

高等数学解题手册

高等数学
解题手册

目 录

中译本前言 (1)

第一章 平面解析几何 (1)

§1. 直角坐标和极坐标 (1)

一、直线上点的坐标·分线段成定比 (1)

二、平面上的直角坐标 (3)

三、极坐标 (6)

四、曲线的方程 (8)

五、曲线的参数方程 (13)

§2. 直线 (16)

一、直线的一般方程 (16)

二、直线的斜截式方程 (16)

三、直线的截距式方程 (17)

四、直线的法式方程 (17)

五、直线之间的夹角·直线的两点式方程 (19)

六、相交直线·点到直线的距离·直线束 (20)

§3. 二次曲线 (32)

一、圆 (32)

二、椭圆 (36)

三、双曲线 (39)

四、抛物线 (44)

§4. 坐标变换及二次曲线方程的化简 (46)

一、坐标变换 (46)

二、抛物线 $y = Ax^2 + Bx + C$ 和双曲线 $y = \left(\frac{kx + l}{px + q} \right)$ (48)

三、二次曲线的五项方程	(51)
四、化二次曲线的一般方程为标准方程	(53)
§5. 二阶和三阶行列式·二元和三元线性方程组	(58)
一、二阶行列式和二阶线性方程组	(58)
二、三阶行列式和三阶线性方程组	(62)
第二章 向量代数概要	(70)
§1. 空间直角坐标	(70)
§2. 向量及其简单运算	(72)
一、向量的分解和坐标	(72)
二、向量的模和方向余弦	(73)
三、向量的加减	(73)
四、向量与数量相乘	(73)
五、径向量	(74)
§3. 数量积·向量积和混合积	(76)
一、数量积	(76)
二、向量积	(77)
三、混合积	(78)
第三章 空间解析几何	(85)
§1. 平面和直线	(85)
一、平面	(85)
二、直线	(93)
§2. 二次曲面	(103)
一、球面	(103)
二、二次柱面和锥面	(105)
三、旋转曲面·二次曲面	(107)
四、二次曲面的一般方程	(110)

第四章	行列式和矩阵	(114)
§1.	n 阶行列式的概念	(114)
§2.	线性变换和矩阵	(122)
§3.	化二次曲线和二次曲面的一般方程为标准方程	(134)
§4.	矩阵的秩·等价矩阵	(144)
§5.	n 元线性方程组	(148)
§6.	线性方程组的高斯解法	(155)
§7.	线性方程组的约当-高斯解法	(160)
第五章	线代数基础	(171)
§1.	线性空间	(171)
	一、基本概念	(171)
	二、线性无关向量	(175)
	三、线性空间的维数和基底	(177)
	四、线性空间的同构	(179)
§2.	在转换基底时坐标的变换	(181)
§3.	子空间·线性生成系	(184)
	一、线性空间的子空间	(184)
	二、由齐次线性方程组的解形成的子空间	(186)
§4.	线性变换	(190)
	一、基本概念	(190)
	二、线性变换的矩阵	(192)
	三、线性变换的运算	(194)
	四、线性变换的特征数和特征向量	(201)
§5.	欧几里得空间	(206)
§6.	正交基和正交变换	(212)
	一、正交基底	(212)

二、正交变换	(217)
§7. 二次型	(218)
第六章 分析引论	(226)
§1. 绝对误差和相对误差	(226)
§2. 一元函数	(228)
§3. 函数的图形	(233)
§4. 极限	(236)
§5. 无穷小量的比较	(245)
§6. 连续函数	(248)
第七章 一元函数的微分法	(252)
§1. 导数和微分	(252)
一、显函数的微分法	(252)
二、隐函数的微分法	(268)
三、由参数方程表示的函数的微分法	(269)
四、导数在几何及力学中的应用	(270)
五、高阶导数	(273)
六、一阶和高阶微分	(277)
§2. 函数的研究	(280)
一、罗尔定理, 拉格朗日定理, 柯西定理和泰勒公式	(280)
二、罗必塔法则	(287)
三、函数的增减性·函数的极值	(292)
四、凹凸性·拐点	(300)
五、渐近线	(301)
六、根据特殊点作函数的图形	(305)
§3. 平面曲线的曲率	(308)
§4. 平面曲线相切的阶	(312)
§5. 实变量的向量函数及其导数	(314)

§6. 空间曲线的相伴三面体·曲率和挠率……………(318)

第八章 多元函数的微分法……………(325)

§1. 函数的定义域·等水平线和等水平面……………(325)

§2. 多元函数的导数和微分……………(327)

一、一阶偏导数……………(327)

二、全微分……………(330)

三、高阶偏导数和高阶全微分……………(333)

四、复合函数的微分法……………(337)

五、在已给方向上的导数·函数的梯度……………(339)

六、隐函数的微分法……………(343)

§3. 曲面的切面和法线……………(346)

§4. 二元函数的极值……………(349)

一、函数的极值……………(349)

二、条件极值·函数在封闭区域的最大值和最小值……………(351)

第九章 不定积分……………(355)

§1. 直接积分法·换元和分部积分法……………(355)

一、直接积分法……………(355)

二、不定积分中的换元……………(360)

三、分部积分法……………(369)

§2. 有理分式的积分法……………(374)

一、简单分式的积分法……………(374)

二、利用有理分式的分解求有理分式的积分……………(382)

§3. 简单无理函数的积分法……………(393)

一、形如 $\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \dots) dx$
的积分……………(393)

二、形如 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的积分……………(394)

三、形如 $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ 的积分	(395)
四、形如 $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的积分	(396)
五、形如 $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ 的积分	(397)
六、微分二项式的积分 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, 其中 m , n, p 是有理数	(400)
§4. 三角函数的有理式的积分法	(403)
一、形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 的积分	(403)
二、形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的积分	(408)
三、形如 $\int \operatorname{tg}^m x dx$ 和 $\int \operatorname{ctg}^m x dx$ 的积分, 其中 m 是正整数	(411)
四、形如 $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$ 和 $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ 的积分	(412)
五、形如 $\int \sec^{2n+1} x dx$ 和 $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x dx$ 的积分	(413)
六、形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $\int \cos^m x \sin^n x dx$, $\int \sin^m x \sin^n x dx$ 的积分	(414)
七、三角换元	(416)
§5. 不定积分杂题	(419)

第十章 定积分 (421)

§1. 定积分的计算	(421)
§2. 广义积分	(428)
一、基本概念	(428)
二、比较判别法	(431)
§3. 求平面图形的面积	(435)
§4. 求平面曲线的弧长	(437)
§5. 求立体的体积	(440)
一、已知立体之横截面的面积求它的体积	(440)

二、旋转体的体积	(440)
§6. 求旋转曲面的面积	(443)
§7. 平面图形的静力矩和转动惯量	(444)
§8. 求重心的坐标·古尔丁定理	(449)
§9. 求变力的功和液体的压力	(452)
§10. 双曲函数	(459)
第十一章 二重积分和三重积分	(467)
§1. 直角坐标的二重积分	(467)
§2. 二重积分中的换元法	(475)
一、利用极坐标计算二重积分	(475)
二、利用曲线坐标计算二重积分	(476)
§3. 平面图形的面积	(480)
§4. 立体的体积	(484)
§5. 曲面的面积	(487)
§6. 二重积分的应用	(491)
§7. 三重积分	(496)
§8. 三重积分的应用	(503)
§9. 依赖于参数的积分·在积分号下的微分法和 积分法	(507)
§10. Γ -函数和 B -函数	(514)
一、 Γ -函数	(514)
二、 B -函数	(520)
第十二章 曲面积分和曲线积分	(526)
§1. 对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分	(526)
一、对弧长的曲线积分 (第一类曲线积分)	(526)
二、对坐标的曲线积分 (第二类曲线积分)	(528)
§2. 第二类曲线积分与路线无关的条件·根据函	

数的全微分求原函数	(533)
§3. 格林公式	(537)
§4. 利用曲线积分求面积	(540)
§5. 曲面积分	(542)
§6. 斯托克斯公式和奥斯特罗格拉茨基-高斯公式	
· 场论初步	(548)
第十三章 级数	(558)
§1. 常数项级数	(558)
一、一般概念	(558)
二、收敛级数的基本定理	(559)
三、正项级数收敛性和发散性的判别法	(560)
四、任意项级数	(561)
§2. 函数项级数	(574)
§3. 幂级数	(581)
§4. 函数的幂级数展开	(589)
§5. 利用幂级数求函数的近似值	(594)
§6. 利用幂级数求极限和定积分	(603)
§7. 复数和复数项级数	(605)
一、复数	(605)
二、复数项级数	(614)
三、复变量指数函数和三角函数	(619)
§8. 傅里叶级数	(621)
§9. 傅里叶积分	(634)
第十四章 常微分方程	(642)
§1. 一阶常微分方程	(642)
一、基本概念	(642)
二、可以分离变量的微分方程	(643)

三、齐次微分方程	(651)
四、可以化为齐次方程的微分方程	(656)
五、全微分型微分方程	(658)
六、一阶线性微分方程·伯努利方程	(663)
七、形如 $x = \varphi (y')$ 和 $y = \varphi (y')$ 的微分方程	(672)
八、拉格朗日方程和克莱罗方程	(674)
§2. 高阶微分方程	(677)
一、基本概念	(677)
二、形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程	(678)
三、形如 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ 的方程	(679)
四、形如 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的方程	(682)
五、关于 $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ 的齐次微分方程 $F(x, y, y',$ $y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	(684)
§3. 高阶线性微分方程	(686)
一、基本概念	(686)
二、齐次线性方程	(688)
三、常系数齐次线性方程	(692)
四、非齐次线性方程	(696)
五、欧拉方程	(709)
§4. 利用级数解微分方程	(711)
一、微分方程的级数解法	(711)
二、贝塞耳方程	(714)
§5. 微分方程组	(719)
一、正规微分方程组	(719)
二、常系数齐次线性微分方程组的矩阵解法 (欧拉方法的 变形)	(724)

第十五章 概率论初步

§1. 随机事件及其频率和概率	(736)
-----------------------	---------

§2. 概率的加法公理和乘法公理	(739)
一、事件的关系和运算	(739)
二、概率的加法公理	(739)
三、条件概率·乘法公理·独立性	(740)
§3. 伯努利公式·事件出现的最可能数	(745)
§4. 全概率公式和贝叶斯公式	(749)
§5. 随机变量及其分布	(753)
§6. 随机变量的数学期望和方差	(760)
§7. 众数和中位数	(764)
§8. 均匀分布	(766)
§9. 二项分布和泊松分布	(768)
§10. 正态分布·拉普拉斯函数	(773)
§11. 随机变量的矩·偏度和峰态	(776)
§12. 大数定律	(783)
一、车贝晓夫大数定律	(783)
二、伯努利大数定律	(784)
§13. 棣莫佛-拉普拉斯定理	(789)
§14. 随机向量	(791)
一、随机向量及其分布	(791)
二、随机变量的独立性	(793)
三、随机变量的数字特征和联合数字特征	(793)
§15. 线性相关和回归	(806)
§16. 根据试验数据求随机变量的特征	(814)
一、总体和样本	(814)
二、频数和频率	(815)
三、经验分布函数	(819)
四、求随机变量的样本均值	(821)
五、求随机变量的样本方差和样本标准差	(823)
六、求随机变量的样本矩·样本偏度和样本峰态	(826)

§17. 根据试验数据确定随机变量的分布	(832)
一、均匀分布	(832)
二、泊松分布	(834)
三、正态分布	(837)
四、沙利耶分布	(842)
五、皮尔逊拟合准则和罗曼诺夫斯基拟合准则	(845)
六、柯尔莫戈洛夫拟合准则	(856)
第十六章 线性规划	(861)
§1. 线性不等式的解域·线性不等式组的解域	(861)
§2. 线性规划的基本问题	(866)
§3. 单形法	(870)
一、单形法的概念	(870)
二、单形表	(878)
三、退化解的概念	(884)
§4. 对偶线性规划	(888)
§5. 运输问题	(890)
一、求初始基础解	(891)
二、建立逐步迭代	(894)
第十七章 偏微分方程概论	(898)
§1. 偏微分方程	(898)
一、简单偏微分方程的例	(898)
二、一阶线性偏微分方程	(899)
§2. 二阶偏微分方程的类型·化偏微分方程为标准型	(901)
§3. 弦振动方程	(907)
一、弦振动方程的特征解法 (达朗贝尔解法)	(907)
二、弦振动方程的傅里叶解法	(910)

§4. 热传导方程	(916)
一、非平稳情形的热传导方程	(916)
二、平稳情形的热传导方程	(924)
§5. 圆上的狄利克雷问题	(926)
第十八章 复变函数论	(931)
§1. 复变函数	(931)
§2. 复变函数的导数	(936)
§3. 保角映射的概念	(940)
§4. 复变函数的积分	(945)
§5. 泰勒级数和罗郎级数	(952)
§6. 函数之留数的求法·利用留数计算积分	(960)
第十九章 运算微积初步	(968)
§1. 求函数之象函数	(968)
一、基本概念	(968)
二、求函数之象函数	(969)
§2. 根据象函数求象原函数	(971)
§3. 函数的卷积·象原函数之导数和积分的象函数	(978)
一、函数的卷积	(978)
二、象原函数的导数和积分	(978)
§4. 应用运算微积解某些微分方程和积分方程	(981)
§5. 一般反演公式	(985)
§6. 应用运算微积解数学物理方程	(988)
第二十章 计算方法	(995)
§1. 方程的近似解法	(995)
一、弦位法	(995)

二、切线法 (牛顿法)	(996)
三、联合法 (弦位法和切线法的联合运用)	(997)
四、迭代法	(998)
五、二分法 (试验法)	(998)
六、牛顿法的推广	(1006)
§2. 插值法	(1011)
一、拉格朗日插值多项式	(1011)
二、牛顿插值公式	(1013)
§3. 定积分的近似计算	(1017)
§4. 重积分的近似计算	(1024)
一、矩形公式	(1024)
二、切线公式	(1028)
三、梯形公式	(1028)
四、辛普森公式	(1030)
§5. 用蒙特-卡罗方法计算定积分和重积分	(1044)
一、用蒙特-卡罗方法计算定积分	(1044)
二、用蒙特-卡罗方法计算重积分	(1048)
§6. 微分方程的数值解法	(1064)
一、欧拉法	(1064)
二、龙格-库塔法	(1066)
三、亚当斯法	(1069)
§7. 皮卡逐次逼近法	(1072)
§8. 处理试验数据的方法	(1076)
一、图象法	(1076)
二、均值法	(1078)
三、最小二乘法	(1080)
答 案	(1089)
附 表	(1135)
I. Γ -函数值表	(1135)

I. 拉普拉斯函数值表	(1136)
II. 函数 $z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ 值表	(1137)
IV. χ^2 准则的概率值表	(1138)
V. 函数 $P(\lambda)$ 值表	(1140)
VI. 随机数表	(1140)
书中人名 (英、俄、汉文对照)	(1141)

第一章 平面解析几何

§1. 直角坐标和极坐标

一、直线上点的坐标·分线段成定比

对于坐标轴 Ox 上一点 M ，如果它的坐标为 x ，则简记为 $M(x)$ 。

设 $M_1(x_1)$ 和 $M_2(x_2)$ 是坐标轴上两点（假设它们在坐标轴上的位置是任意的）。那么，它们之间的距离为

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (1)$$

设 $[AB]$ 是某直线上的线段（ A 是线段的起点， B 是线段的终点）； C 是该直线上任意一点，分线段 $[AB]$ 成定比 λ ，其中 $\lambda = \pm |AC| : |CB|$ 。如果线段 $[AC]$ 与 $[CB]$ 同向，则 λ 取正号«+»；如果线段 $[AC]$ 与 $[CB]$ 反向，则 λ 取负号«-»。换句话说，如果 C 点位于 A 点与 B 之间，则 λ 为正数；如果 C 点位于线段 $[AB]$ 之外，则 λ 为负数。

设 A 和 B 是 Ox 轴上的两点，它们的坐标分别为 x_1 和 x_2 。那么，把 $A(x_1)$ 与 $B(x_2)$ 两点所夹的线段分成定比 λ 的点 $C(x)$ 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

特别，如果在（2）式中令 $\lambda = 1$ ，则得线段中点的坐标公式

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

1. 在坐标轴上描出点 $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3.5)$.

2. 线段 $[AB]$ 被四个点分成五等份. 已知 $A(3)$, $B(7)$, 试求离 A 点最近的分点的坐标.

解. 设 $C(x)$ 是所要求的点, 那么 $\lambda = |AC| : |CB| = \frac{1}{4}$.

从而, 由 (2) 式得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1,$$

即 $C(-1)$.

3. 已给线段 $[AB]$ 的两个端点 $A(1)$ 与 $B(5)$; 在该线段之外有一点 C , 它到 A 点的距离等于它到 B 点距离的 3 倍. 试求 C 点的坐标.

解. 易见, $\lambda = -|AC| : |BC| = -3$ (建议读者自己作图). 于是 C 点的坐标

$$x = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = 7,$$

即 $C(7)$.

4. 求两点之间的距离: 1) $M(3)$ 和 $N(-5)$; 2) $P(-11/2)$ 和 $Q(-5/2)$.

5. 求线段中点的坐标, 已知它的端点为: 1) $A(-6)$ 和 $B(7)$; 2) $C(-5)$ 和 $D(1/2)$.

6. 已知 M 点关于点 $P(2)$ 与 $N(-3)$ 点对称, 试求 M 点的坐标.

7. 线段 $[AB]$ 被两个点分为三等份. 已知 $A(-1)$, $B(5)$, 试求分点的坐标.

8. 已给点 $A(-7)$, $B(-3)$. 在线段 $[AB]$ 之外有两个