔科夫决策理论、经济理论以及纯粹数学某些著名定理的构造性证明方面取得成功，其中尤以方程理论和经济理论方面的成果为大宗． 一方面，不动点算法给应用数学特别是非线性数学提供了新的强有力的工具，另一方面，不动点算法也给纯粹数学带来某些深远的影响．现在，人们可以把不动点具体算出来了．这在若干年以前还是难以想象的．

从计算的角度看，不动点算法具有若干突出的优点． 例如非线性方程求解，大家知道，初始值的选取是一个困难的问题．初值选得好，计算就收敛，收敛速度就快；初值选得不好，收敛就慢，甚至根本不收敛，导致算法失败．这对运用电子计算机规范地处理在实际应用中提出的丰富多彩的具体问题，是一个很大的障碍． 为了克服这个困难，在传统算法的范围内，已经投入了大量的工作，情况还不能说令人满意．但当我们用不动点算法来处理某些问题时，却根本不存在初值选取的问题，不论计算从哪里开始，必定收敛到问题的解．虽然目前用不动点算法处理维数太高的问题尚有困难，但不动点算法的上述经常是大范围收敛的性质，加上精度较高，并且往往

可以避免导数运算这些优点，赢得越来越多的注意.

不动点算法是拓扑学和计算数学以及其他应用学科结合的产物，这从它的名称上也可见一二. “不动点”，来自拓扑学中的不动点概念和著名的不动点定理、不动点算法，有时也称作单纯算法，或单纯同伦算法. 这“单纯”和“同伦”，就都是拓扑学的基础的和主要的概念. 作为不动点算法的理论基础的 Sperner 引理，就是组合拓扑学的早期成果. 拓扑学和计算数学等结合形成不动点算法，是电子计算机科学蓬勃发展、广泛渗透到数学领域所产生的结果.

不动点算法的这种面貌，容易使人生畏. 例如在国内，系统地学过拓扑学的人比较少，拓扑学有时被披上不应有的神秘色彩. 不动点算法的文献，较多使用拓扑学的术语，这对初学者会是一个困难. 然而，我们想要强调的是：不动点算法的若干深刻思想固然是从代数拓扑和微分拓扑中发掘出来的，但算法本身，却完全是看得见摸得着的，大量问题还处于我们最熟悉的欧氏空间之中. 至于算法的具体实施，更完全可以独立于拓扑学之外.

本书的意图，就是为学习新兴的不动点算法做一点入门的导引工作. Kuhn 多项式求根算法，是不动点算法的范例. 要了解这个算法，只要有复数的平面直角坐标表示的基本知识就可以了. 要掌握相应的数学证明，也只要再加上一些初等微积分的现成方法. 所以，讲透这个算法，作为入门，是很合适的. 不动点算法的主要思想，在 Kuhn 多项式求根算法中得到较好的体现，主要概念，主要方法都有了. 有了这个典例，再来学习不动点算法的一般理论，就会容易得多. 整个第 1 章，专谈 Kuhn 多项式求根算法. 第 2 章是关于 Brouwer 不动点定理的一个构造性的证明，换一个角度，也可以说是关于不

动点算法的历史发展和基本思想的一章．第 3 章谈不动点算法的部分应用．在前两章的基础上，首先接触不动点算法的读者，关心算法的应用先于关心算法的本身，恐怕也是自然的．这一章的内容，相信还会吸引一部分关心边缘科学发展的读者．第 4 章是不动点算法的一般概念和基础的第一代算法，第 5 章是在第一代算法的基础上发展起来的各种有效算法．无疑，这两章是本书份量最重的部分．我们尽可能叙述得具体一些、浅近一些，并且尽可能把一些内容分散到前面三章的有关部分介绍．希望经过这样的安排，读起来会顺利一些．

有些读者可能感到困难的是集值映射及其有关概念，以及凸分析中的有关概念．我们力图通过若干浅近的例子，作一些解释性的说明．集值映射的概念，凸分析中的有关概念，对于了解不动点算法的新近发展和丰富应用，是不可回避的．按照我们的体会，困难与其说来自这些内容的难度，不如说来自人们对这些概念的陌生感，因为一般基础课教材中没有安排介绍这些内容．整个不动点算法也是这样，作为一个大有前途的新的学科分支，其特点未必在难，而在于新，在于构造性的思想，算法的思想．接触过不动点算法的人，多有这种感觉．直观可贵．直觉可贵．我们通过若干直观性较强的例子和相当数量的插图，在直观化、数学严格前提下的通俗化方面努力作了一些尝试．限于作者的水平，不妥之处在所难免，诚恳地希望得到批评指正．

1981 年春天，作者曾以本书的初稿，向部分计算数学工作者、计算数学专业教师和研究生开过讲座．三年以来，不动点算法又有了很大发展，我们自己的工作也继续取得一些有意义的成果．这些发展在这次定稿中也得到部分的反映．

所有文献，按作者姓氏的英文字母顺序及发表出版年

份，排列在全文结束之后，例如 Allgower & Georg [1980]，Kuhn[1977]，Todd[1976]等. 为便于阅读，在最后有一个主要名词索引.

李岳生教授和李元熹同志对本书的写作给予宝贵的支持和帮助. 陈继承同志阅读过本书最初的手稿. 借此机会，谨对以上提及的各位表示由衷的感谢.

作者　1985 年 12 月于中山大学

记号说明

N	整数集$\{1, \cdots, n\}$
N_0	整数集$\{0, 1, \cdots, n\}$
$\mathbb{R}^n$	n维欧氏空间,坐标下标从1到n
$\mathbb{R}^{n+1}$	$n+1$维欧氏空间,坐标下标从0到n
u^i	$\mathbb{R}^n$中第i个单位向量(点),$i\in N$;而$u=\sum\limits_{i\in N}u^i$
v^i	$\mathbb{R}^{n+1}$中第i个单位向量(点),$i\in N_0$;而$v=\sum\limits_{i\in N_0}v^i$
$\mathbb{R}^n_+$	$\mathbb{R}^n$的非负卦限,即$\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i\geqslant 0,\ i\in N\}$
$\mathbb{R}^{n+1}_+$	$\mathbb{R}^{n+1}$的非负卦限,即$\mathbb{R}^{n+1}_+=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_i\geqslant 0,\ i\in N_0\}$
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{C}$	复数平面
$T\cup S$	集合T与集合S之并集
$T\cap S$	集合T与集合S之交集
$T\sim S$	集合T对集合S之差集
$\|x\|_p$	$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}^{n+1}$中的范数,$\|x\|_p=(\sum\limits_i \lvert x_i\rvert^p)^{1/p}$,特别,$\|x\|_2=(\sum\limits_i x_i^2)^{1/2}$为通常范数,而$\|x\|_\infty=\max\limits_i \lvert x_i\rvert$
$B(x, \rho)$	$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}^{n+1}$中以x为中心的半径ρ的闭球
$B(S, \rho)$	$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}^{n+1}$中与子集S的距离不超过ρ的所有点的集合

$\bar{S}$	集合 S 的闭包，即 $\bar{S}=\bigcap\{B(S,\ \varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$
$\operatorname{int} S$	集合 S 的内部， 即 $\operatorname{int}S=\{x\in S\mid\exists\varepsilon>0$ 使 $B(x,\ \varepsilon)\subset S\}$
∂S	集合 S 的边界，即 $\partial S=\bar{S}\sim\operatorname{int}S$
$\operatorname{diam}_p S$	集合 S 的直径，即 $\operatorname{diam}_p S=\sup\{\lVert x-y\rVert_p\mid x\in S,\ y\in S\}$
$\operatorname{mesh}_p G$	单纯剖分 G 的网径，即 $\operatorname{mesh}_p G=\sup\{\operatorname{diam}_p\sigma\mid\sigma\in G\}$
$\lceil r\rceil$	不小于实数 r 的最小整数
$\lfloor r\rfloor$	不大于实数 r 的最大整数

注意 本书不从字母表示上区分向量和数量，它们按上下文是明白的.

目　录

前言
记号说明
第 1 章　从 Kuhn 多项式求根算法讲起 ……………………1
§ 1　算法概述 ……………………………………………2
§ 2　算法的数学证明 ……………………………………9
§ 3　算法的成本估计 ……………………………………13
§ 4　算法的程序实施 ……………………………………19
§ 5　数值试验 ……………………………………………23
第 2 章　基本思想-Brouwer 不动点定理的一个构造性证明 ……………………………………31
§ 1　历史的回顾 …………………………………………31
§ 2　Brouwer 定理 ………………………………………32
§ 3　若干证明途径 ………………………………………39
§ 4　归结为 Sperner 引理 ………………………………44
§ 5　Sperner 引理的证明 ………………………………49
第 3 章　不动点定理的推广和应用 ……………………55
§ 1　预备知识：集值映射 ………………………………55
§ 2　预备知识：凸函数 …………………………………62
§ 3　Kakutani 不动点定理 ………………………………71
§ 4　非线性规划问题 ……………………………………78
§ 5　经济均衡问题 ………………………………………83
§ 6　非线性互补问题 ……………………………………88
第 4 章　算法基础 ………………………………………93
§ 1　剖分法 ………………………………………………93

§ 2　轮回规则 ……………………………………………107
§ 3　标号法 ……………………………………………110
§ 4　人为始点算法 ……………………………………………117
§ 5　变维数算法 ……………………………………………125
§ 6　R^n_+ 上的不动点算法 ……………………………………………132
§ 7　Eaves 向量标号法算法……………………………………………137
第 5 章　算法发展 ……………………………………………152
§ 1　第一代算法的缺点 ……………………………………………152
§ 2　Merrill 重复开始算法 ……………………………………………154
§ 3　三明治算法 ……………………………………………164
§ 4　单纯同伦算法 ……………………………………………169
§ 5　算法效率与 J_3 剖分 ……………………………………………181
§ 6　变维数重复开始算法 ……………………………………………192
§ 7　非线性方程组单纯同伦算法 ……………………………………………200
后记 ……………………………………………206
参考文献 ……………………………………………209
索引 ……………………………………………214

第 1 章

从 Kuhn 多项式求根算法讲起

多项式是最便于把握的一类非线性函数；一个复变量的复值函数方程，是方程向方程组过渡的自然的桥梁. 我们就从复系数多项式求根问题开始. 具体地说，在这一章，我们要讲透 Kuhn 的多项式求根算法，作为学习不动点算法的第一步.

多项式求根，是纯粹数学中最古老的问题之一，也是数值分析中最古老的问题之一. 几百年来，人们对这个问题已经有过不少讨论. 在这个题目下面，我们知道根与系数关系的韦达定理，知道高斯关于代数基本定理的持续半个世纪以上的工作，知道两个天才的然而都是不幸夭折的数学家阿贝尔和伽罗华，知道现代群论的基础——伽罗华理论正是从多项式求根问题发源起来的. 另一方面，翻开任何一本数值分析的教科书，都可以看到各种多项式求根方法的介绍；计算数学方面的学术刊物，至今还不断发表多项式求根问题的新进展. 文献可谓丰富，方法亦不可谓不成熟. 那末，为什么我们还是从多项式求根这个古老课题讲起呢？为什么又偏偏那末看重 Kuhn 的多项式求根算法呢？

Kuhn 的多项式求根算法，在不动点算法的发展过程中，占有特殊的地位. 我们说不动点算法的发展给纯粹数学带来深刻影响，Kuhn 方法就是一个出色的例子，是用应用数学手段处理纯粹数学问题的出色例子. 就不动点算法本身的发展来说，Kuhn 方法被视为不动点算法开始成熟的标志. 的确，问题本身是古老的：多项式求根. 但正是在这个古老的问题上，

Kuhn 的别开生面的方法，使人耳目一新. 熟悉其他多项式求根方法的读者，正好可以从对比中掌握不动点算法的精髓.

在这一章，除了“单纯形”这样早已是普遍熟悉的概念以外，我们可以完全避免使用拓扑学的术语. 读者可以看到，“拓扑学的”不动点算法，原来是这么具体的东西. 到了第 5 章，可以知道，Kuhn 多项式求根算法是单纯同伦算法的一个范例，读者想必会有新的体会.

本章的份量集中在 § 1 和 § 3. § 4 的目的是提供一个(唯一的一个)实施某种算法的完整例子. 略去 § 4 不影响以后的阅读. 事实上，有兴趣的读者不难提出自己的 Kuhn 算法的实施方案.

§1 算法概述

不失一般性，在多项式求根问题中，我们只须考虑首项系数为 1 的形如

$$f(z)=z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_n$$

的多项式的求根问题，这里，n 是任意自然数，$C_1, \cdots, C_n$ 是任意复常数，z 是复变量.

算法的指导思想是：对复数 z 平面 $\mathbb{C}$ 进行越来越细密的三角剖分，寻求在变换 $w=f(z)$ 之下三个顶点的象在 w 平面 $\mathbb{C}'$ 上“包围”着原点的三角形. 这种三角形的聚点就是多项式的根.

作为类比，回忆求实变量实值函数零点的“对分区间套法”. 用我们的话来说，对分区间套法就是：对实数 x 轴进行越来越细密的区间对分，寻求在变换 $y=f(x)$ 之下两个端点的函数值在 y 轴上包围着零点的区间. 这种区间的聚点就是

函数的零点(图 1.1).

从实数轴到复数平面，维数只增加 1，但在复平面上包围一个点比在实数轴上包围一个点就有完全不同的意义．实数轴上包围一个点只须另外两个点．复平面上包围一个点则需要一条简单闭曲线，而简单闭曲线具有连续统的势，在这个意义下，计算机是无法对付的．计算机只能对付离散的点．

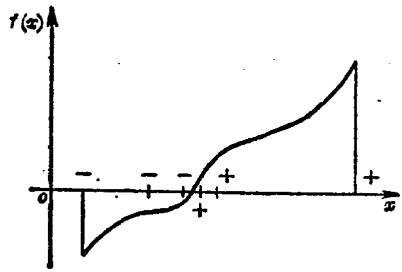

图 1.1

下面几段文字，可以说完全是为着在复平面上包围一个点——原点——而进行的．

1．半空间 $\mathbb{C}\times[-1,+\infty)$ 的 Kuhn 剖分

记 $\mathbb{C}=\{z|z=x+iy,\ x、y$ 实数$\}$为复数 z 平面；$\mathbb{C}_d=\mathbb{C}\times\{d\}$，$d$ 整数．取定初始格距 $h>0$．

$\mathbb{C}_{-1}$ 平面用四族直线 $x=ph$；$y=qh$；$y=\pm x+(2r-1)h$ 剖分，p、q、r 为整数(下同)；$\mathbb{C}_d$ 平面($d\geqslant0$)用四族直线 $x=ph2^{-d}$；$y=qh\cdot2^{-d}$；$y=\pm x+2rh2^{-d}$ 剖分(图 1.2)．注意，$\mathbb{C}_{-1}$ 与 $\mathbb{C}_0$ 各自的斜线是错开的，而剖分密度一样．$\mathbb{C}_0$，$\mathbb{C}_1$，$\mathbb{C}_2$，…，每向上一层，剖分加细一倍．我们把 d 称为

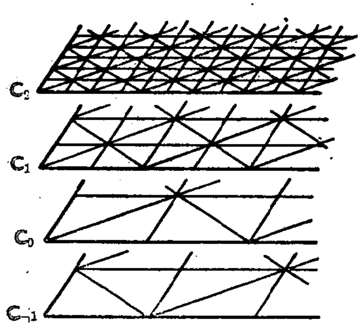

图 1.2

层 $\mathbb{C}_d$ 的高度.

$\mathbb{C}_{-1}$ 与 $\mathbb{C}_0$ 之间上下各一个正方形所形成的方块，按图 1.3 所示的规则剖分. 这个方块被分割成五个四面体. 为了看得更清楚，我们把它们拆开，就如图 1.4. 而 $\mathbb{C}_d$ 与 $\mathbb{C}_{d+1}$($d \geqslant 0$)之间，都是 $\mathbb{C}_d$ 的一个正方形与 $\mathbb{C}_{d+1}$ 的四个正方形相对. 这样的一个方块，统按图 1.5 的规则剖分.

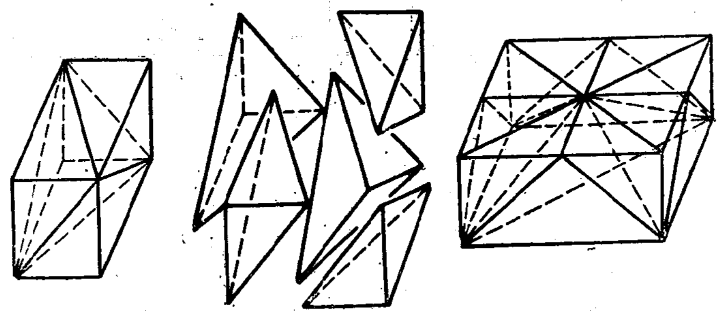

图 1.3　　图 1.4　　图 1.5

现在，半空间 $\mathbb{C}\times[-1, +\infty)$ 已经被分割成一个一个四面体. 四面体的侧面，都是一个个三角形(包括 $\mathbb{C}_{-1}$, $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_1$, …平面上原来分割成的三角形). 三角形、四面体，有着良好的几何拓扑性质，都是单纯形(参看第 2 章). 三角形是二维单纯形，四面体是三维单纯形. 同样，在上述半空间的剖分中，一维单纯形是四面体、三角形的**棱**；0 维单纯形是这个剖分的**顶点**，即四面体、三角形之棱的顶点. 这样，我们就得到半空间 $\mathbb{C}\times[-1, +\infty)$ 的一个单纯剖分，称作 **Kuhn 剖分**.

计算将在这个剖分中进行. 准确一点说，将在这个剖分的顶点中进行.

2. 标号法

将 $w=u+iv$ 平面 $\mathbb{C}'$ 分成三个相等的