

科學圖書大庫

精選微積分學

1 2 8 4 題與詳解

譯者 柳 賢 校閱 趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月十六日六版

精選微積分學

1 2 8 4 題與詳解

基本定價 3.80

譯者 柳 賢 高雄師範學院數學系講師
校閱 趙少鐵 成功大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 負責人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 負責人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

目次

第一章 數列

1.1	基本定義及定理	1
1.2	一般概念之例題及習題	3
1.3	數之數列表示法	5
1.4	$N(\epsilon)$ 之求法	7
1.5	具 $u_{n+1} = f(u_n)$ 形式之數列	8
1.6	求極限之方法	10

第二章 單變數函數

2.1	定義與符號	13
2.2	初等函數	14
2.3	定義域	17
2.4	偶函數與奇函數	17
2.5	有理函數	18
2.6	對數函數	19
2.7	三角函數	19
2.8	雙曲線函數	20
2.9	反函數	20
2.10	反三角函數	21
2.11	反雙曲線函數	22
2.12	合成函數	23
2.13	週期函數	23

第三章 函數之極限

3.1	定義及一般習題	25
-----	---------	----

3.2	極限之求法	29
3.3	連續性	33

第四章 單變數函數之微分

4.1	導數之概念及其物理上與幾何上之意義	39
4.2	導數之求法	40
4.3	顯函數之導數求法	45
4.4	隱函數之微分法	47
4.5	參數微分法	48
4.6	計算導數之特例	49
4.7	高階導數	51
4.8	$y^{(n)}$ 之計算法	53
4.9	圖解微分法	55
4.10	雜例	56

第五章 微分學之基本定理

5.1	洛氏定理，拉格蘭日定理及歌西定理	59
5.2	泰勒及馬氏公式	61
5.3	不定形：阿比達法則 (L'Hôpital's rule)	66

第六章 微分學之應用

6.1	改變率	70
6.2	一函數在指定區間之遞增或遞減	71
6.3	極大與極小	72
6.4	彎曲性：反曲點	85
6.5	漸近線	88
6.6	曲線之描繪	93
6.7	極坐標圖形	100
6.8	參數方程式	104
6.9	切線與法線	106
6.10	接觸階	111
6.11	密切圓，曲率半徑	112
6.12	漸屈線與漸伸線	115

6.13 牛頓求近似值法.....	117
-------------------	-----

第七章 微分

7.1 微分之定義.....	122
7.2 微分不變式.....	125
7.3 用微分求函數增量之主部；近似求法之應用.....	126
7.4 高階微分.....	128

第八章 不定積分

8.1 定義與基本性質.....	131
8.2 直接積分法.....	133
8.3 置換積分法.....	137
8.4 分部積分法.....	141
8.5 有理函數之積分法.....	148
8.6 無理函數之積分法.....	154
8.7 三角積分法.....	162
8.8 指數函數及雙曲線函數之積分.....	166
8.9 其他各種積分.....	167

第九章 定積分

9.1 定義.....	170
9.2 定積分之基本性質.....	172
9.3 由定義求定積分之值.....	174
9.4 定積分值之估計.....	176
9.5 積分之中值定理.....	178
9.6 上下限為變數之積分.....	178
9.7 定積分之計算.....	179
9.8 積分之變數變換.....	182
9.9 近似積分法.....	185
9.10 異常積分.....	188
9.11 綜合問題.....	192

第十章 定積分之應用

10.1	平面積之求法	196
10.2	弧長之求法	200
10.3	體積之求法	204
10.4	旋轉曲面之面積	209
10.5	質量力矩，形心	211
10.6	巴普氏定理 (Pappus' theorems)	215
10.7	轉動慣量	216
10.8	物理上之問題	218

第十一章 無窮級數

11.1	級數之一般概念	223
11.2	正項級數之收斂	224
11.3	交錯級數之收斂	231
11.4	級數之算術運算	233
11.5	函數級數	236
11.6	幕級數，收斂半徑	244
11.7	泰勒及馬氏級數：幕級數之運算	246
11.8	泰勒及馬氏展開式之應用	256

第十二章 綜合問題

解法、提示及答案	269
索引	467

第一章 數列

1.1 基本定義及定理

若對於每一正整數 n 予以一數 u_n 與之對應，則稱 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 形成一無窮數列。

數列爲一函數，其定義域爲自然數集合；對於數列中之任一元素 u_n 可視爲一函數值（見第二章），且可以 $u_n = f(n)$ 表示之。

一數列可用下圖表示之，即數列中之每一元素恰有數軸上之某一點與之對應。

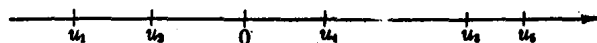


圖 1

一數列對於每一正整數 n ，恒有 $u_{n+1} > u_n$ ，則稱此數列爲單調遞增數列；若 $u_{n+1} < u_n$ ，則稱爲單調遞減數列。

設對於每一正整數 n ，若 $u_{n+1} \geq u_n$ ，則稱此數列爲非遞減數列。（若 $u_{n+1} \leq u_n$ ，則稱爲非遞增數列。）

當大於某一定數 n 之後，上列之不等關係恒成立時，則謂此數列爲單調數列。

設 a 爲數軸上之一點，對於任一正數 ϵ 不論其如何小，若存在無數多個相異之指標 n 使 $a - \epsilon < u_n < a + \epsilon$ ，則稱 a 爲數列之聚點（accumulation point）。

一數列可具有許多聚點；若一點之右方沒有其他聚點存在，則謂此點爲此數列之上限（upper limit）。若點之左方無其他聚點存在，則謂此點爲數列之下限（lower limit）。

上面定義說明一數列可有元素比某上限大者，同時亦有元素較其下限還小。

已予一數列 $u_1, u_2, \dots$ ，若有一數 B ，使對每一 n ，恒有 $u_n < B$ ，則此數列稱為上方有界，而 B 稱為此數列之上界。若 M 為一上界，無論正數 ϵ 如何小，恒有數列中之元素較 $M - \epsilon$ 為大，則 M 稱為此數列之最小上界。

如上所述，吾人亦可定義下界及最大下界。

一數列若上方有界且下方有界，則稱為有界數列。

下面我們將介紹有關數列定理之主要觀念：

極限之定義：已予一數列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 與一數 a 。若對於每一正數 ϵ ，無論如何小，存在有一整數 N （此數可隨 ϵ 而應變）使 $n > N$ 時，恒有 $|u_n - a| < \epsilon$ 。則稱 a 為此數列之極限。

下圖將解釋此觀念。取一長為 2ϵ 之區間，使其包含 a 點，當 $n > N$ 時則對每一 u_n 均將位於區間內；換言之，在區間之外，僅含有數列之有限個元素而已。（圖 2）。（注意有些元素，雖然屬於 $n < N$ 之情形者，亦有可能位於所取之區間內。）

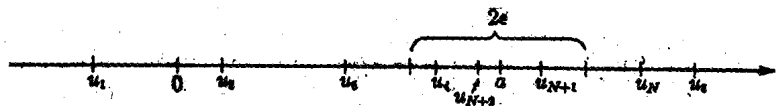


圖 2

實際上，若 a 為數列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 之極限，可以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \quad \text{或} \quad u_n \rightarrow a \quad \text{表之}$$

而讀作：當 n 趨於無窮大時， u_n 之極限值等於 a 。記號 $n \rightarrow \infty$ 即表示無論 N 所取之值如何大， n 恒比它還大。

我們留意下面的情形：若一數列有一個以上的聚點，則由定義可知此數列無極限。

有極限之數列稱為收斂數列。今將有關極限之若干基本性質敘述如下：

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$,

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = a + b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = a - b$, 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = ab$.

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b \neq 0$,

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

我們特別注意到數列 u_n/v_n ，對於任一 n ，僅當 $v_n \neq 0$ 時才定義之。

(3) 每一數列，若為單調遞增且上方有界，則有一極限；若為單調遞減且下方有界，則有一極限存在。

(4) 收斂之一般原理：一數列 u_n 有一極限之充要條件為對任一正數 ϵ ，不論它如何小，恒存在一自然數 N ，使 $n > N$ 及 $n' > N$ 時，滿足不等式 $|u_n - u_{n'}| < \epsilon$ 。

1.2 一般概念之例題及習題：

1. 證明數列 $u_n = \frac{2n-3}{n+2}$ 為 (a) 單調數列，(b) 有界數列。

解：(a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)-3}{n+1+2} - \frac{2n-3}{n+2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n - n - 2 - 2n^2 - 6n + 3n + 9}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{7}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

對任一 n ，上兩項之差恒為正，即 $u_{n+1} > u_n$ ，因此數列為單調遞增。

(b)

$$u_1 = \frac{2-3}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

因數列為遞增，故對於每一 n 有 $u_n \geq -\frac{1}{3}$ ，由一定數與第 n 項差之值往證數列為上方有界：

$$A - u_n = A - \frac{2n-3}{n+2} = \frac{An + 2A - 2n + 3}{n+2} = \frac{n(A-2) + 2A+3}{n+2}.$$

若 $A = 2$ ，則此二數之差為正；即對任一 n ，恒有 $2 > u_n$ 。

附註： u_n 之上界亦可由下法求得之：

$$u_n = \frac{2n-3}{n+2} < \frac{2n}{n+2} < \frac{2n}{n} = 2.$$

2. 試討論數列 $u_n = \frac{1}{n+2} + \cos \frac{n\pi}{3}$.

圖：先求出數列前面若干項：

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} + \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}; & u_2 &= \frac{1}{4} + \cos \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}; \\ u_3 &= \frac{1}{5} + \cos \pi = \frac{1}{5} - 1; & u_4 &= \frac{1}{6} + \cos \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}; \\ u_5 &= \frac{1}{7} + \cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{7} + \frac{1}{2}; & u_6 &= \frac{1}{8} + \cos 2\pi = \frac{1}{8} + 1. \\ u_7 &= \frac{1}{9} + \cos \frac{7}{3}\pi = \frac{1}{9} + \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{9} + \frac{1}{2}; \\ u_8 &= \frac{1}{10} + \cos \frac{8}{3}\pi = \frac{1}{10} + \cos \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

以上各項之第二部分的變化具有週期性，而第一部分則趨於零（當 $n \rightarrow \infty$ ）；由於 n 之值趨於甚大時，數列之所有元素分別存在於包含 $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ，及 1 各點且長為 2ϵ （任一正數）之各區間；上述各點均為數列之聚點（圖 3）。

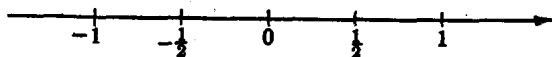


圖 3

顯然，此數列為有界但非單調。其最小上界為 $1\frac{1}{8}$ 而最大下界為 -1 ，故此數列無極限。

附註：上述數列亦可由下列方式描述：

$$\begin{aligned} u_{6k+1} &= \frac{1}{6k+3} + \frac{1}{2}; & u_{6k+2} &= \frac{1}{6k+4} - \frac{1}{2}; & u_{6k+3} &= \frac{1}{6k+5} - 1; \\ u_{6k+4} &= \frac{1}{6k+6} - \frac{1}{2}; & u_{6k+5} &= \frac{1}{6k+7} + \frac{1}{2}; & u_{6k+6} &= \frac{1}{6k+8} + 1; \end{aligned}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

由 u_{6k+1} 形式之元素形成一單調遞減之部分數列（即由所予數列之部分元素組成一新的數列），而以 $\frac{1}{2}$ 為其極限。同樣的方法，對於其他的聚點，我們亦可相應的由所予之數列部分元素組成五組不同的部分數列而分別以所對應之聚點為極限。

3. 試求 $u_n = 1/n$ 之極限。

解：往證此極限為 0 ，根據極限之定義

由 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$,

欲使 $1/n < \epsilon$, 僅須使 $n > 1/\epsilon$ 即可, 故對任一已予一正數 ϵ , 取 $N = 1/\epsilon$, 則對於一切自然數 $n > N$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \epsilon \quad \text{必成立。}$$

由此即知數列 u_n 以 0 為其極限。

4. 求數列 $u_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}$ 之極限。

5. 試求下列五數列之最初六個元素, 並討論:

(a) 單調性, (b) 最小上界及最大下界之值 (如果存在), (c) 聚點, (d) 上限與下限, (e) 收斂性。

(1) $u_n = \frac{2n+1}{2n}$ (2) $u_n = \frac{(-1)^n}{-n} + 1$

(3) $u_n = n + (-1)^n n^2$ (4) $u_n = \frac{2}{n} + \sin \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{3}$

(5) $u_n = \frac{n + (-1)^n n}{n - \frac{(-1)^n n}{2}}$

6. 若一數列之最初幾項如下:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

試求此數列之第 n 項 u_n ; 又此數列是否為收斂; 並就此數列回答問題 5 之 (b) (c) (d) 三項。

1.3 數之數列表示法

$\sqrt{2}$ 為我們公認的一個無理數, 它的近似值可由下列之列數遞增而漸趨於精確:

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1.4 &< \sqrt{2} < 1.5 \\ 1.41 &< \sqrt{2} < 1.42 \\ 1.414 &< \sqrt{2} < 1.415 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & < \sqrt{2} < & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

上面二數列 x_n 與 y_n 同時定義無理數 $\sqrt{2}$ ，且有下列諸性質：

- (1) $x_{n+1} \geq x_n$ (此數列為單調遞增)；
- (2) $y_{n+1} < y_n$ (此數列為單調遞減)；
- (3) $y_n > x_n$ (減數列之任一元素均大於增數列之對應元素)；
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ 。

附註：由(1)(2)(3)可導出對於任意 m 與 n ，恒有 $y_m > x_n$ 。

由上所述四條件及實數完全性說明數軸無缺隙，而確定二數列定義一數，且此數恰為此二數列之公共極限。

7. 設 $u_n = \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 2}$; $v_n = \frac{n + 3}{3n - 2}$

試證此二數列定義一數，並求此數：

8. 已予二正數 a, b ；其中 $a > b$ 。令 a_1 表此二數之算術平均數 $(a + b)/2$ ， b_1 表二數之幾何平均數 $\sqrt{ab}$ ；同樣的方法，定義 a_2, b_2 之算術與幾何平均數，餘仿此；則其一般項

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

試證數列 a_n 與數列 b_n 定義一數。

解：首先證明 $a_1 > b_1$ 。

$$\text{由 } a_1 - b_1 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0.$$

今再利用已知之不等式 $a > b$ 往證 $a > a_1$ 及 $b < b_1$ ：

$$a - a_1 = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0,$$

$$b - b_1 = b - \sqrt{ab} = \sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) < 0.$$

綜上結果： $a > a_1 > b_1 > b$ 。同理可證得 $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$ ，再由數學歸納法，可證得

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

而此不等式說明了二數列均為單調數列。數列 a_n 遞減，數列 b_n 遞增。換言之；對任一 n ，恒有 $a_n > b$ ，及 $b_n < a$ ；即二數列均為有界。而單調且有界之數列必有極限存在；令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$;

但
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ；及上述二項和之極限得

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{即得} \quad \alpha = \beta.$$

易明兩數列之極限相等。高斯 (Guass) 稱此極限為二數 a 與 b 之算術幾何中項而以 $\mu(a, b)$ 表示之。

9. 如前題所述，令 $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ ，表二數之算術中項；令 $b_{n+1} = 2a_nb_n/(a_n + b_n)$ 。表二數之調和中項，試求二數 a 與 b 之算術調和中項（即二數列之公共極限）。

1.4 $N(\epsilon)$ 之求法：

10. 設數列之一般項 $u_n = (2n - 3)/(n + 1)$ 。
試證存在一定數 n ，使第 n 項後之每一項元素與 2 之差恒小於 0.001；上述是否即證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$ ？

解：解不等式

$$|2 - u_n| = \left| 2 - \frac{2n - 3}{n + 1} \right| = \left| \frac{5}{n + 1} \right| = \frac{5}{n + 1} < 0.001;$$

即 $0.001n + 0.001 > 5$; $0.001n > 4.999$; $n > 4999$ 。而證得對於 $n > 4999$ 之每一 u_n ，與 2 之差恒小於 0.001。

但此結果並不充分足以證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$ 。

上述僅能說明此數列自 u_{6000} 項後之每一項均位於一包含 2 而長為 0.002 之區間內。在此區間可能同時含有數個聚點。雖然在這種情形下亦可能有極限存在，但其極限可能為 1.9995 或者為其他在所述之區間內之任意數。

欲往證 2 為 u_n 之極限則必需證明對每一 ϵ 均存在一對應之正數 N ，使所有滿足 $n > N$ 之每一 u_n 均與 2 之差恒小於 ϵ 。用這種方法，將可除去 1.9995（或其他異於 2 之任一數）為此數列之極限的可能。

由不等式

$$|2 - u_n| = \frac{5}{n+1} < \epsilon$$

得

$$n > \frac{5}{\epsilon} - 1 = N,$$

而證得 2 為此數列之極限。

11. 設數列之一般項 $u_n = \frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}$ ；試求一正數 N ，使每一 $n > N$ 時，恒有 $|u_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$ 。
12. 下列各數列均收斂於 0；試就各種不同之情形，分別求出一正數 N ，使每一正數 $n > N$ 時，恒有 $|u_n| < \epsilon$ ；但不必求出 N 之最小值。

$$(a) \quad u_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$$

$$(b) \quad u_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2}$$

$$(c) \quad u_n = \frac{\sin n + 2 \cos^2 n}{\sqrt{n}}$$

$$(d) \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1.5 具 $U_{n+1} = f(U_n)$ 形式之數列：

13. 設一數列由下列公式所定義

$$u_{n+1} = \frac{6(1+u_n)}{7+u_n}, \quad u_1 = c > 0.$$

試證此數列為單調；並求出在何種情形此數列為遞增或為遞減，若此數列為收斂，試求其極限。

證：

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6(1+u_n)}{7+u_n} - u_n = \frac{6 - u_n - u_n^2}{7+u_n} = \frac{(3+u_n)(2-u_n)}{7+u_n}.$$

顯然, $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.*

但 $u_1 = c > 0$; 而得所有元素均為正數。

$u_{n+1} - u_n$ 之符號依 $2 - u_n$ 之符號而定。若 $u_n > 2$, 則可書 $u_n = 2 + \alpha$, $\alpha > 0$ 於是有

$$u_{n+1} = \frac{6(1+u_n)}{7+u_n} = \frac{6(1+2+\alpha)}{7+2+\alpha} = \frac{18+6\alpha}{9+\alpha} > \frac{18+2\alpha}{9+\alpha} = 2.$$

若 $0 < u_n < 2$ 令 $u_n = 2 - \alpha$, $0 < \alpha < 2$.

則

$$u_{n+1} = \frac{6(1+2-\alpha)}{7+2-\alpha} = \frac{18-6\alpha}{9-\alpha} < \frac{18-2\alpha}{9-\alpha} = 2.$$

最後, 若 $u_n = 2$,

$$u_{n+1} = \frac{6(1+2)}{7+2} = \frac{18}{9} = 2.$$

因此, 證得

$$\begin{aligned} u_n < 2 &\Rightarrow u_{n+1} < 2; \quad u_n = 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2; \\ u_n > 2 &\Rightarrow u_{n+1} > 2. \end{aligned}$$

綜上所述而得下列結論:

(1) $u_1 = c > 2 \Rightarrow u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$;

此數列為單調遞減且下方有界 ($u_n > 0$).

(2) $u_1 = c < 2 \Rightarrow u_n < 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$;

此數列為單調遞增且上方囿於 2。

(3) $u_1 = c = 2 \Rightarrow u_n = 2$ (對任一 n 均有 $u_n = 2$)。

於上列各情形均存在一極限, 於 (1) 中用數來表示之:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(u_n + 1)}{7 + u_n} \Rightarrow k = \frac{6(k+1)}{7+k} \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0; \\ k_1 &= 2, \quad k_2 = -3. \end{aligned}$$

*記號 $\Rightarrow$ 用來示“蘊含”之意。

只有第一個解滿足 $u_n > 0$ 之條件，即 2 為所求數列之極限，同時 2 亦為其他情形下之極限，因為最後之運算式並未受 u_1 所影響，而是對於每一種情形均能適合的，即此數列有一極限存在。

14. 設 $u_{n+1} = 6/(1 + u_n)$ 且 $u_1 = 1$.

證明此數列為收斂並求其極限，試用圖形 $y = 6/(1 + x)$ 求此數列之元素。

15. 試證下列數列為收斂並求其極限：

$$(a) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}; \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (b) \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + k}, \quad a_1 = 0; \quad k > 0$$

1.6 求極限之方法：

16. $u_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = ?$

解：

首先以 n^2 同時除分子分母

$$u_n = \frac{\frac{n^2 - n + 2}{n^2}}{\frac{3n^2 + 2n - 4}{n^2}} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}}$$

再利用極限和及商之定理，可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}} \\ &= \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

式中利用大家所熟悉之事實：

於 $p > 0$ 時，恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = 0$.

17. $u_n = \frac{3n^2 - n + 1}{5n^2 - 4n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = ?$

解：

以 n^2 同時除分子與分母，而得

$$u_n = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5n - \frac{4}{n}}$$

當 n 無限制的增大時，分子趨於定值 3 而分母趨於 ∞ 故此分式之極限趨於 0：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5n - \frac{4}{n}} = 0.$$

由以上二例，我們知道欲求一數列之極限，常以 n 之乘方除之，將有助於所求。

試求下列各數列之極限：

18. $u_n = \frac{n^4 - 5n}{n^2 - 3n + 1}$

19. $u_n = \frac{n^3}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{2n + 1}$

20. $u_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n(n + 2)}$

21. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + n} - n}$

22. $u_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$

23. $u_n = \sqrt{n + a} - \sqrt{n}$

解：下面所用的簡單方法（常用的），將迅速求得極限之值：

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})(\sqrt{n+a} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = \frac{n+a-n}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}}; \end{aligned}$$

而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = 0.$$

試求下列各數列之極限：