正交设计法

北京大学数学力学系概率统计组编

石油化学工业出版社

内 容 提 要

正交设计法又叫正交试验法。

我們在科学实验中，经常遇到实验结果受到多种因素的影响。这样就要搞清楚每个因素对试验结果的影响，分清诸因素谁主谁次，弄清它們之间的关系。正交设计法就是解决多因素试验问题的一种数学方法。

本书共分八章，分别介绍了正交设计法；正交表的统计分析；交互作用；分割法设计；正交表的灵活应用；正交多项式的应用；非计量指标的处理方法。文字通俗易懂，便于自学。

本书可供工厂、科学研究单位和大专院校从事科学试验人员参考。

正交设计法

北京大学数学力学系概率统计组编

*

石油化学工业出版社 出版

（北京和平里七区十六号楼）

石油化学工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092 1/16 印张 12 插页 1

字数 280 千字 印数 1—23,450

1976年 9 月第 1 版 1976年 9 月第 1 次印刷

书号15063·化144 定价 1.30 元

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

任何过程如果有多数矛盾存在的话，其中必定有一种是主要的，起着领导的、决定的作用，其他则处于次要和服从的地位。因此，研究任何过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要用全力找出它的主要矛盾。捉住了这个主要矛盾，一切问题就迎刃而解了。

前　言

在无产阶级文化大革命运动的推动下，我国工农业生产和科学技术战线上出现了一派大好形势。广大工农兵、革命干部和革命知识分子遵照毛主席“**抓革命，促生产，促工作，促战备**”的伟大教导，贯彻执行“**独立自主、自力更生**”的伟大方针，促进了群众性的科学实验运动的蓬勃发展。优选法（0.618法）的广泛运用就是一个生动的例子。

在科学实验中，常常遇到实验结果受多种因素影响的情况。一般说来，比单因素问题要复杂一些。因为在许多因素中，有的对试验结果影响大，有的影响小，有的是单独起作用，有的则是和别的因素联合起作用。所以，多因素试验的任务，就不仅要搞清每个因素对试验结果的影响情况，而且要分清诸因素谁主谁次，要弄清它们之间的关系。在这个基础上，才能选出对提高产品的产量、质量指标有利的生产条件。

毛主席教导我们：“**我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题。我们的任务是过河，但是没有桥或没有船就不能过。**”要解决多因素试验的问题，不仅需要物理、化学、医学或其它专业方面的实际经验和理论知识，还需要一个好的安排试验的方法。我国在化工、冶金、机械、纺织等方面的初步实践表明，“正交设计法”（又叫正交试验法，简称正交设计）就是一种解决多因素试验问题确有成效值得推广的数学方法。

已有不少的刊物、资料介绍过“正交设计法”在改进老产品的质量、研究采用新工艺、试制新产品、了解新设备的工艺性能以及改进技术管理等许多方面应用的生动事例。越来越多的部门和群众正在使用“正交设计法”安排试验。这本小册子的目的，就是向广大从事试验工作的同志介绍这个方法。本书不是对“正交设计法”的全面论述，也不是论述“正交设计法”的数学基础。它的重点放在运用“正交设计法”的具体操作上，力求通俗，希望有初中文化程度的同志就能看懂，并能结合自己的工作加以运用。我们相信，更多的同志掌握它、运用它，一定能更进一步发展和丰富它的内容。

由于我们对马列主义、毛泽东思想学得不好，实践经验也很不够，本书一定会有错误之处，欢迎读者批评指正。

编者

1975年

目　　录

第一章　正交设计初步……1
§1　二水平试验……1
§2　多水平试验……7
§3　效应与工程平均……11
§4　多指标试验……13
第二章　正交表的统计分析……17
§1　单因子试验的方差分析……17
§2　正交设计的统计分析……24
§3　重复试验……31
§4　处理水平数不同的试验的两种方法……35
第三章　交互作用……44
§1　交互作用与二元表……44
§2　正交设计中的交互作用……51
§3　相对水平……61
§4　正交表的并列……65
第四章　分割法设计……69
§1　重复取样……69
§2　分割法……72
§3　直积法……77
第五章　正交表的灵活应用……83
§1　拟因子法……83
§2　组合法……89
§3　直和法……94
§4　部分追加法……102
第六章　回归分析……109
§1　一元线性回归……109
§2　多元线性回归……116
第七章　正交多项式的应用……121
§1　正交多项式回归……121
§2　正交多项式在正交设计中的应用……131
第八章　非计量指标的处理方法……146
§1　废品个数的数据分析……146
§2　累积法……150
§3　加权法……157
§4　计数指标的情形……159
附表1 多因素试验常用正交表……161
(1) $L_4(2^3)$……161
(2) $L_8(2^7)$……162
(3) $L_{16}(2^{15})$……162
(4) $L_{32}(2^{31})$……163
(5) $L_{12}(2^{11})$……166
(6) $L_9(3^4)$……166
(7) $L_{27}(3^{13})$……167
(8) $L_{18}(2^1\times3^7)$……168
(9) $L_{16}(4^5)$……169
(10) $L_{25}(5^6)$……169
(11) $L_{64}(2^{63})$……170
(12) $L_{81}(3^{40})$……174
(13) $L_{16}(4^1\times2^{12})$……178
(14) $L_{16}(4^2\times2^9)$……178
(15) $L_{16}(4^3\times2^6)$……179
(16) $L_{16}(4^4\times2^3)$……179
附表2 $F(f_1,f_2)$表……180
附表3 相关系数临界值表……182
附表4 常用正交多项式……183

第一章 正交设计初步

§1 二水平试验

1.1 问题的提出

先通过一个例子来说明正交设计解决什么问题，介绍有关的术语概念。

例 1.1.1 有机锡合成试验

某单位在原来经验的基础上要对有机锡（一种塑料的稳定剂）的合成条件做进一步的研究，目的是提高有机锡的产率。

经过研究，决定对催化剂种类、用量、配比、溶剂用量及反应时间等五个对产率可能有影响的因素进行考察，其中每个因素比较两种不同的条件，详细列出来就是

试验考察的因素	试验比较的条件	
A．催化剂种类	A_1＝甲	A_2＝乙
B．催化剂用量(克)	$B_1=1$	$B_2=1.5$
C．配比	$C_1=2.5/1$	$C_2=2.6/1$
D．溶剂用量（毫升）	$D_1=10$	$D_2=20$
E．反应时间（小时）	$E_1=2$	$E_2=1.5$

这类问题在工农业生产和科学研究工作中是常常会见到的，我们把它叫做多因素对比试验的问题。正交设计就是解决这种多因素对比试验问题的一个数学方法。

今后，试验需要考察的结果称为指标，如例1.1.1中有机锡的产率就是试验的指标；那些对试验结果（即指标）可能有影响的，而且在试验中提出了明确的条件加以对比的因素称为因子，如催化剂种类、催化剂用量、配比、溶剂用量、反应时间就是五个因子；每一个因子在试验中要对比的各个具体条件，称为它的各个水平，如 1 克、1.5 克 就是催化剂用量这个因子的两个水平，2 小时、1.5小时就是反应时间这个因子的两个水平等等。

这个问题中共有五个因子，每个因子都是二水平，所以把它称为二水平五因子试验，简记为2^5型试验。

为了书写方便，因子通常用大写字母A、B、C、D等表示，因子的不同水平则在大写字母右下方加足标1、2来表示，如A_1、A_2、B_1、B_2等。

1.2 用正交表安排试验方案——均衡搭配

例1.1.1中五个因子的水平进行各种不同的搭配，一共有$2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$种。为了从这32种不同的搭配方案中选出对提高产率最有利的条件，有没有必要把它们都试一遍呢？一般说来是不必要的，特别是在因子数目较多、水平取得较多的情况下，要想这样做也办不到。不全面地做试验，必然是从全部可能的条件中选出一部分来做，这就有

一个选得好不好的问题。如果选得比较好，次数不多便能反映全面情况，多快好省地达到预期目的；反之，如果选得不好，即使花费了人力物力，耗费了时间，还是有可能得不到明显的效果。下面我们说明，利用正交表一般地可以挑选出比较好的试验方案来。

表1.1.1 是一张正交表，记为$L_8(2^7)$。L表示它是一张正交表；L右下方的数字8表示这个表有8横行，也就是说用它安排的方案要做八次试验；括号内的数字2表示表里只出现“1”和“2”两种数字，也就是说这张表能用于安排都是二水平的多因素对比试验；数字2的右上角的数字7表示这张表有7竖列，也就是说用它来排试验最多可安排7个二水平因子的试验。除了$L_8(2^7)$之外，还有许多其它的正交表，如$L_9(3^4)$、$L_{16}(2^{15})$、$L_{27}(3^{13})$、……，等，其中各符号与数字的含义与$L_8(2^7)$类似。

表 1.1.1

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

例1.1.1 的有机锡试验可用正交表$L_8(2^7)$来设计试验方案。具体作法很简单，只要把五个因子A、B、C、D、E分别填在$L_8(2^7)$表头的第1、2、4、5、6五个列上就行了。我们把它记为

因子	A	B		C	D	E	
列号	1	2	3	4	5	6	7

这样得到的试验方案是表1.1.2

表 1.1.2

试验号 \ 列号	A	B		C	D	E	
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

把上表中填了因子的各列的数字“1”和“2”分别看作是所填因子在各号试验中的水平，就可以写出按这个方案所要做的八个试验条件

1. $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1$　　2. $A_1\ B_1\ C_2\ D_2\ E_2$
3. $A_1\ B_2\ C_1\ D_1\ E_2$　　4. $A_1\ B_2\ C_2\ D_2\ E_1$
5. $A_2\ B_1\ C_1\ D_2\ E_1$　　6. $A_2\ B_1\ C_2\ D_1\ E_2$
7. $A_2\ B_2\ C_1\ D_2\ E_2$　　8. $A_2\ B_2\ C_2\ D_1\ E_1$

其中第一号试验条件$A_1B_1C_1D_1E_1$详细写出来就是：催化剂用甲种，其用量是1克，配比是2.5/1，溶剂用量10毫升，反应时间2小时。其余各号试验类似。

表1.1.2 决定的试验方案是比较好的。因为由它挑选出来的8个试验在安排上有下面两个特点：

（1）每个因子的各个不同的水平在8次试验中都出现了相同的次数（4次）。例如因子A的1水平出现在第1、2、3、4号四个试验里，2水平出现在第5、6、7、8号四个试验里，又如因子C的1水平出现在第1、3、5、7号四个试验里，2水平出现在第2、4、6、8号四个试验里。其余几个因子也类似。

（2）每两个因子的各种不同的搭配在8次试验中都出现了相同的次数（2次）。例如A与B两个因子的四种搭配A_1B_1、A_1B_2、A_2B_1、A_2B_2分别出现在第1、2号，第3、4号，第5、6号，第7、8号试验里，又如B与E两个因子的四种搭配B_1E_1、B_1E_2、B_2E_1、B_2E_2分别出现在第1、5号，第2、6号，第4、8号，第3、7号试验里。其余任何两个因子的不同搭配也类似。

具有这两个特点的试验方案称为是均衡搭配的，或者说，在这样的方案中因子间具有正交性。在下一节我们将会看到，由于均衡搭配的性质使我们从这8个试验的结果便可以分析清楚每一个因子对指标的影响如何，这样一来，虽然只做了占全部试验条件1/4的8个试验，还是能够了解到全面情况，在这个意义上可以说这8个试验就代表了全部32个试验。如果不是采用正交表来挑选试验，一般就会破坏均衡搭配原则，使这些试验不再具有上述的代表性。

根据试验的目的、要求，确定指标、因子及其水平后，选择合适的正交表，并往正交表表头的列号上填因子以制定试验方案，这个过程称为表头设计，是整个试验的第一阶段。下一步的工作就是按照表1.1.2中载明的各项试验条件来进行试验了。

1.3 用正交表分析试验结果——综合比较

试验进行完毕后，把测得的产率数据分别填入表1.1.2的右侧数据栏内，成为数据表1.1.3。

现在，我们从这八个数据出发，来分析各因子水平的改变对指标产率的影响。从因子A（催化剂种类）的角度来看，水平A_1和A_2各出现在四次试验中。第1、2、3、4四号试验A处在第一水平A_1（甲种催化剂），第5、6、7、8四号试验A处在第二水平A_2（乙种催化剂）。按A的水平不同分成的两组试验中，其它因子的水平虽然各不相同，但由于试验具有均衡搭配的性质，所以有如表1.1.4列出的关系。

因此可以清楚地看到，A_1所在的第1到第4号试验与A_2所在的第5到第8号试验中，因子B、C、D、E各水平出现的情况是一样的。因此第1到4号试验产率的平均值

$$\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}=\frac{92.3+90.4+87.3+88.0}{4}=89.5$$

表 1.1.3

试验号＼列号	A	B		C	D	E		数　据
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	$y_1=92.3$
2	1	1	1	2	2	2	2	$y_2=90.4$
3	1	2	2	1	1	2	2	$y_3=87.3$
4	1	2	2	2	2	1	1	$y_4=88.0$
5	2	1	2	1	2	1	2	$y_5=87.3$
6	2	1	2	2	1	2	1	$y_6=84.8$
7	2	2	1	1	2	2	1	$y_7=83.4$
8	2	2	1	2	1	1	2	$y_8=84.0$

表 1.1.4

试　验　号	A	B	C	D	E
1、2、3、4	全是A_1	B_1两次 B_2两次	C_1两次 C_2两次	D_1两次 D_2两次	E_1两次 E_2两次
5、6、7、8	全是A_2	B_1两次 B_2两次	C_1两次 C_2两次	D_1两次 D_2两次	E_1两次 E_2两次

与第5到8号试验产率的平均值

$$\frac{y_5+y_6+y_7+y_8}{4}=\frac{87.3\times 84.8+83.4+84.0}{4}=84.9$$

之间的差别仅仅是由于A所处的水平不同所造成的。我们把两个平均产率之差

$$89.5-84.9=4.6$$

叫做因子A 1水平与2水平的对比。可见，A的对比中已经排除了B、C、D、E的影响，而只反映出因子A的水平改变对产率所起的影响。对比的正负号用来决定哪个水平“好”些。在本例中指标产率越高越好，因子A的对比又是正值，说明A的1水平比2水平要好些。一般说来，如果某因子对比的绝对值较大，说明它从1水平改变为2水平时指标的变化较大，通常就称这个因子对指标的影响较大，是主要因子。反之，如果某因子对比的绝对值较小，说明它从1水平改变为2水平时指标的变化较小，通常就称这个因子对指标的影响较小，是次要因子。需要注意的是，这里所谓的主要因子和次要因子，是仅仅就试验中考察的那些因子及其水平变化范围而言的，不能离开试验考察的具体对象而孤立地讲因子影响的主次。

这种比较各因子不同水平下试验数据平均值的方法，叫做综合比较的方法。很明显，只有在均衡搭配的情况下，才能用综合比较的方法。

仿照因子A，对B、C、D、E也用综合比较方法进行分析，可算出它们的对比如表1.1.5。

上面所作的计算也可以在正交表上进行，例1.1.1的正交设计计算表如表1.1.6。

这个表中右下的T表示全部数据的总和。Ⅰ、Ⅱ分别表示各列对应于“1”与“2”的数据（产率）求和。最后一栏是Ⅰ/4－Ⅱ/4，表示各列对应于“1”的数据平均值与对应于“2”的数据平均值之差，称为各列的对比。不难看出，填有因子的列的对比就是所

表 1.1.5

因　　子	A	B	C	D	E
1水平的平均产率	89.5	88.7	87.6	87.1	87.9
2水平的平均产率	84.9	85.7	86.8	87.3	86.5
对　　比	4.6	3.0	0.8	-0.2	1.4

表 1.1.6

列号 试验号	A 1	B 2	3	C 4	D 5	E 6	7	数　据
1	1	1	1	1	1	1	1	92.3
2	1	1	1	2	2	2	2	90.4
3	1	2	2	1	1	2	2	87.3
4	1	2	2	2	2	1	1	88.0
5	2	1	2	1	2	1	2	87.3
6	2	1	2	2	1	2	1	84.8
7	2	2	1	1	2	2	1	83.4
8	2	2	1	2	1	1	2	84.0
Ⅰ	358.0	354.8	350.1	350.3	348.4	351.6	348.5	总　和
Ⅱ	339.5	342.7	347.4	347.2	349.1	345.9	349.0	T＝697.5
Ⅰ/4	89.5	88.7	87.5	87.6	87.1	87.9	87.1	总平均
Ⅱ/4	84.9	85.7	86.9	86.8	87.3	86.5	87.3	$\mu=\frac{697.5}{8}$
Ⅰ/4-Ⅱ/4	4.6	3.0	0.6	0.8	-0.2	1.4	-0.2	＝87.2

填因子的对比；未填因子的列也可算出一个对比，在对正交设计进行初步分析的时候可以暂时不去管它。

从计算结果可知，因子A、B的对比绝对值比较大，说明A、B是对产率起较大影响的主要因子，因子E次之，因子C、D的对比绝对值比较小，它们对产率的影响是次要的。又因为A、B及E的对比都是正数，可见它们的1水平A_1、B_1、E_1对提高产率有利。

经过综合比较，分析出每个因子对指标影响的大小，区分出主要因子和次要因子，就为寻找最好的生产条件提供了依据。影响大的主要因子，当然要选它的“好”水平，以达到较好的效果。影响小的次要因子，它们的水平如何取一般说来对试验的结果不会产生太大的影响，因而可以根据节约、方便等考虑来选取它们的水平。在本例中，因子A、B、E是主要因子，它们都是1水平比2水平好，换句话说：催化剂用甲种较好，其用量1克较好，反应时间2小时较好。其余因子C、D影响较小，水平可随便选取，由于配比2.5/1与溶剂用量10毫升较省，因此，最好的生产条件是

$$A_1B_1C_1D_1E_1$$

这就是试验方案中的第1号条件，达到了产率92.3%的好结果。

这里所谓最好的生产条件，是指在试验中各因子的各水平的所有32种搭配（包括做过的8种与没有做过的24种搭配）中最好的，但是试验中没有的水平，比如用丙种催化剂是

否会更好，要从这个试验来判断当然是不可能的。

1.4 小　结

我们把用正交设计来处理问题的主要步骤小结如下：

第一，确定试验的因子与水平

首先要明确试验目的。然后组织有关人员研究为了达到这个目的，应当考察哪些因素。一般来说，肯定没有影响的因素一律不要考察，但是那些影响尚不清楚的因素则应尽可能在试验中加以考察。同时，对每个因素决定需要对比的具体条件，即确定因子与水平。

第二，作好表头设计

根据因子与水平的数量，选择合适的正交表，往正交表表头各列上填因子作好表头设计，制定试验方案。

第三，按照选定的方案进行试验，取得数据

由于影响指标的因素总是为数众多的，除了被我们选作因子控制起来的一部分外，其余因素在试验过程中仍然有所变化，会对指标产生影响，特别在试验周期长，试验次数多的情况下，它们的变化还可能比较大，为了排除它们对指标产生系统的影响，作试验时不应该按照正交表中规定的试验顺序进行，而是采用抽签、抓阄等方法来决定哪号试验先作，哪号试验后作，这叫做试验顺序的随机化。

第四，对数据进行统计分析，作出合理的结论

基于正交设计具有均衡搭配性质的综合比较方法是分析数据的主要思想。在1.3中已通过实例作了初步的介绍，其它二水平试验问题也可仿此进行。

第五，通过试验检验是否达到预定要求

通过进一步的试验或试生产检验最好条件下指标是否达到预定要求。如果尚未达到要求，或者又提出了新的要求，则在这批试验的基础上制定新的试验方案。

一个完整的科学的试验过程，应当由上述的几个环节组成。

1.5 二水平正交表的共同特点

正交表是正交设计的工具，它是总结了大量实践经验进行加工整理得到的成果。除了已经用过的$L_8(2^7)$外，常用的二水平正交表还有$L_{16}(2^{15})$、$L_{32}(2^{31})$以及$L_{12}(2^{11})$等。这些表在书末的附录中可以查到。

二水平正交表的共同特点是两条：

第一，每一列中数字“1”与“2”出现的个数相同。

第二，每一列与另外任何一列相同横行组成的数字对“1、1”，“1、2”，“2、1”，“2、2”出现的个数也相同。

正是由于正交表本身具备这两个特点，使得用它来安排二水平试验时，因子是均衡搭配的，因而可以用综合比较的方法分析各个因子影响的大小，为寻找最好条件提供依据。下面我们将看到，其实这两个特点也是一切正交表，包括多水平正交表和水平数不相同的正交表的共同特点，所以，均衡搭配的性质不仅二水平正交设计的试验有，多水平正交设计的试验也有，综合比较的方法不仅二水平试验时可用，多水平试验时也可用。

§2 多水平试验

2.1 三 水 平 试 验

为了更细致地了解因子与指标之间的关系，在可能的条件下，总是把因子的水平取得多一些，这就产生了多水平试验问题。下面举一个三水平试验的例子来说明。

例 1.2.1 钢材的热处理工艺条件试验

考虑有关的三个因子：淬火温度、回火温度、回火时间，并且根据过去积累的实际经验确定了它们的变化范围。即

A．淬火温度（℃）　840～860

B．回火温度（℃）　410～450

C．回火时间（分）　40～80

如果仅仅把变化范围的两端点取作为因子的水平，就不能很好地反映变化范围中间部分的影响，为此，可以把变化范围的中点也取作一个水平，进行三水平试验。这样就得到因子与水平如下

A．淬火温度（℃）　$A_1=840$　$A_2=850$　$A_3=860$

B．回火温度（℃）　$B_1=410$　$B_2=430$　$B_3=450$

C．回火时间（分）　$C_1=40$　$C_2=60$　$C_3=80$

三水平试验要选用三水平正交表来安排试验方案。常用的三水平正交表有$L_9(3^4)$、$L_{27}(3^{13})$等，本例中只有三个因子，可以采用$L_9(3^4)$来安排试验方案。$L_9(3^4)$是这样一张表

表 1.2.1

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

它有 9 行，4 列，三个水平（由表中数字“1”、“2”、“3”表示）。9 行决定了要作 9 次试验，4 列用于安排因子。

表中数字“1”、“2”、“3”出现得很有规律，第一，每列中它们出现的个数是相等的，第二，任何两列处于同一横行的数字组成九种数字对：“1、1”，“1、2”，“1、3”，“2、1”，“2、2”，“2、3”，“3、1”，“3、2”，“3、3”。这些数字对出现的个数也是相等的。这两条是三水平正交表的共同特点。这些特点与1.5中二水平正交表的特点是一致的。由于三水平正交表具备上述性质，所以用它设计出的三水平试验方案也具有均衡搭配的性质。

和二水平的情形一样，把因子A、B、C分别填在$L_9(3^4)$表头的随便三列，例如第1、3、4三列上，就得到一个试验方案的表头设计

因子	A		B	C
列号	1	2	3	4

根据这个表头设计进行的九次试验在全部27种可能的试验条件中将具有很强的代表性。

试验结果（钢材的强度）出来以后，可以列成表1.2.2。

表 1.2.2

试验号＼列号	A		B	C	数　据
	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	$y_1=190$
2	1	2	2	2	$y_2=200$
3	1	3	3	3	$y_3=175$
4	2	1	2	3	$y_4=165$
5	2	2	3	1	$y_5=183$
6	2	3	1	2	$y_6=212$
7	3	1	3	2	$y_7=196$
8	3	2	1	3	$y_8=178$
9	3	3	2	1	$y_9=187$
Ⅰ	565	551	580	560	$T=1686$
Ⅱ	560	561	552	608	$\mu=\frac{T}{9}=187.3$
Ⅲ	561	574	554	518	
Ⅰ/3	188.3	183.7	193.3	186.7	
Ⅱ/3	186.7	187.0	184.0	202.7	
Ⅲ/3	187.0	191.3	184.7	172.7	

和表1.1.6一样，表1.2.2中右下角的T表示数据的总和，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分别表示对应于各列1、2、3水平的数据之和，Ⅰ/3、Ⅱ/3、Ⅲ/3是相应的数据平均值。以后其它的计算表也都采用类似的符号。

由于例1.2.1也是用正交表安排的试验，具有均衡搭配的性质，所以可用§1介绍过的综合比较的方法分析试验数据。这就是说，为了比较某因子哪个水平好，只需比较它各个水平对应的数据的平均值。比如，因子B三个水平对应的数据的平均值分别是193.3，184.0，184.7，说明B的第一水平B_1较好，而B_2、B_3比较差。类似地可以看出因子C的第二水平C_2较好，而C_1、C_3比较差，因子A的三个水平对应数据平均值差别很小，它的三个水平都差不多。

毛主席教导我们："**研究任何过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要用全力找出它的主要矛盾**"。因此，对于多因素对比试验，很重要的问题是分清因子的主次，抓住主要矛盾。在二水平试验中，只要计算每个因子的对比，比较它们的绝对值的大小，就能判断其中哪些是主要因子，哪些是次要因子。在三水平试验中再用对比就不够了。比如，对于三水平的因子B，它的一水平与二水平的对比

$$193.3-184.0=9.3$$

只能刻划B_1与B_2的差异，它的第一水平与第三水平的对比

$$193.3-184.7=8.6$$

只能刻划B_1与B_3的差异，它的第二水平与第三水平的对比

$$184.0-184.7=-0.7$$

只能刻划B_2与B_3的差异。它们都不能全面反映因子B取不同的水平对指标会有多大的影响。对于四水平、五水平等因子自然也会发生同样的问题。为了解决这个问题，需要采用新的方法。

2.2　因子对指标影响大小的评定

在多因素对比试验中，谈到因子对指标影响的大小，总是指当这个因子处于不同的水平时，试验结果差别的大小。因此对于二水平因子，如果两个水平对应数据的平均值相差较大，就说这个因子对指标的影响比较大。对于多水平因子也是一样，如果它的各个水平下数据平均值之间差别较大，就说这个因子对指标的影响比较大；反之，如果这些平均值之间差别不大，就说这个因子对指标影响较小。因此，要考察因子对指标影响的大小，可以看它的各水平下数据平均值的分散程度，一般说来，这些平均值分布得比较分散，就可以说它的影响较大，平均值比较集中，就可以说它的影响比较小。

怎样刻划一组数的分散程度呢？一般用这组数的平均值作为一个"基准"，把组内每个数与平均值的差看作是这个数对"基准"的"偏离"。所有的"偏离"总起来，就刻划出了这组数的分散程度。但是，由于"偏离"总是有正有负，所以在把它们汇总起来的时侯，不能简单地一加了事，而要先平方，然后再加起来。一组数的"偏离"的平方和，即一组数与其平均值的差的平方和叫做这组数的离差。要比较两组数分散程度的大小，只要比较它们离差的大小就行了。

现在我们来计算例1.2.1中因子B三个水平下的平均数的离差，先取它们的平均数(也就是全部数据的总平均数)

$$\frac{\mathrm{I}_B+\mathrm{II}_B+\mathrm{III}_B}{9}=\frac{T}{9}=\frac{1686^{*}}{9}$$

作为一个基准，然后计算每个水平对应的数据平均值与这个基准的偏离

$$\frac{\mathrm{I}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{580}{3}-\frac{1686}{9}=+\frac{54}{9}$$

$$\frac{\mathrm{II}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{552}{3}-\frac{1686}{9}=-\frac{30}{9}$$

$$\frac{\mathrm{III}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{554}{3}-\frac{1686}{9}=-\frac{24}{9}$$

如前所述，这三个偏离的平方和

$$\left(\frac{\mathrm{I}_B}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{II}_B}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{III}_B}{3}-\frac{T}{9}\right)^2=\frac{54^2+(-30)^2+(-24)^2}{9^2}=54.22$$

---

* I_B、II_B、III_B分别表示对应于B的一、二、三水平的数据和。今后也用在罗马数字下加数字足标的方法表示对应于某列某数字的数据和，例如III_1表示对应于第1列数字"3"的数据和，II_2表示对应于第2列数字"2"的数据和，等等。

就是因子B三个水平下数据平均值之间的离差。同理可求得因子A、C三个水平下数据平均值的离差分别是

$$\left(\frac{\mathrm{I}_A}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{II}_A}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{III}_A}{3}-\frac{T}{9}\right)^2=\frac{9^2+(-6)^2+(-3)^2}{9^2}=1.56$$

$$\left(\frac{\mathrm{I}_C}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{II}_C}{3}-\frac{T}{9}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{III}_C}{3}-\frac{T}{9}\right)^2=\frac{(-6)^2+138^2+(-132)^2}{9^2}$$

$$=450.67$$

把求出的三个离差加以比较，可以发现，因子C影响最大，因子B次之，因子A影响最小，于是选出因子B、C是有重要影响的因子，而因子A对指标的影响比较小。因子B、C的水平分别选定为B_1、C_2。因子A的水平在840℃到860℃之间怎么选对指标的影响并不大，取温度较低的A_1便于操作，这样最后选出的最优条件便是$A_1B_1C_2$。

2.3 多水平试验小结

例 1.2.1是一个三水平试验，但是它的表头设计和分析方法都可以推广到更多水平的试验例如四水平、五水平试验中去。现在我们把多水平试验的一般步骤小结如下：

（1）根据因子的水平数选用正交表，进行表头设计。四水平试验要选用四水平正交表$L_{16}(4^5)$等，五水平试验要选用五水平正交表$L_{25}(5^6)$等。表头设计的方法仍是在列号上填因子。这样设计出来的方案，一定有均衡搭配的性质。

（2）试验结果出来以后，把数据填入正交表右侧，计算各因子各水平下的数据和及平均值，例如，用$L_{16}(4^5)$排四水平试验时要计算出Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ及Ⅰ/4、Ⅱ/4、Ⅲ/4、Ⅳ/4等。根据综合比较的思想，从这些计算的结果可以看出每个因子取哪个水平更为有利。

（3）为了比较各因子对试验指标的影响，可以计算各因子各水平下试验数据平均值的离差。一般说来，离差大，影响就大；离差小，影响就小。$L_{16}(4^5)$中四水平因子离差的计算公式是

$$\left(\frac{\mathrm{I}}{4}-\frac{T}{16}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{II}}{4}-\frac{T}{16}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{III}}{4}-\frac{T}{16}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{IV}}{4}-\frac{T}{16}\right)^2$$

$L_{25}(5^6)$中五水平因子离差的计算公式是

$$\left(\frac{\mathrm{I}}{5}-\frac{T}{25}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{II}}{5}-\frac{T}{25}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{III}}{5}-\frac{T}{25}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{IV}}{5}-\frac{T}{25}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{V}}{5}-\frac{T}{25}\right)^2$$

其它情况类推。

（4）通过以上步骤选出最优生产条件以后，一般应在该条件下重复做几次试验。如果所得结果已能达到试验的预期目的，则试验可告一段落；如果还不行，则应在前一试验基础上，调整因子与水平，进一步进行试验。

（5）简化计算的一个方法。注意到在分析试验结果时，把所有试验结果都减去某一个数，然后再乘上某一个正数，不会改变各因子各水平下数据平均值之间大小的顺序，也不会改变因子间离差大小的顺序。因此，常用这种方法把数据化简，再进行计算。例如，在例1.2.1中，各数据都减去185以后，得到的计算表是

表 1.2.3

列号 / 试验号	A		B	C	数 据
	1	2	3	4	(y_i-185)
1	1	1	1	1	5
2	1	2	2	2	15
3	1	3	3	3	−10
4	2	1	2	3	−20
5	2	2	3	1	− 2
6	2	3	1	2	27
7	3	1	3	2	11
8	3	2	1	3	− 7
9	3	3	2	1	2
Ⅰ	10	− 4	25	5	T＝21
Ⅱ	5	6	− 3	53	
Ⅲ	6	19	− 1	−37	$\mu=\frac{21}{9}=2.3$
Ⅰ/3	3.3	−1.3	8.3	1.7	
Ⅱ/3	1.7	2.0	−1.0	17.7	
Ⅲ/3	2.0	6.3	−0.3	−12.3	

从这张表上分析出的结论与过去是完全一致的。

今后的例题中常采用这种做法，如表1.2.3所示，这样做的时候，在计算表右上角"数据"下加括号注明。

§3 效应与工程平均

前两节已经说明对于用正交表安排的试验可以采用综合比较的方法定出最好的生产条件。现在，我们来进一步说明，除此之外，经过简单的计算，还能定量地估计各个条件（特别是最好条件）下长期稳定生产时指标可望达到的数值，即所谓工程平均。

首先，引进效应的概念

我们知道，试验数据的总平均

$$\mu=\frac{\text{数据总和}}{\text{数据总个数}} \tag{1.3.1}$$

是比较各因子各水平差别的基准。因而要了解一个因子由于用了某一个水平而使数据比总平均多了多少或少了多少，只要计算这个因子该水平下数据平均值与总平均的偏离就行了。这个偏离就称为因子在该水平下的效应，即

因子某水平下的效应＝因子某水平下数据平均值－总平均 (1.3.2)

效应一般用小写英文字母加数字足标表示，英文字母表明是哪一个因子，足标表明是哪一个水平。例如：a_3表示因子A第三水平的效应，d_2表示因子D第二水平的效应，等等。

例1.1.1中总平均是

$$\mu=\frac{T}{8}=\frac{697.5}{8}=87.2$$

所以，A_1的效应是

$$a_1=\frac{\mathrm{I}_A}{4}-\frac{T}{8}=\frac{358.0}{4}-\frac{697.5}{8}=\frac{18.5}{8}=2.3$$

A_2的效应是

$$a_2=\frac{\mathrm{II}_A}{4}-\frac{T}{8}=\frac{339.5}{4}-\frac{697.5}{8}=-\frac{18.5}{8}=-2.3$$

B_1的效应是

$$b_1=\frac{\mathrm{I}_B}{4}-\frac{T}{8}=\frac{354.8}{4}-\frac{697.5}{8}=\frac{12.1}{8}=1.5$$

B_2的效应是

$$b_2=\frac{\mathrm{II}_B}{4}-\frac{T}{8}=\frac{342.7}{4}-\frac{697.5}{8}=-\frac{12.1}{8}=-1.5$$

E_1的效应是

$$e_1=\frac{\mathrm{I}_E}{4}-\frac{T}{8}=\frac{351.6}{4}-\frac{697.5}{8}=\frac{5.7}{8}=0.7$$

E_2的效应是

$$e_2=\frac{\mathrm{II}_E}{4}-\frac{T}{8}=\frac{345.9}{4}-\frac{697.5}{8}=-\frac{5.7}{8}=-0.7$$

从以上的计算结果中可以发现

$$a_1+a_2=\frac{18.5}{8}+\left(-\frac{18.5}{8}\right)=0$$

$$b_1+b_2=\frac{12.1}{8}+\left(-\frac{12.1}{8}\right)=0$$

$$e_1+e_2=\frac{5.7}{8}+\left(-\frac{5.7}{8}\right)=0$$

如果再把C、D的效应也算出来，也有同样的性质。事实上，如果在正交设计中各因子水平数是相同的，从而各因子每个水平下的试验数据个数也是相等的，这时，就应当有

$$总平均\ \mu=\frac{任一因子各水平数据平均值之和}{因子的水平数}$$

因此，每个因子各水平效应之和总应等于0。

有了效应的概念，便可以计算工程平均了。

某一试验条件下影响较大的因子相应水平的效应以及数据总平均统统加起来，叫做这个条件下的工程平均。由于每一个效应都表示一个因子取定一个水平时使数据比总平均多了多少或少了多少，所以工程平均就说明了所有重要因子都取定一个水平以后，试验数据在总平均的基础上变成了什么，因此可以用它来估计这个试验条件下指标的数值是很自然的。请注意，在计算工程平均时，那些次要因子对指标的影响很小，它们的效应当然不应该加进去。用文字把工程平均的计算公式写出来，就是：

$$某试验条件下的工程平均=总平均+主要因子在该条件下出现水平的效应 \tag{1.3.3}$$

例1.1.1中因子A、B、E是主要的，所以最优条件$A_1B_1C_1D_1E_1$的工程平均