科學圖書大庫

精選微積分學

1284題與詳解

譯者　柳　賢　校閱　趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月十六日六版

精選微積分學
1284題與詳解

基本定價　3.80

譯者　柳　賢　高雄師範學院數學系講師
校閱　趙少鐵　成功大學數學系教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

目次

第十一章 無窮級數

第十二章 綜合問題

第一章　數列

1.1　基本定義及定理

若對於每一正整數 n 予以一數 u_n 與之對應，則稱 $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ 形成一無窮數列。

數列爲一函數，其定義域爲自然數集合；對於數列中之任一元素 u_n 可視爲一函數值（見第二章），且可以 $u_n = f(n)$ 表示之。

一數列可用下圖表示之，即數列中之每一元素恰有數軸上之某一點與之對應。

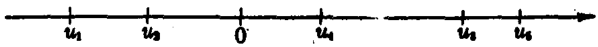

圖 1

一數列對於每一正整數 n，恒有 $u_{n+1} > u_n$，則稱此數列爲單調遞增數列；若 $u_{n+1} < u_n$，則稱爲單調遞減數列。

設對於每一正整數 n，若 $u_{n+1} \geqslant u_n$，則稱此數列爲非遞減數列。（若 $u_{n+1} \leqslant u_n$，則稱爲非遞增數列。）

當大於某一定數 n 之後，上列之不等關係恒成立時，則謂此數列爲單調數列。

設 a 爲數軸上之一點，對於任一正數 ϵ 不論其如何小，若存在無數多個相異之指標 n 使 $a - \epsilon < u_n < a + \epsilon$，則稱 a 爲數列之聚點（accumulation point）。

一數列可具有許多聚點；若一點之右方沒有其他聚點存在，則謂此點爲此數列之上限（upper limit）。若點之左方無其他聚點存在，則謂此點爲數列之下限（lower limit）。

上面定義說明一數列可有元素比某上限大者，同時亦有元素較其下限還小。

已予一數列 $u_1, u_2, \cdots\cdots$，若有一數 B，使對每一 n，恒有 $u_n < B$，則此數列稱爲上方有界，而 B 稱爲此數列之上界。若 M 爲一上界，無論正數 ϵ 如何小，恒有數列中之元素較 $M-\epsilon$ 爲大，則 M 稱爲此數列之最小上界。

如上所述，吾人亦可定義下界及最大下界。

一數列若上方有界且下方有界，則稱爲有界數列。

下面我們將介紹有關數列定理之主要觀念：

極限之定義：已予一數列 $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ 與一數 a。若對於每一正數 ϵ，無論如何小，存在有一整數 N（此數可隨 ϵ 而應變）使 $n > N$ 時，恒有 $|u_n - a| < \epsilon$。則稱 a 爲此數列之極限。

下圖將解釋此觀念。取一長爲 2ϵ 之區間，使其包含 a 點，當 $n > N$ 時則對每一 u_n 均將位於區間內；換言之，在區間之外，僅含有數列之有限個元素而已。（圖2）。（注意有些元素，雖然屬於 $n < N$ 之情形者，亦有可能位於所取之區間內。）

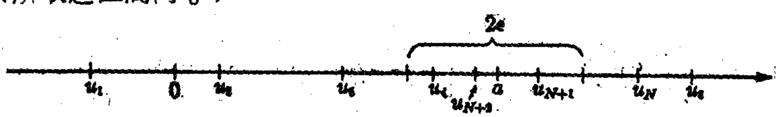

圖2

實際上，若 a 爲數列 $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ 之極限，可以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad 或 \quad \underset{n\to\infty}{u_n \to a.} \quad 表之$$

而讀作：當 n 趨於無窮大時，u_n 之極限值等於 a。記號 $n\to\infty$ 即表示無論 N 所取之值如何大，n 恒比它還大。

我們留意下面的情形：若一數列有一個以上的聚點，則由定義可知此數列無極限。

有極限之數列稱爲收斂數列。今將有關極限之若干基本性質敍述如下：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$,

則 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = a - b$, 及 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = ab$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0$,

則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}.$$

我們特別注意到數列 u_n/v_n ，對於任一 n ，僅當 $v_n \neq 0$ 時才定義之。

(3) 每一數列，若爲單調遞增且上方有界，則有一極限；若爲單調遞減且下方有界，則有一極限存在。

(4) 收斂之一般原理：一數列 u_n 有一極限之充要條件爲對任一正數 ϵ ，不論它如何小，恒存在一自然數 N ，使 $n > N$ 及 $n' > N$ 時，滿足不等式 $|u_n - u_{n'}| < \epsilon$ 。

1.2 一般概念之例題及習題：

1. 證明數列 $u_n = \dfrac{2n-3}{n+2}$ 爲 (a) 單調數列，(b) 有界數列。

解：(a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)-3}{n+1+2} - \frac{2n-3}{n+2} \\ &= \frac{2n^2+4n-n-2-2n^2-6n+3n+9}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{7}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

對任一 n，上兩項之差恒爲正，即 $u_{n+1} > u_n$，因此數列爲單調遞增。

(b)

$$u_1 = \frac{2-3}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

因數列爲遞增，故對於每一 n 有 $u_n \geqslant -\frac{1}{3}$ ，由一定數與第 n 項差之值往證數列爲上方有界：

$$A - u_n = A - \frac{2n-3}{n+2} = \frac{An+2A-2n+3}{n+2} = \frac{n(A-2)+2A+3}{n+2}.$$

若 $A = 2$，則此二數之差爲正；卽對任一 n，恒有 $2 > u_n$ 。

附註： u_n 之上界亦可由下法求得之：

$$u_n = \frac{2n-3}{n+2} < \frac{2n}{n+2} < \frac{2n}{n} = 2.$$

2.　試討論數列 $u_n = \dfrac{1}{n+2} + \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

解：先求出數列前面若干項：

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \tfrac{1}{3} + \cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}; \quad u_2 = \tfrac{1}{4} + \cos\tfrac{2}{3}\pi = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2};\\
&u_3 = \tfrac{1}{5} + \cos\pi = \tfrac{1}{5} - 1; \quad u_4 = \tfrac{1}{6} + \cos\tfrac{4}{3}\pi = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2};\\
&u_5 = \tfrac{1}{7} + \cos\tfrac{5}{3}\pi = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{2}; \quad u_6 = \tfrac{1}{8} + \cos 2\pi = \tfrac{1}{8} + 1.\\
&u_7 = \tfrac{1}{9} + \cos\tfrac{7}{3}\pi = \tfrac{1}{9} + \cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2};\\
&u_8 = \tfrac{1}{10} + \cos\tfrac{8}{3}\pi = \tfrac{1}{10} + \cos\tfrac{2}{3}\pi = \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

以上各項之第二部分的變化具有週期性，而第一部分則趨於零（當$n\to\infty$）；由於 n 之値趨於甚大時，數列之所有元素分別存在於包含 $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, 及 1 各點且長爲 2ϵ（任一正數）之各區間；上述各點均爲數列之聚點（圖 3）。

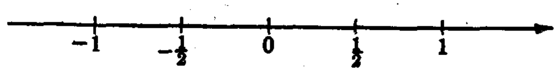

圖 3

顯然，此數列爲有界但非單調。其最小上界爲 $1\frac{1}{8}$ 而最大下界爲 -1，故此數列無極限。

附註：上述數列亦可由下列方式描述：

$$
\begin{aligned}
&u_{6k+1} = \frac{1}{6k+3} + \frac{1}{2}; \quad u_{6k+2} = \frac{1}{6k+4} - \frac{1}{2}; \quad u_{6k+3} = \frac{1}{6k+5} - 1;\\
&u_{6k+4} = \frac{1}{6k+6} - \frac{1}{2}; \quad u_{6k+5} = \frac{1}{6k+7} + \frac{1}{2}; \quad u_{6k+6} = \frac{1}{6k+8} + 1;\\
&\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

由 u_{6k+1} 形式之元素形成一單調遞減之部分數列（卽由所予數列之部分元素組成一新的數列），而以 $\frac{1}{2}$ 爲其極限。同樣的方法，對於其他的聚點，我們亦可相應的由所予之數列部分元素組成五組不同的部分數列而分別以所對應之聚點爲極限。

3.　試求 $u_n = 1/n$. 之極限。

解：往證此極限爲 0，根據極限之定義

由 $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$,

欲使 $1/n<\epsilon$, 僅須使 $n>1/\epsilon$ 即可，故對任一已予一正數 ϵ ，取 $N=1/\epsilon$ ，則對於一切自然數 $n>N$

$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\epsilon$ 必成立。

由此即知數列 u_n 以 0 爲其極限。

4. 求數列 $u_n=\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ 之極限。

5. 試求下列五數列之最初六個元素，並討論：

(a) 單調性，(b) 最小上界及最大下界之值（如果存在），(c) 聚點，(d) 上限與下限，(e) 收斂性。

(1) $u_n=\dfrac{2n+1}{2n}$ (2) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{-n}+1$

(3) $u_n=n+(-1)^n n^2$ (4) $u_n=\dfrac{2}{n}+\sin\dfrac{n\pi}{3}+\cos\dfrac{n\pi}{3}$

(5) $u_n=\dfrac{n+(-1)^n n}{n-\dfrac{(-1)^n n}{2}}$

6. 若一數列之最初幾項如下：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\ldots\ldots$$

試求此數列之第 n 項 u_n ；又此數列是否爲收斂；並就此數列回答問題 5 之 (b) (c) (d) 三項。

1.3 數之數列表示法

$\sqrt{2}$ 爲我們公認的一個無理數，它的近似値可由下列之列數遞增而漸趨於精確：

$$\begin{array}{lcl} 1 & < \sqrt{2} < & 2 \\ 1.4 & < \sqrt{2} < & 1.5 \\ 1.41 & < \sqrt{2} < & 1.42 \\ 1.414 & < \sqrt{2} < & 1.415 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & <\sqrt{2}< & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

上面二數列 x_n 與 y_n 同時定義無理數 $\sqrt{2}$，且有下列諸性質：
(1) $x_{n+1} \geqslant x_n$（此數列爲單調遞增）；
(2) $y_{n+1} < y_n$（此數列爲單調遞減）；
(3) $y_n > x_n$（減數列之任一元素均大於增數列之對應元素）；
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

附註：由 (1) (2) (3) 可導出對於任意 m 與 n，恒有 $y_m > x_n$ 。
由上所述四條件及實數完全性說明數軸無缺隙，而確定二數列定義一數，且此數恰爲此二數列之公共極限 。

7. 設 $u_n = \dfrac{n^2-1}{3n^2+2}; v_n = \dfrac{n+3}{3n-2}.$

試證此二數列定義一數，並求此數：

8. 已予二正數 a, b；其中 $a > b$ 。令 a_1 表此二數之算術平均數 $(a+b)/2$，b_1 表二數之幾何平均數 $\sqrt{ab}$；同樣的方法，定義 a_2, b_2 之算術與幾何平均數，餘仿此；則其一般項

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

試證數列 a_n 與數列 b_n 定義一數 。
解：首先證明 $a_1 > b_1$.

由 $$a_1 - b_1 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0.$$

今再利用已知之不等式 $a > b$ 往證 $a > a_1$ 及 $b < b_1$：

$$a - a_1 = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0,$$

$$b - b_1 = b - \sqrt{ab} = \sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) < 0.$$

綜上結果：$a > a_1 > b_1 > b$。同理可證得 $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$，再由數學歸納法，可證得

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

而此不等式說明了二數列均爲單調數列。數列 a_n 遞減，數列 b_n 遞增。換言之；對任一 n，恒有 $a_n > b$，及 $b_n < a$；卽二數列均爲有界。而單調且有界之數列必有極限存在；令 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$;

但 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2}$.

由 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$；及上述二項和之極限

得

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \text{卽得} \quad \alpha = \beta.$$

易明兩數列之極限相等。高斯（Guass）稱此極限爲二數 a 與 b 之算術幾何中項而以 $\mu(a, b)$. 表示之。

9.　如前題所述，令 $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$，表二數之算術中項；令 $b_{n+1} = 2a_nb_n/(a_n + b_n)$。表二數之調和中項，試求二數 a 與 b 之算術調和中項（卽二數列之公共極限）。

1.4　N(ϵ)之求法：

10.　設數列之一般項　$u_n = (2n - 3)/(n + 1)$.
試證存在一定數 n，使第 n 項後之每一項元素與 2 之差恒小於 0.001；上述是否卽證明 $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$?

解：解不等式

$$|2 - u_n| = \left|2 - \frac{2n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1} < 0.001;$$

卽 $0.001\,n + 0.001 > 5$;　$0.001\,n > 4.999$;　$n > 4999$. 而證得對於 $n > 4999$ 之每一 u_n，與 2 之差恒小於 0.001。
但此結果並不充分足以證明 $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

上述僅能說明此數列自 u_{6000} 項後之每一項均位於一包含 2 而長爲 0.002 之區間內。在此區間可能同時含有數個聚點。雖然在這種情形下亦可能有極限存在，但其極限可能爲 1.9995 或者爲其他在所述之區間內之任意數。

欲往證 2 爲 u_n 之極限則必需證明對每一 ϵ 均存在一對應之正數 N，使所有滿足 $n > N$ 之每一 u_n 均與 2 之差恒小於 ϵ。用這種方法，將可除去 1.9995（或其他異於 2 之任一數）爲此數列之極限的可能。

由不等式

$$|2 - u_n| = \frac{5}{n+1} < \epsilon$$

得

$$n > \frac{5}{\epsilon} - 1 = N,$$

而證得 2 爲此數列之極限。

11. 設數列之一般項 $u_n = \dfrac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}$；試求一正數 N，使每一 $n > N$ 時，恒有 $|u_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$.

12. 下列各數列均收斂於 0；試就各種不同之情形，分別求出一正數 N，使每一正數 $n > N$ 時，恒有 $|u_n| < \epsilon$；但不必求出 N 之最小值。

(a) $u_n = \dfrac{n}{n^3 + n^2 + 1}$ (b) $u_n = \dfrac{1 + \sqrt{n}}{n^3}$

(c) $u_n = \dfrac{\sin n + 2\cos^2 n}{\sqrt{n}}$ (d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1.5 具 $U_{n+1} = f(U_n)$ 形式之數列：

13. 設一數列由下列公式所定義

$$u_{n+1} = \frac{6(1 + u_n)}{7 + u_n}, \quad u_1 = c > 0.$$

試證此數列爲單調；並求出在何種情形此數列爲遞增或爲遞減，若此數列爲收斂，試求其極限。

解：

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6(1 + u_n)}{7 + u_n} - u_n = \frac{6 - u_n - u_n^2}{7 + u_n} = \frac{(3 + u_n)(2 - u_n)}{7 + u_n}.$$

顯然，$u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.*
但 $u_1 = c > 0$；而得所有元素均爲正數。
$u_{n+1} - u_n$ 之符號依 $2 - u_n$之符號而定。若 $u_n > 2$，則可書 $u_n = 2 + \alpha$，$\alpha > 0$ 於是有

$$u_{n+1} = \frac{6(1 + u_n)}{7 + u_n} = \frac{6(1 + 2 + \alpha)}{7 + 2 + \alpha} = \frac{18 + 6\alpha}{9 + \alpha} > \frac{18 + 2\alpha}{9 + \alpha} = 2.$$

若 $0 < u_n < 2$ 令 $u_n = 2 - \alpha, 0 < \alpha < 2.$
則

$$u_{n+1} = \frac{6(1 + 2 - \alpha)}{7 + 2 - \alpha} = \frac{18 - 6\alpha}{9 - \alpha} < \frac{18 - 2\alpha}{9 - \alpha} = 2.$$

最後，若 $u_n = 2,$

$$u_{n+1} = \frac{6(1 + 2)}{7 + 2} = \frac{18}{9} = 2.$$

因此，證得

$$u_n < 2 \Rightarrow u_{n+1} < 2;\ u_n = 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2;$$
$$u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2.$$

綜上所述而得下列結論：
(1) $u_1 = c > 2 \Rightarrow u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} < u_n;$
　此數列爲單調遞減且下方有界 $(u_n > 0)$.
(2) $u_1 = c < 2 \Rightarrow u_n < 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n;$
　此數列爲單調遞增且上方囿於 2。
(3) $u_1 = c = 2 \Rightarrow u_n = 2$（對任一 n 均有 $u_n = 2$）。
於上列各情形均存在一極限，於 (1) 中用數來表示之：

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6(u_n + 1)}{7 + u_n} \Rightarrow k = \frac{6(k + 1)}{7 + k} \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0;$$
$$k_1 = 2, \quad k_2 = -3.$$

*記號⇒用來示"蘊含"之意.

只有第一個解滿足 $u_n > 0$. 之條件，即2爲所求數列之極限，同時2亦爲其他情形下之極限，因爲最後之運算式並未受 u_1 所影響，而是對於每一種情形均能適合的，即此數列有一極限存在。

14. 設 $u_{n+1} = 6/(1+u_n)$ 且 $u_1 = 1$.

證明此數列爲收斂並求其極限，試用圖形 $y = 6/(1+x)$ 求此數列之元素。

15. 試證下列數列爲收斂並求其極限：

(a) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n};\ a_1 = \sqrt{2}$ (b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + k},\ a_1 = 0;\ k > 0$

1.6 求極限之方法：

16. $u_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4};\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$

解：

首先以 n^2 同時除分子分母

$$u_n = \frac{\dfrac{n^2 - n + 2}{n^2}}{\dfrac{3n^2 + 2n - 4}{n^2}} = \frac{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{n^2}}.$$

再利用極限和及商之定理，可得

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}$$
$$= \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}.$$

式中利用大家所熟悉之事實：

於 $p > 0$ 時，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^p = 0$.

17. $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{5n^3 - 4n};\ \lim u_n = ?$

解：

以 n^2 同時除分子與分母，而得

$$u_n = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5n - \frac{4}{n}}.$$

當 n 無限制的增大時，分子趨於定值 3 而分母趨於 ∞ 故此分式之極限趨於 0：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5n - \frac{4}{n}} = 0.$$

由以上二例，我們知道欲求一數列之極限，常以 n 之乘方除之，將有助於所求。

試求下列各數列之極限：

18. $u_n = \dfrac{n^4 - 5n}{n^2 - 3n + 1}$　　**19.** $u_n = \dfrac{n^3}{2n^2 - 1} - \dfrac{n^2}{2n + 1}$

20. $u_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n(n + 2)}$　　**21.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}$

22. $u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}}$　　**23.** $u_n = \sqrt{n + a} - \sqrt{n}$

解：下面所用的簡單方法（常用的），將迅速求得極限之值：

$$u_n = \frac{(\sqrt{n + a} - \sqrt{n})(\sqrt{n + a} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + a} + \sqrt{n}} = \frac{n + a - n}{\sqrt{n + a} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{n + a} + \sqrt{n}};$$

而得

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{n + a} + \sqrt{n}} = 0.$$

試求下列各數列之極限：