高等学校教材

高等数学

（第二版）

上册

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

本书由西安交通大学高等数学教研室在1979年版《高等数学》的基础上修订而成．本版对第一版的内容作了适当精简，体系上做了一些调整，还补充了一些综合习题，文字通畅、易懂，便于教学和自学．

全书共分上、下两册．上册内容包括函数、极限、一元微积分及其应用、级数等．

本书由华中工学院陆传务教授、林华夷副教授初审，大连工学院肖义珣教授复审，最后由工科数学教材编审委员会审定为教材．可供工科院校各专业使用．

高等学校教材

高 等 数 学

（第 二 版）

上 册

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 17.375　字数 420,000

1979年3月第1版　　1985年5月第2版　　1985年10月第1次印刷

印数 00,001—7,250

书号 13010·01120　　定价 3.50 元

目　录

第一章　函数、极限、连续

微积分是从量的方面来研究事物运动变化规律的一种基本的数学方法，它是本书的主要内容. 函数是微积分学研究的主要对象，极限是建立微积分方法的理论基础，连续是很广泛一类函数所具有的基本性质，连续函数是微积分学所讨论的函数的主要类型. 所以，本章是微积分的基础.

§1　函　　数

1-1　函数概念

关于函数概念以及常见的基本初等函数，中学已有比较仔细的讲授，这里，我们再作简要的复习，并着重指出其中一些要点.

当我们在观察、研究某些物质运动或生产过程时，常会遇到两种不同的量，一种量在过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做**变量**；另一种量在过程的进行中保持不变，或相对保持不变而可以看作保持一个固定的值，这种量叫做**常量**. 前者显得更为重要，因为正是通过它们，人们才能掌握事物变化的规律.

在一个具体的变化过程中，变量总有其取值范围，称为变域，而且在同一变化过程中，所涉及的各个变量之间总是相互联系、相互依赖的. 例如，在真空中自由下落的物体，经过的路程 s 随时间 t 不断变化，它们之间有如下依赖关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，变量 t 的变域是从开始时刻(设 $t=0$)到运动结束时刻(设 $t=t_1$)的一个区间 $[0, t_1]$. 对于变域 $[0, t_1]$ 上的

任一个值 t_0, 根据上述关系, 就有相应的路程

$$s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

与其对应. 函数概念就是这种变量间对应关系的抽象和概括.

函数定义 设有两个变量 x 和 y, 如果对于 x 在其变域内取得的每一个值, y 按照确定的法则有唯一确定的值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**, 自变量 x 的这个变域叫做函数的**定义域**. 当变域是一个区间时叫做**定义区间**. 对于定义域中自变量 x 的每个值, 因变量 y 的对应值的全体叫做函数的**值域**, y 与 x 之间的这种对应关系就叫做**函数关系**.

函数的这个定义包含着三个内容: 一是函数的定义域; 二是因变量与自变量的对应法则; 三是对应于自变量在定义域内所取的每一值, 因变量所对应的值叫做函数值. 下面分别加以说明.

函数的定义域 定义域就是允许自变量取值的范围. 在实际问题中, 函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的. 例如, 从上述自由落体运动的规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来看, 并不是对任意的 t, 都可以确定 s 的值. 只有在物体开始下落(设 $t=0$)到运动结束(设 $t=t_1$)这段时间里, 上述式子才有意义, 也就是说 s 作为 t 的函数, 只有当 t 在区间 $[0, t_1]$ 上取值时才有意义. 可见, 定义域是函数定义中的一个重要因素. 当我们提到一个函数时, 一般应该指明它的定义域. 当我们讨论仅由数学式子表示的函数而不考虑它的实际意义时, 它的定义域就是指使这个数学式子有意义的自变量的取值范围. 例如, 如果我们不考虑函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

的实际意义，那末这个函数的定义域应为无穷区间$(-\infty, +\infty)$.

例 1 求函数 $y=\frac{2}{\sqrt{x^2-3x-10}}$的定义域.

解 要使函数有意义，x 应满足

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)>0,$$

解此不等式，得 $x>5$ 和 $x<-2$，这就是函数的定义域，写成区间的形式是开区间$(-\infty, -2)$和$(5, +\infty)$.

对应法则 对应法则是因变量 y 与自变量 x 之间函数关系的具体表现. 它的表达方式可以是各种各样的，常见的有三种：

一种是用数学式子来表示的，叫做**公式表示法**，如 $s=\frac{1}{2}gt^2$，$y=\sqrt{x}$等，这种数学式子一般称为解析表达式；一种是用图形来表示的，叫做**图象表示法**，如自动记录的气温曲线等. 再一种是用表格来表示的，叫做**列表表示法**，如三角函数表、对数表等. 无论它们的表示方法如何不同，其共同本质都是刻划因变量与自变量的对应关系，所以对应法则是函数概念中最本质的因素. 变量 y 与变量 x 能构成函数关系，必须而且只须存在某一确定法则，使当 x 在定义域中每取一值时，y 有且仅有一个确定的值与之对应. 至于这个对应法则具体的表达方式是怎样的，函数定义对此并无要求. 在定义中，我们是用记号 $f(\ )$来一般地表示这种对应法则的. 这样，我们把自然现象中量与量之间错综复杂的函数关系概括成为 $y=f(x)$，从而进行一般地研究. 有时我们不把因变量 y 明显写出，而把函数简单地记作 $f(x)$. 这时 $f(x)$既表示对应法则也表示因变量 y. 当然，$y=f(x)$这个记号也可以用来表示 x 的具体函数. 例如，用$f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ 表示函数 $y=\frac{1}{2}gx^2$，用 $f(x)=\sin x$ 表示函数 $y=\sin x$. 但是如果我们要同时讨论几个不同的函数，

就得用不同的记号，如 $g(\quad),\varphi(\quad),F(\quad)$ 等等来分别表示它们不同的对应法则.

例 2 在电子技术中常遇到的三角波函数，其一个波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2,\end{cases}$$

它的图形如图 1.1 所示.

这个函数(一个波形)的对应法则在两个不同的区间内，是由两个不同的式子分段表示出来的，这样的函数叫做**分段函数**，其定义区间是[0, 2]. 要注意，这是一个函数，切不可误认为是两个函数. 当 t 取 0.5 与 1.5 时，按各自所在区间的对应法则的具体表达式，u 取得的对应值分别是 $u(0.5)=0.5$ 与 $u(1.5)=2-1.5=0.5$.

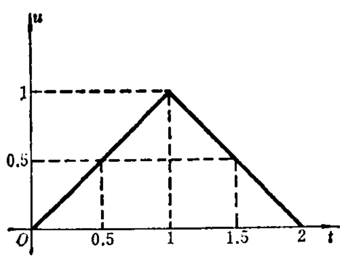


图 1.1

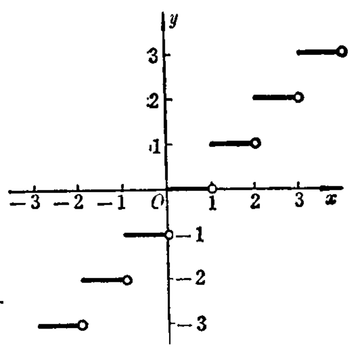


图 1.2

例 3 "取整函数"规定为: y 是不超过 x 的最大整数. 显然，对于 x 的任意一个值，都唯一地确定了 y 的一个对应值. 所以 y 是 x 的函数，记作

$$y=[x].$$

例如，$[8.23]=8,\quad[-1.5]=-2,\quad[5]=5,\quad[\pi]=3$ 等等. 取整函数的图形如图 1.2 所示.

函数值 对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内取得一

值 x_0 时，根据对应法则 $f(x)$ 所求得的因变量 y 的值 y_0，就叫做当 $x=x_0$ 时（或在 $x=x_0$ 处）的函数值，记作

$$y_0=f(x_0) 或 y_0=y\big|_{x=x_0}.$$

例 4 求函数 $y=x^2-3x+5$ 在 $x=2$，$x=x_0+1$，$x=x_0+h$ 各点处的函数值.

解 $y\big|_{x=2}=(2)^2-3(2)+5=3$.

如果用 $y=f(x)$ 表示函数 $y=x^2-3x+5$，那末

$$f(x)=x^2-3x+5,$$

于是在 $x=2$ 处的函数值为 $f(2)$，即

$$f(2)=(2)^2-3(2)+5=3.$$

同样 $f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$,

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5\\&=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).\end{aligned}$$

例 5 求函数

$$q(\tau)=\begin{cases}0.5\tau+5, & -10\leqslant\tau<0,\\ \tau+85, & 0<\tau\leqslant 10\end{cases}$$

在 $\tau=-4$，$\tau=5$ 处的函数值.

解 这是一个分段函数，不同点处的函数值应由相应区间内的式子确定. 所以，

$$q(-4)=0.5(-4)+5=3,$$

$$q(5)=5+85=90.$$

由前面的分析可知，如果一个函数的定义域及对应法则已经确定，那末函数值便随之而定. 因此，一个函数完全由定义域和对应法则确定，所以，定义域和对应法则是函数定义中的两个要素.

函数相等 如果两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的定义域相同，而且对于自变量在定义域内的任一值，它们所对应的函数值也相同，那末称这两函数相等. 记作

$$f(x)=g(x).$$

值得注意的是，两个函数是否相等，与其变量的记号无关，也不取决于其对应法则的表达形式，而决定于当自变量的值给定后，由此两对应法则所确定的因变量的值是否相同．例如函数

$$y=\sin^2 x+\cos^2 x,\quad u=\sin^2 t+\cos^2 t,\quad f(x)\equiv 1$$

彼此相等；而 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 却不相等，因为它们的定义域不同．但当 $x\neq 1$ 时它们是相等的．

一元与多元函数　在函数定义中，我们只提出了因变量 y 与一个自变量 x 之间的关系．但在自然现象中自变量不止一个而是几个的情况是很多的．例如，决定气体状态的三个物理量——体积 V，压强 p，绝对温度 T 之间，对于理想气体来说有如下的关系：

$$pV=RT,$$

其中 R 是一个常数，这个方程称为理想气体的状态方程．如果把上式写成

$$p=\frac{RT}{V},$$

那末，T、V 为相互独立的变量，而 p 与它们有确定的对应关系，当 T、V 分别在各自的变域中取确定值时，p 就依上述法则唯一确定，所以 p 是两个自变量 T 与 V 的函数．

我们把只含有一个自变量的函数叫做**一元函数**，把含有两个以上自变量的函数叫做**多元函数**，上述理想气体状态方程就是一个二元函数．含有 n 个自变量的函数就称为 **n 元函数**，记作

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

关于多元函数的问题，我们将在下册中详细讨论．现在主要讨论一元函数．

对于函数概念，我们可以给以如下的比喻．

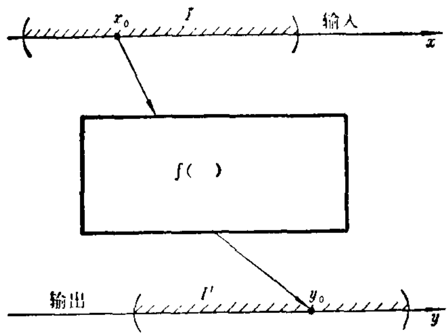


图 1.3

在图 1.3 中，设 $y=f(x)$的定义域为 I，值域为 I'. 我们把对应法则 $f(\quad)$看作一个计算器，自变量 x 的值作为输入数据，因变量 y 的对应值看作输出结果. 于是，输入 I 中的一个 x_0 值，经 $f(\quad)$运算后，便输出位于 I' 中的一个 y_0 值，这个 y_0 值就是对应于自变量 x_0的函数值 $f(x_0)$.

同样的思想可以解释多元函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，不过，这时输入的数据为一数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，经 $f(\quad)$运算后输出一个数值 y，它就是对应于自变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的一个函数值.

练习 1-1-1

1. 两个变量之间有什么特点才构成函数关系？
2. 指出下列方程哪些表示函数关系，哪些不是函数关系，为什么？
   (1) $x^2+y+1=0$;　　(2) $x^2+y^2+1=0$;
   (3) $x^2+y^2=0$;　　(4) $f(x)\equiv a$(常数).
3. 下列函数是否相等，为什么？
   (1) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$;　　(2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$;
   (3) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$;　　(4) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;
   (5) $y=x^2+1$ 与 $u=t^2+1$;

(6) $y=\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x$ 与 $y=\csc^2 x-\operatorname{ctg}^2 x$;

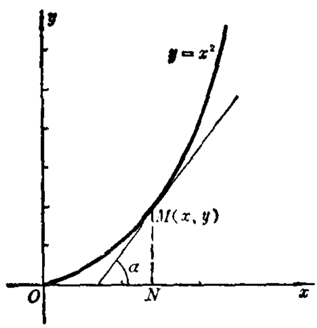
(7) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;　　　(8) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln|x|$.

4. 设 $M(x, y)$是曲线 $y=x^2$ 上的动点，问:

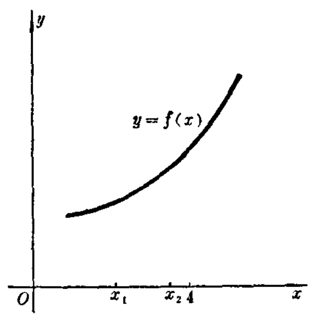
(1) 曲边三角形 ONM 的面积是不是 x 的函数?

(2) 弧长 $\overset{\frown}{OM}$ 是不是 x 的函数?

(3) 曲线在M点的切线的倾角 α 是不是 x 的函数?



(第 4 题)



(第 5 题)

5. $y_1=f(x_1)$, $3.6=f(4)$, 这些记号表示什么意思? 在图形上把它们表示出来. $f(x_2)-f(x_1)$在图形上又如何表示?

6. 指出下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{x}$;　　　(2) $y=\sqrt{1-|x|}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$;　　　(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$;

(5) $y=\log_{10}x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$.

7. (1) 设 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$, 求 $f(-3)$, $f(a)$, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$, $f(a)+1$, $f(a+1)$.

(2) 设 $f(x)=\sin x$, 求 $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, $f(\pi-x)$, $f(-x)$, $f(2x)$.

8. 作出下列各函数的图形:

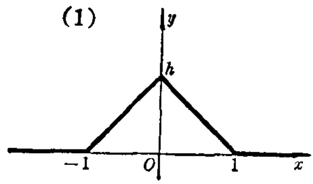
(1) $y=x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

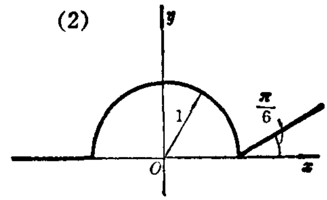
(2) $y=\sqrt{x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $y=|x-1|$, $-\infty<x<+\infty$;

(4) $y=|\sin x|$, $-\infty<x<+\infty$.

9. 写出由下列图形所表示的函数.





（第 9 题）

10. 已知

$$f(x)=\begin{cases} x, & -4\leqslant x<0, \\ 2, & 0\leqslant x<2, \\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$$

作出这函数的图形, 并求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3.5)$.

11. 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 规定为

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

(1) 作出这函数的图形, 并求 $x=-5$, $x=3$, $x=0$ 处的函数值;

(2) 证明: 对一切 x 有 $|x|=x\cdot\mathrm{sgn}(x)$.

12. 设 $f(x)=\log_a x$, 证明:

$$f(xy)=f(x)+f(y),\quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

1-2 函数的改变量与线性函数的基本性质

改变量 对于函数 $y=f(x)$, 当自变量从 x_0 变到 x_1 时, 相应地, 函数值从 y_0 变到 y_1. 我们称 x_1-x_0 为自变量 x 在 x_0 处的改变量, 简称**自变量的改变量**, 记作 Δx, 称 y_1-y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 y_0 处相应的改变量, 简称**函数的改变量**. 记作 Δy, 即

$$\Delta x=x_1-x_0,$$

$$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0). \tag{1-1}$$

由 $\Delta x=x_1-x_0$，得 $x_1=x_0+\Delta x$，于是，函数的改变量又可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad (1\text{-}2)$$

它的几何意义如图 1.4 所示.

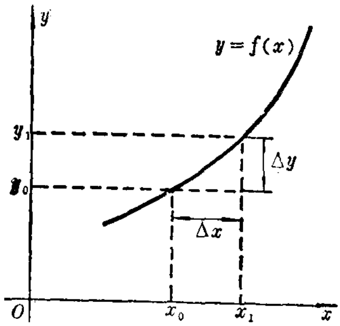


图 1.4

当已知自变量的初值 x_0 和终值 x_1 时，适宜于用公式(1-1)计算函数的改变量；当已知自变量的初值 x_0 和改变量 Δx 时，适宜于用公式(1-2)计算函数的改变量.

例 1 设 $y=3x^2+7x-1$，计算当 x 从 x_0 变到 x_1 时，函数 y 的改变量.

解 设 $f(x)=3x^2+7x-1$，得

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_1)-f(x_0)\\&=3x_1^2+7x_1-1-(3x_0^2+7x-1)\\&=(x_1-x_0)(3x_1+3x_0+7).\end{aligned}$$

例 2 设 $y=\dfrac{1}{x}$，计算当 x 有改变量 Δx 时，函数 y 的改变量.

解 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，由公式(1-2)

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\end{aligned}$$