高等学校试用教材

误差理论与数据处理

合肥工业大学费业泰 主编

机械工业出版社

误差理论与数据处理

合肥工业大学费业泰　主编

·

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

·

开本 787×1092 1/16·印张 11·字数 268 千字
1981 年 8 月北京第一版·1982 年 4 月北京第二次印刷
印数 9,401-14,000·定价 1.15 元

·

统一书号：15033·5041

前　言

本书是根据一九七八年四月一机部高等学校对口专业座谈会精神及同年十月精密计量仪器专业教材会议制订的《误差理论与数据处理》课程大纲编写的。主要讲述几何量、机械量精密测试技术中静态测量和动态测量的误差理论与数据处理，内容包括：误差的基本性质与处理；误差的合成；线性参数的最小二乘法处理；回归分析与谐波分析；随机过程及其数据处理等。

本书为高等学校精密计量仪器专业试用教材，也可以作为机械类，仪器仪表类有关专业的教学参考书，同时可供有关企业和科研单位的计量测量技术人员参考。

本书由合肥工业大学费业泰同志主编。参加编写的有合肥工业大学费业泰同志(第一、二章)；哈尔滨工业大学吴肇莹同志(第三章)，丁振良同志(第四章)；上海机械学院姚景风同志(第五章)；合肥工业大学邓善熙同志(第六章)等。本书由天津大学陈林才同志主审。另外天津大学罗南星同志参加了全书审稿和修稿工作，邓善熙同志、姚景风同志也参加了修稿工作。

本课程是根据一九七八年四月一机部高等学校对口专业教材座谈会精神，为了加强专业基础理论而设立的一门新课，还没有教学实践经验，同时由于编写者水平有限，编写时间仓促，书中肯定会存在缺点和错误，望读者批评指正。

目 录

第一章　绪　　论

§1-1　研究误差的意义

人类为了认识自然与改造自然，就需要不断地对自然界的现象进行测量和研究，由于实验方法和实验设备的不完善，周围环境的影响以及人们认识能力所限等，测量和实验所得数值和真实值之间，存在一定的差异，在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得愈来愈小，但始终不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为实践所证明，为了充分认识并进而减小和消除它，故必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行充分研究。

研究误差的意义为

① 正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差。

② 正确处理数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真实值的数据。

③ 正确组织实验，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济的条件下，得到理想的结果。

§1-2　误差的基本概念

一、误差的定义及表示法

所谓误差就是正确值和错误值之差，可用下式表示

$$误差=错误值-正确值 \tag{1-1}$$

这个公式称为误差的逻辑方程式，对于具体问题的误差公式，可根据逻辑方程式和实际情况来确定。例如在长度计量中，测量某一尺寸的误差公式为

$$误差=测得尺寸-真实尺寸 \tag{1-2}$$

式中的测得尺寸含有误差，可认为是“错误值”，而真实尺寸不含误差，可认为是“正确值”。

（一）绝对误差

某量值的测得值和真实值之差为绝对误差，通常称为误差。

$$误差=测得值-真实值 \tag{1-3}$$

由式(1-3)知，误差可能是正值或负值。

所谓真实值是指在一定条件下，某量值的实际值。量的真实值是一个理想的概念，一般是不知道的。但在某些特定情况下，真值又是可知的，例如：三角形三个内角之和为180°；一个整圆周角为360°等。为了使用上的需要，在有些情况下，可采用相应的高一级精度的标准量值（即约定真值）代替真实值。例如用二等标准活塞压力计测量某压力，测得值为9000.2牛顿/厘米^2，若该压力用更精确的方法测得为9000.5牛顿/厘米^2，后者可视为约定真值，此时，二等标准活塞压力计的测量误差为 -0.3 牛顿/厘米^2。

在实际工作中，经常使用修正值，即将测得值加修正值后可得近似的真实值。

$$\text{修正值}=\text{真实值}-\text{测得值} \tag{1-4}$$

$$\text{真实值}=\text{测得值}+\text{修正值} \tag{1-5}$$

修正值与误差值的大小相等而符号相反，测得值加修正值后可以消除该误差的影响，但必须注意修正值本身也有误差，因此修正后只能得到较测得值为准确的结果。

（二）相对误差

绝对误差与被测量的真实值之比值称为相对误差，因测得值与真实值接近，故也可近似用绝对误差与测得值之比值作为相对误差，即

$$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{真实值}}\approx\frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}} \tag{1-6}$$

相对误差是无名数，通常以百分数（%）来表示。例如用水银温度计测得某一温度为 20.3℃，该温度用更高一级精度的温度计测得值为 20.2℃，因后者精度高，故可认为 20.2℃接近真实温度，而水银温度计测量的绝对误差为 0.1℃，其相对误差为

$$\frac{0.1}{20.2}\approx\frac{0.1}{20.3}=0.5\%$$

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定较为确切。

例如用两种方法来测量 $L_1=100$ 毫米的尺寸，其测量误差分别为 $\delta_1=\pm10$ 微米，$\delta_2=\pm8$ 微米，根据绝对误差大小，可知后者的测量精度高。但若用第三种方法测量 $L_2=80$ 毫米的尺寸，其测量误差为 $\delta_3=\pm7$ 微米，此时用绝对误差就难以评定后者精度的高低，这时须采用相对误差来评定。

第一种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_1}{L_1}=\pm\frac{10\,\mu\text{m}}{100\,\text{mm}}=\pm\frac{10}{100000}=\pm0.01\%$$

第二种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_2}{L_1}=\pm\frac{8\,\mu\text{m}}{100\,\text{mm}}=\pm\frac{8}{100000}=\pm0.008\%$$

第三种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_3}{L_2}=\pm\frac{7\,\mu\text{m}}{80\,\text{mm}}=\pm\frac{7}{80000}=\pm0.009\%$$

由此可知第一种方法精度最低，第二种方法精度最高。

（三）引用误差

所谓引用误差指的是一种简化和实用方便的仪器仪表示值的相对误差，它是以仪器仪表满刻度示值为分母，某一刻度点的示值误差为分子，所得的比值称为引用误差。即

$$\text{引用误差}=\frac{\text{示值误差}}{\text{最大示值}} \tag{1-7}$$

例如，测量最大示值为 19600 牛顿的工作测力计（拉力表），在标定示值为 14700 牛顿处的实际作用力为 14778.4 牛顿，则此测力计在该刻度点的引用误差为

$$\frac{14700-14778.4}{19600}=\frac{-78.4}{19600}=-0.4\%$$

二、误差来源

在测量过程中，误差产生原因，可归纳为

(一)测量装置误差

1．标准器误差：标准器是提供标准量值的器具，如氪86灯管、标准量块、标准刻线尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，而它们本身体现出来的量值，不可避免地都含有误差。

2．仪器误差：凡是用来直接或间接将被测量和测量单位比较的设备，称为仪器或仪表，如阿贝比较仪、天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表。仪器和仪表本身都具有误差。

3．附件误差：仪器的附件及附属工具如调整环规、测量刀等的误差，也会引起测量误差。

装置误差一般表现为

① 机构误差：正弦机构或正切机构的非线性，天平不等臂，螺旋副的空程，机械零件联接的间隙等引起的误差。

② 调整误差：仪器仪表、量具在使用时没有调整到理想状态，如不垂直、不水平、偏心、零位偏移等而引起的误差。

③ 量值误差：标准量值本身的不准确性，量值随时间的不稳定性和随空间位置的不均匀性而引起的误差。如激光波长的长期稳定性、刻线尺长度的变化、标准电阻阻值的变化、硬度块上硬度值各处不等所引起的误差。

④ 变形误差：仪器仪表、量具在使用中的变形，如因零件材料性能的不稳定或仪器床身因测量部件移动产生的变形、内径千分尺的弯曲变形和压陷变形等引起的误差。

(二)环境误差

由于各种环境因素与要求的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压(引起空气各部分的扰动)、振动(外界条件及测量人员引起的振动)、照明(引起视差)、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规定条件下使用产生的示值误差称为基本误差，而超出此条件使用引起的误差称为附加误差。

(三)方法误差

由于采用近似的测量方法而造成的误差，如用钢卷尺测量大轴的圆周长s，通过计算求出大轴的直径$d=\frac{s}{\pi}$。由于π取值的不同，将会引起误差。

(四)人员误差

由于测量者受分辨能力的限制，因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化，固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等所引起的误差。

总之，在计算测量结果的精度时，对上述四个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

三、误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、偶然误差(或称随机误差)和粗大误差三类。

(一)系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。

例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

系统误差又可按下列方法分类：

1．按对误差掌握的程度分为

已定系统误差，即误差大小和方向为已知。

未定系统误差，即误差大小和方向为未知，但通常可估计出误差的范围。

2．按误差出现规律分为

不变系统误差，即误差大小和方向为固定值。

变化系统误差，即误差大小和方向为变化的。按其变化规律，又分为线性系统误差，周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

(二)偶然误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差称为偶然误差。

例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的变形等引起的示值不稳定。

(三)粗大误差

明显歪曲测量结果的误差称为粗大误差。如测量时对错了标志、读错了数、记错了数，以及在测量时因操作不小心而引起的过失性误差等。

上面虽将误差分为三类，但必须注意上述误差之间在一定条件下可以相互转化。对某一具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为偶然误差，反之亦然。如按一定公称尺寸制造的量块，存在着制造误差，其中某一块量块的制造误差是固定数值，可认为是系统误差，但它对一批量块而言，则又成为偶然误差。在使用某一量块时，没有检定出该量块的尺寸偏差，而按公称尺寸使用，则制造误差属偶然误差。若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为偶然误差，用数据处理方法减小误差的影响；或将偶然误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和偶然误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为偶然误差的某些误差分离出来作为系统误差来处理，或把某些系统误差当作偶然误差来处理。同样，对粗大误差，有时也难以和偶然误差相区别，而作为偶然误差来处理。

§1-3 精　　度

反映测量结果与真实值接近程度的量，称为精度，它与误差大小相对应。因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高。

精度可分为

① 准确度：它反映系统误差的影响程度；

② 精密度：它反映偶然误差的影响程度；

③ 精确度：它反映系统误差和偶然误差综合的影响程度，其定量特征可用测量的不精确度(或综合极限误差)来表示。

有时，精度在数量上可用相对误差来表示，如相对误差为0.01%，可笼统说其精度为10^{-4}，若纯属偶然误差引起，则说其精密度为10^{-4}，若是由系统误差与偶然误差共同引起，则说其精确度为10^{-4}。

对于具体的测量，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，但精确度高，则精密度与准确度都高。

如图 1-1 所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况，a) 的系统误差小而偶然误差大，即准确度高而精密度低。b) 的系统误差大而偶然误差小，即准确度低而精密度高。c) 的系统误差与偶然误差都小，即精确度高，我们希望得到精确度高的结果。

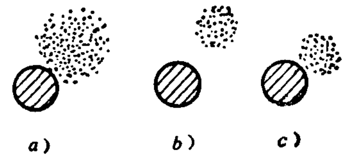

图 1-1

误差来源、分类和精度评定列于图 1-2。

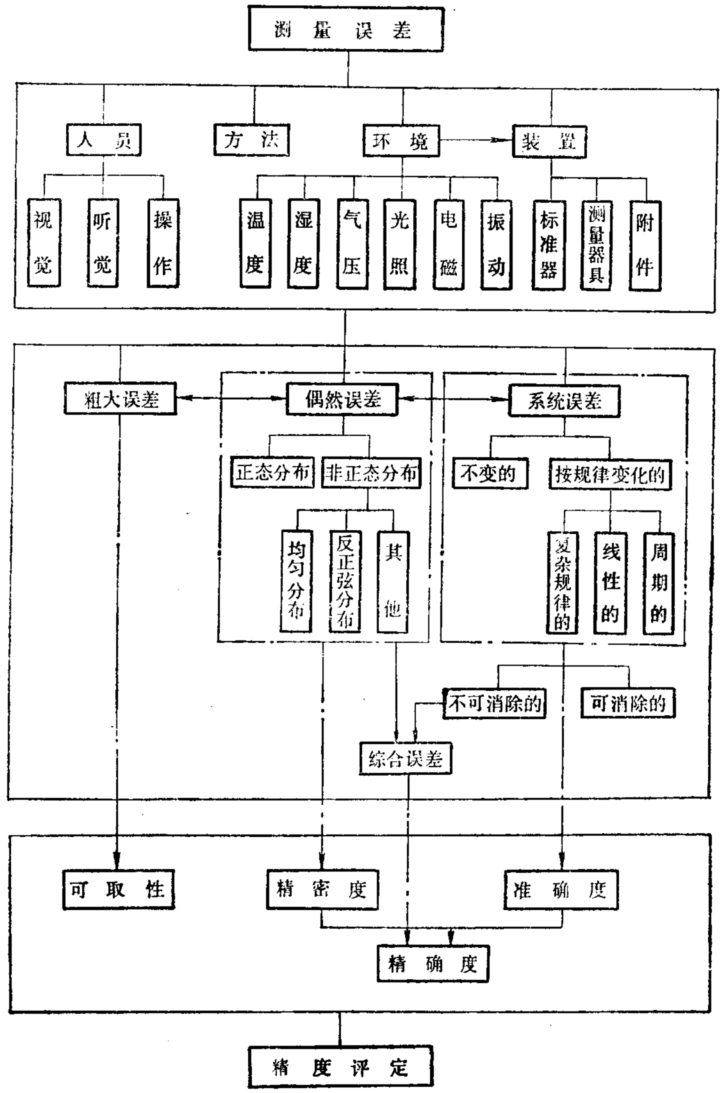

图 1-2

第二章　误差的基本性质与处理

任何测量总是不可避免地存在误差，为了提高测量精度，必须尽可能消除或减小误差，因此有必要对各种误差的性质，出现规律，产生原因，发现与消除或减小它们的主要方法以及测量结果的评定等方面，作进一步的分析。

§2-1　偶然误差

一、偶然误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量，得到一系列不同的测量值(常称为测量列)，每个测量值都含有误差，这些误差的出现没有确定的规律，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就误差的总体而言，却具有统计规律性。

偶然误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素所构成，主要有以下几方面：

(一)测量装置方面的因素：零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

(二)环境方面的因素：温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。

(三)人员方面的因素：瞄准、读数的不稳定等。

二、正态分布

若测量列中不包含系统误差和粗大误差，则该测量列中的偶然误差一般具有以下几个特征：

(一)绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等，这称为误差的对称性。

(二)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，这称为误差的单峰性。

(三)在一定的测量条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定界限，这称为误差的有界性。

(四)随着测量次数的增加，偶然误差的算术平均值趋向于零，这称为误差的抵偿性。

最后一个特征可由第一特征推导出来，因为绝对值相等的正误差和负误差之和可以互相抵消。对于有限次测量，偶然误差的算术平均值是一个有限小的量，而当测量次数无限增大时，它趋向于零。

服从正态分布的偶然误差是具有以上四个特征的。由于多数的偶然误差都服从正态分布，因而正态分布在误差理论中占有十分重要的地位。

设被测量的真实值为 L_0，一系列测得值为 l_i，则测量列中的偶然误差 δ_i 为

$$\delta_i = l_i - L_0 \tag{2-1}$$

式中　$i=1, 2, \cdots, n$

正态分布的分布密度 $f(\delta)$ 与分布函数 $F(\delta)$ 为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-2}$$

$$F(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\delta \tag{2-3}$$

式中 σ——标准误差(或均方根误差);

e——自然对数的底,其值为 2.7182…。

它的数学期望为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\delta f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=0 \tag{2-4}$$

它的方差为

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 f(\delta)\,\mathrm{d}\delta \tag{2-5}$$

其平均误差为

$$\theta=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta|f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=0.7979\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{2-6}$$

此外由 $\int_{-\rho}^{\rho}f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=\frac{1}{2}$

可解得或然误差为

$$\rho=0.6745\sigma\approx\frac{2}{3}\sigma \tag{2-7}$$

图 2-1 为正态分布曲线以及各精度参数在图中的坐标。σ 值为曲线上拐点 A 的横坐标,θ 值为曲线右半部面积重心 B 的横坐标,ρ 值的纵坐标线则平分曲线右半部面积。

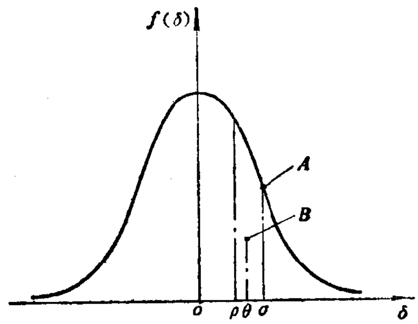

图 2-1

三、算术平均值原理

对某一量值进行一系列等精度测量,由于有偶然误差存在,其测得值皆不相同,应以全部测量值的算术平均值作为最后测量结果。

(一)算术平均值的意义

设 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为 n 次测量所得的值,则算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n} \tag{2-8}$$

式中[ ]为高斯符号,$[l]=l_1+l_2+\cdots+l_n$

算术平均值与被测的真实值最为接近,由概率论的大数定律可知,若测量次数无限增加,则算术平均值 $\bar{x}$ 必然趋近于真实值 L_0。

由式(2-1)求和得

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n=(l_1+l_2+\cdots+l_n)-nL_0$$

$$[\delta]=[l]-nL_0$$

$$L_0=\frac{[l]}{n}-\frac{[\delta]}{n}$$

由偶然误差第四特征可知:当 $n\to\infty$ 时,有 $\frac{[\delta]}{n}\to0$。所以

$$\bar{x}=\frac{[l]}{n}\to L_0$$

由此可见，如果可能对某一量进行无限多次测量，就可得到不受偶然误差影响的值，或其影响甚微，可以忽略。这就是当测量次数无限增大时，算术平均值(在数学上称之为最大或然值)被认为是最接近于真实值的理论根据。由于实际上都是有限次测量，但我们还是把算术平均值近似地作为被测量的真实值。

(二)算术平均值的两个性质

一般情况下，被测量的真实值为未知，不可能按式(2-1)求得偶然误差，这时可用算术平均值代替被测量的真实值，则有

$$v_i=l_i-\bar{x} \tag{2-9}$$

式中 v_i 为 l_i 的剩余误差；

l_i 为第 i 个测得值；

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

根据式(2-9)可以证明算术平均值有以下几个性质：

1．剩余误差的代数和等于零，即

$$[v]=0 \tag{2-10}$$

算术平均值这一性质，可用来检验在测量列中所计算的算术平均值和剩余误差是否正确。

2．剩余误差的平方和为最小，即

$$[v^2]=\text{最小}$$

剩余误差这一性质，建立了最小二乘法的理论基础。

例 2-1 用游标卡尺对某一尺寸测量 10 次，假定已消除系统误差和粗大误差，得到数据如下(单位为毫米)：

75.01, 75.04, 75.07, 75.00, 75.03, 75.09, 75.06, 75.02, 75.05, 75.08。

现将算术平均值的计算和验算列于表 2-1。

表中的算术平均值 $\bar{x}=75.045$，并任取与 $\bar{x}$ 接近的数 $A_1=75.04$ 和 $A_2=75.08$ 进行计算比较。

表 2-1

n	l	v	v^2	$A_1=75.04$ $v'=l-A_1$	v'^2	$A_2=75.08$ $v''=l-A_2$	v''^2
1	75.01	−0.035	0.001225	−0.03	0.0009	−0.07	0.0049
2	75.04	−0.005	0.000025	0	0	−0.04	0.0016
3	75.07	+0.025	0.000625	+0.03	0.0009	−0.01	0.0001
4	75.00	−0.045	0.002025	−0.04	0.0016	−0.08	0.0064
5	75.03	−0.015	0.000225	−0.01	0.0001	−0.05	0.0025
6	75.09	+0.045	0.002025	+0.05	0.0025	+0.01	0.0001
7	75.06	+0.015	0.000225	+0.02	0.0004	−0.02	0.0004
8	75.02	−0.025	0.000625	−0.02	0.0004	−0.06	0.0036
9	75.05	+0.005	0.000025	+0.01	0.0001	−0.03	0.0009
10	75.08	+0.035	0.001225	+0.04	0.0016	0	0
	$\bar{x}=75.045$	$[v]=0$	$[v^2]=0.00825$	$[v']=+0.05$	$[v'^2]=0.0085$	$[v'']=-0.35$	$[v''^2]=0.0205$

由表可知：$[v]=0$，而$[v']=+0.05$，$[v'']=-0.35$均不为零，$[v^2]=0.00825$，而$[v'^2]=0.0085$，$[v''^2]=0.0205$，即$[v^2]=$最小。由此清楚地表明算术平均值$\bar{x}$所具有的性质与应用。

四、测量的标准误差

（一）测量列中单次测量的标准误差

由于偶然误差的存在，等精度测量列中每个测得值一般都不相同，它们围绕着该测量列的算术平均值有一定的分散，这个分散度说明了单次测量值的不可靠性，故必须用一个数值作为测量列中单次测量值不可靠性的评定标准。

剩余误差v_i和偶然误差δ_i具有相同的特征，因此剩余误差也符合正态分布，如图2-2，其分布密度为

$$f(v)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \tag{2-11}$$

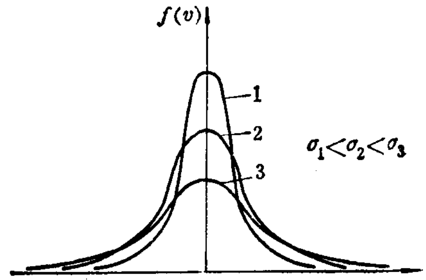

图 2-、

由式(2-11)可知：σ值愈小，则e的指数的绝对值愈大，因而$f(v)$减少得很快，即曲线变陡。而σ值愈小，在e前面的系数值变大，即对应于误差为零($v=0$)的纵坐标也大，曲线变高。反之，σ愈大，$f(v)$减小较慢，曲线平坦，同时对应于误差为零的纵坐标也小，曲线变低。图2-2中三个测量列所得的分布曲线不同，其标准误差也不相同，且$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$。

标准误差σ的数值小，该测量列相应小的误差就占优势，任一单次测量值对算术平均值的分散度就小，测量的可靠性就大，即测量精度高(如图中的第1条曲线)；反之，测量精度就低(如图中的第3条曲线)。因此单次测量的标准误差σ可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。

应该指出，标准误差σ不是一个具体的误差，σ的大小只说明，在一定条件下等精度测量列偶然误差出现的概率分布情况。在该条件下，任何一次单测量结果的误差v，都不等于σ，但却认为这一系列测量都具有同样一个标准误差σ。在不同条件下进行两个系列的等精度测量，一般具有不同的σ值。

在等精度测量列中，单次测量的标准误差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}} \tag{2-12}$$

当被测的真实值为未知时，按式(2-12)不能求得标准误差，因此必须用剩余误差来表示标准误差。由式(2-1)知

$$\delta_i=l_i-L_0$$

由此可得

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1=l_1-\bar{x}+\bar{x}-L_0\\ \delta_2=l_2-\bar{x}+\bar{x}-L_0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n=l_n-\bar{x}+\bar{x}-L_0\end{array}\right\} \tag{2-13}$$

式中$(\bar{x}-L_0)=\delta_{\bar{x}}$称为算术平均值的误差，将它和式(2-9)代入式(2-13)则有

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1=v_1+\delta_{\bar{x}}\\ \delta_2=v_2+\delta_{\bar{x}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n=v_n+\delta_{\bar{x}}\end{array}\right\} \tag{2-14}$$

将式(2-14)相加得

$$[\delta]=[v]+n\delta_{\bar{x}}$$

$$\delta_{\bar{x}}=\frac{[\delta]}{n}-\frac{[v]}{n}=\frac{[\delta]}{n} \tag{2-15}$$

若将式(2-14)平方后再相加得

$$[\delta^2]=[v^2]+n\delta_{\bar{x}}^2+2\delta_{\bar{x}}[v]=[v^2]+n\delta_{\bar{x}}^2 \tag{2-16}$$

将式(2-15)平方有

$$\delta_{\bar{x}}^2=\left(\frac{[\delta]}{n}\right)^2=\frac{[\delta^2]}{n^2}+\frac{[\delta_i\delta_j]}{n^2}\quad i\neq j$$

当 n 适当大时，可认为 $[\delta_i\delta_j]$ 趋近于零，并将 $\delta_{\bar{x}}^2$ 代入式(2-16)得

$$[\delta^2]=[v^2]+\frac{[\delta^2]}{n} \tag{2-17}$$

由式(2-12)可知

$$[\delta^2]=n\sigma^2$$

代入式(2-17)得

$$n\sigma^2=[v^2]+\sigma^2$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{2-18}$$

此式称为白塞尔(Bessel)公式，根据它可由剩余误差求得单次测量的标准误差。

评定单次测量的不可靠性还有或然误差 ρ 和平均误差 θ，若用剩余误差表示则为

$$\rho\approx\frac{2}{3}\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{2-19}$$

$$\theta\approx\frac{4}{5}\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{2-20}$$

(二)算术平均值的标准误差

在多次测量中是以算术平均值作为测量结果的，因此必须研究算术平均值的不可靠性。

如果在相同条件下对同一量值作 m 组重复的系列测量，每一组系列测量都有一个算术平均值，由于偶然误差的存在，这些算术平均值也不相同，它们围绕着被测量的真实值有一定的分散，这个分散说明了算术平均值的偶然值的不可靠性，而用算术平均值的标准误差作为其不可靠性的评定标准。

设 m 组重复测量，每一组皆进行 n 次等精度测量，得到 m 个算术平均值为 $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_m$，相应的测量列中单次测量标准误差为 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_m$，因系等精度测量，所以各组的标准误差相等，即

$$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_m=\sigma$$

在多次测量中是以算术平均值作为测量结果

$$\delta_{\bar{x}_i}=\bar{x}_i-L_0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

由此得算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 应为

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\delta_{\bar{x}1}^2+\delta_{\bar{x}2}^2+\cdots+\delta_{\bar{x}m}^2}{m}} \tag{2-21}$$

将式(2-15)平方得

$$\delta_{\bar{x}i}^2=\frac{\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}+\sum_{j,k=1}^{n}\delta_{ij}\delta_{ik}}{n^2} \quad i=1\sim m,\ j\neq k$$

当 n 适当大时，$\sum_{j,k=1}^{n}\delta_{ij}\delta_{ik}=0$

故

$$\delta_{\bar{x}i}^2=\frac{\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}^2}{n^2}$$

由定义

$$\sigma_i^2=\frac{\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}^2}{n} \quad i=1\sim m$$

比较以上两式，可得

$$\delta_{\bar{x}i}^2=\frac{\sigma_i^2}{n}$$

将 $\delta_{\bar{x}i}^2$ 代入式(2-21)，得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}{mn}}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

所以

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2-22}$$

用剩余误差表示算术平均值的标准误差

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{2-23}$$

由此可知在 n 次等精度测量中算术平均值的标准误差要比单次测量的标准误差小 $\sqrt{n}$ 倍，当 n 愈大时，所得的算术平均值愈接近真实值，测量的精确度愈高。

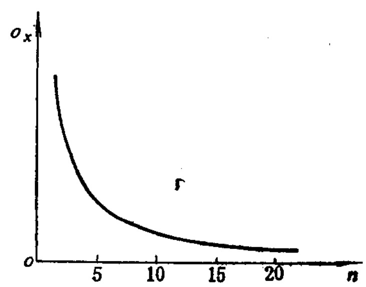

图 2-3

增加测量次数，可以提高测量精度，但是由于测量精度是与测量次数的平方根成反比，因此要显著地提高测量精度，必须付出较大的劳动。由图2-3可知，σ 一定时，当 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 已减少得非常缓慢。此外，由于测量次数愈大时，也愈难保证测量条件的恒定，从而带来新的误差，因此一般情况下取 $n=10$ 以内较为适宜。总之，要提高测量精度，应采用适当精度的仪器，选取适当的测量次数。

评定算术平均值的精度标准，也可用或然误差 R，平均误差 T 以及极限误差 $\delta_{\lim}$，相应的公式为

$$R=0.6745\sigma_{\bar{x}}=0.6745\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\rho}{\sqrt{n}} \tag{2-24}$$

$$T=0.7979\sigma_{\bar{x}}=0.7979\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\theta}{\sqrt{n}} \tag{2-25}$$

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t\sigma_{\bar{x}}=\pm\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2-26}$$

式中　t 为对应某一置信概率的置信系数，通常，取 $t=3$(理由见本节后述)。

若用剩余误差 v 表示上述公式，则有

$$R=0.6745\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{2-27}$$

$$T=0.7979\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{2-28}$$

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{2-29}$$

例 2-2　仍用例 2-1 的测量数据，按上述公式可得

$$\sigma=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.00825}{10-1}}=0.0303\text{ 毫米}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.0303}{\sqrt{10}}=0.0096\text{ 毫米}$$

$$R=0.6745\sigma_{\bar{x}}=0.6745\times0.0096=0.0065\text{ 毫米}$$

$$T=0.7979\sigma_{\bar{x}}=0.7979\times0.0096=0.0076\text{ 毫米}$$

取 $t=3$，则有

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t\sigma_{\bar{x}}=\pm3\times0.0096=\pm0.0288\text{ 毫米}$$

(三)标准误差的其他计算法

除了白塞尔公式外，计算标准误差还有别捷尔斯法，极差法，最大误差法等。

1. 别捷尔斯法

由白塞尔公式(2-18)

$$\sigma=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}$$

$$[\delta^2]=\frac{n}{n-1}[v^2]$$

此式可近似为

$$[|\delta|]\approx[|v|]\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

则平均误差为

$$\theta=\frac{[|\delta|]}{n}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}[|v|]$$

由式(2-6)得

$$\sigma=\frac{1}{0.7979}\theta=1.253\theta$$

故有

$$\sigma=1.253\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{2-30}$$

此式即为别捷尔斯公式，它可由 v 的绝对值之和求出 σ，而算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}}=1.253\frac{[|v|]}{n\sqrt{n-1}} \tag{2-31}$$

例 2-3 仍用例 2-1 的测量数据，则有

$$\sigma=1.253\times\frac{0.250}{\sqrt{10(10-1)}}=0.0330\text{ 毫米}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=1.253\times\frac{0.250}{10\sqrt{10-1}}=0.0104\text{ 毫米}$$

2．极差法

用白塞尔公式和别捷尔斯公式计算标准误差均需先求算术平均值，再求剩余误差，然后进行其他运算，比较复杂，在要求简单迅速算出标准误差时，可用极差法。

等精度多次测量得测量值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，在其中选取最大值 $x_{\max}$ 与最小值 $x_{\min}$，则两者之差称为极差 ω_n

$$\omega_n=x_{\max}-x_{\min} \tag{2-32}$$

根据极差的分布函数，可求出极差的数学期望为

$$E(\omega_n)=d_n\sigma \tag{2-33}$$

因

$$E\left(\frac{\omega_n}{d_n}\right)=\sigma$$

故可得 σ 的无偏估计值，此处仍以 σ 表示

$$\sigma=\frac{\omega_n}{d_n} \tag{2-34}$$

式中 d_n 的数值见表 2-2

表 2-2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.17	3.26	3.34	3.41	3.47	3.53	3.59	3.64	3.69	3.74

极差法可简单迅速算出标准误差，一般在 $n<10$ 时均可采用，而且用极差法算出 σ 的误差比用白塞尔公式算得的误差为小。

例 2-4 仍用例 2-1 的测量数据

$$\omega_n=l_{\max}-l_{\min}=75.09-75.00=0.09\text{ 毫米}$$

$$d_{10}=3.08$$

$$\sigma=\frac{\omega_n}{d_{10}}=\frac{0.09}{3.08}=0.0292\text{ 毫米}$$

3．最大误差法

在有些情况下，我们可以知道被测量的约定真值，因而能够算出偶然误差 δ_i，取其中绝对值最大的一个值 $|\delta_i|_{\max}$，当各个等精度的独立测量值服从正态分布时，则可求出关系式

$$\sigma=\frac{|\delta_i|_{\max}}{K_n} \tag{2-35}$$

当被测量的约定真值为未知时，应按最大剩余误差 $|v_i|_{\max}$ 计算标准误差，即

$$\sigma=\frac{|v_i|_{\max}}{K'_n}$$