目　录

引　言

每一类物理現象的机理在数学上都可以用所謂基本方程或基本方程組的形式写出来。为了能够把某一个个别現象从該类物理現象中区分开来，还必須有相应的具体条件，即所謂单值条件。

单值条件包括：

1．物理条件——工质(它的运动和变化构成了被研究現象的內容)的具体性质；通常是工质的聚合状态和物理参数（基本方程的参数）。

2．空間(几何)条件——发生所論現象的空間的几何形状和大小。它和边界条件結合起来(§4)，决定着所論現象的空間維数(一維的，二維的或三維的)及坐标系統的选择。

3．时間条件——发生所論現象时的条件(初始条件)，以及所論过程的定常性或非定常性。

4．边界条件——同周围介质相互作用的条件．边界条件在数学上可以用联系周围介质和所論現象的方程来表示。在个别情况下，这些方程能够簡化为在发生所論現象的空間边界上的函数值的固定表达式。

为了求得在数学上描述某个别現象的单值特解，从原則上讲，只要用基本方程組和单值条件就足够了。

作为例子，我們来研究一下热传导的基本微分方程以及在无限平板壁中定常热传导的具体情况下它的特解(图1)。

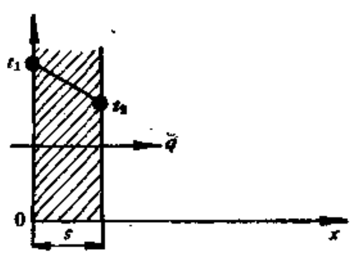

图 1

热传导的基本方程：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial x}w_x+\frac{\partial t}{\partial y}w_y+\frac{\partial t}{\partial z}w_z=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

这里 τ——时間；

x, y, z——流动坐标；

w——在点(x, y, z)上介质的运动速度；

w_x, w_y, w_z——速度沿坐标軸的分量；

t——点(x, y, z)处的溫度；

a——导溫系数，认为它与溫度无关。

第一个单値条件即物理条件，对于所討論的情况是：壁是固体的聚合状态，表征固壁的导热性的导溫系数 a 是确定的数値。由于壁是固体的聚合状态，它的各个微元間便沒有相对位移，那末所有微元的速度 $w=w_x=w_y=w_z=0$。因此，基本方程就变成如下形式：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \tag{1 a}$$

第二个单値条件是空間条件或几何条件：壁厚为 s 的无限平板。把这个条件同边界条件結合起来就确定了現象是一維的，并选取直角坐标系。这样一来，$\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial z}=0$，因而式(1 a)即变成

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{1 б}$$

第三个单値条件是时間条件：現象的过程是定常的，即溫度不随时間变化$\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$。至此，基本方程的最終形式是

$$\frac{d^2 t}{dx^2}=0. \tag{1 в}$$

积分这个方程，得到

$$\frac{dt}{dx}=C. \tag{1 г}$$

第四个单値条件是边界条件，在本例中是垂直板面进入和流

出平板的热流是一常数，并且在入口处 ($x=0$) 和出口处 ($x=s$) 同样都等于$q=-\lambda\frac{dt}{dx}=$常值．从这个条件得知积分常数 $C=-\frac{q}{\lambda}$。这里，q 为热流，λ 为固壁的热传导系数。

这样，在区間 $x=0(t=t_1)$ 到 $x=s(t=t_2)$内对方程(1 r)再进行积分，可得无限平板定常热传导的最終表示式：

$$q=\frac{\lambda}{s}(t_1-t_2). \tag{2}$$

可惜的是，仅仅象在本例这样簡单的情况下，这一类問題才能得到严格的分析解．在大多数情况下，为了闡明我們所感兴趣的現象的規律性，必須求諸实驗方法．然而，考虑到同类現象是无限多的，为了积累个别实驗的数据而进一步把它們推广到同类現象中去，就必須进行大量的实驗．同时，为了进行細致的研究，常常要使用繁重的很难办到或根本办不到的工程装置进行实驗．如果采用相似方法，上述两种实驗研究上的困难便可大大減少．

相似方法是一个科学方法，借助它可以把个别現象的研究結果推广到所有相似現象上去，它也是現象模拟方法的基础．(所謂模拟就是在实驗室內用縮小的、有时是放大的模型来进行現象的研究．)相似方法不是一种独立的科学研究方法，它与数学分析(分析法)或科学实驗(实驗法)不能等量齐观．借助分析法或实驗法都能揭露物理現象的規律性，但仅靠相似方法却不可能，因为它只是实驗和分析研究的輔助方法．然而，它的运用，在研究工作者面前提供了如下的可能性：

(1) 对个別的实驗結果作出广泛的推广；

(2) 用模型对現象进行实驗研究；

(3) 对复杂的方程可得出很簡单的分析解和很通用的数字解；

(4) 从将一个具体的物理过程中所得出的分析解，推广到所有其它相似过程中去．

物理相似仅能在同类物理現象中发生．此外，还有数学相似

或数学类比,即形式上完全一样的基本微分方程組(和边界条件方程)描述不同类型的物理現象.例如,热传导方程[方程(1)—(16)]在形式上和液体在毛細管中层流运动时的扩散方程及具有分布电阻和电容(沿导綫)的电路方程完全一样.数学类比也能得出很有价值的結果,但本书不去研究它,因为它是另一个独立的大課題.有兴趣的讀者可看专門文献[4,13,19,30].

在闡明基本材料以前,先談一下本书的目的、任务以及它的內容的性质.

作者的目的是想給出相似方法的实际指导,而不是严格証明相似方法的原理[1].因此,本书仅叙述相似方法的实质(不加任何証明)及其在解决最重要的工程物理問題上的实际应用.

現在,普遍采用的相似論研究方法有两种:一种是基于对基本微分方程組和单值条件的分析;另一种是基于量綱分析.在热工、物理化学中采用第一种方法比較优越,第二种方法主要用在水力学方面.当根据量綱分析来研究現象的相似时,可能把一个或者几个主要因素漏掉(如有名的里来佯謬[21])[2].要想对产生現象的全部本质条件都考虑到,基本微分方程組和单值条件的綜合能够在某种程度上提供充分的保証。因此,本书中将全部采用第一种方法(根据对基本微分方程組和相应的单值条件的分析)来研究流体动力学的、热学的及物理化学的相似問題.

用第一种方法要熟悉該現象的物理方程.因此,在本书中对遇到的方程将簡述它們的物理意义.

为了使讀者不經过前两章(关于相似方法的实质)就能閱讀他們直接感兴趣的其它部分,在一些重要地方将作故意的重复,特别是关于相似方法所用数学工具在每一节都要談到.

本书由五章組成,如已經指出的前两章闡明相似方法的实质(基本原理与数学工具),其余三章研究流体动力学、热学及物理化学相似的詳細范例.本书沒有写出历史材料,因为这些材料在有

1) 有兴趣的讀者可参閱文献[3,14,15,21,22,23,24].

2) 特别是对于复杂的現象更是如此.

关文献中曾多次地讲过(参看[21])。

对于本书的一切意見作者都非常感謝，幷請寄給哈薩克科学院动力研究所。

最后，作者对于Л. А. 佛里斯教授在編写本书时所提的珍貴建議和意見表示衷心地感謝。

第一章　相似方法的基本原理

§ 1. 相似的实质

相似概念是由初等几何学中借用来的。初等几何学中多边形相似的定义是："两个同名多角形[1]，如果它們的对应角相等，对应边成比例，则是相似的"（图 2）。

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\text{常数}$$

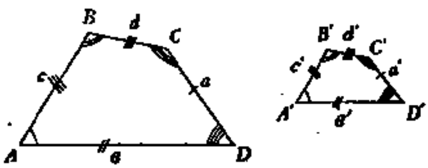

图 2

实质上，几何或空間相似只是物理相似的特例；任何物理相似在形式上都可以化为几何相似。

这样一类物理现象，如果它們所有的特征量都相似，即所有的向量在几何上相似，所有的标量都相应地[2]成比例，则称为是相似的。让我們研究几个物理相似的例子来說明上述定义。

空間（几何）相似，如上所述，空間相似就是所有对应角相等，所有綫性尺寸相应地成比例（图 3）。

$$\frac{l_1'}{l_1}=\frac{l_2'}{l_2}=\frac{l_3'}{l_3}=M_l=\text{常数}$$

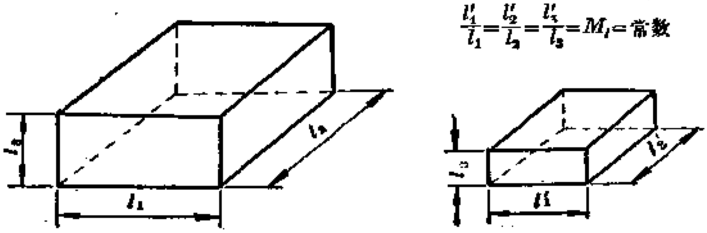

图 3

1) 角数即边数相同的多角形叫做同名多角形。

2) 換句話說，即在对应的空間点上和对应的时刻。

时間相似(諧时性)：时間相似就是对应的时間間隔成比例。指示图相仿的两个内燃机就是一个例子(图4)。同步性(图4中若$\frac{\tau'}{\tau}=1$或$\tau'=\tau$, $\tau_1'=\tau_1$, $\tau_2'=\tau_2$...)是諧时性的一个特殊情况。

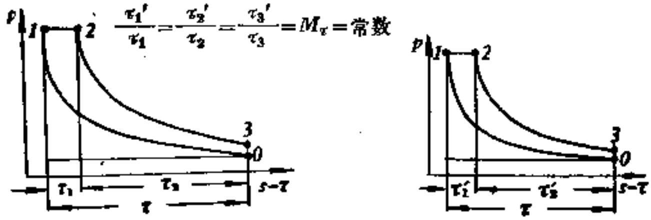

图 4

运动相似：运动相似即速度場(及加速度場)的几何相似。它表现为所有的速度都有相对应的方向，它的大小相应地成比例*)。在不同直径的圓管內液体的层流运动就是一个例子(图5)。

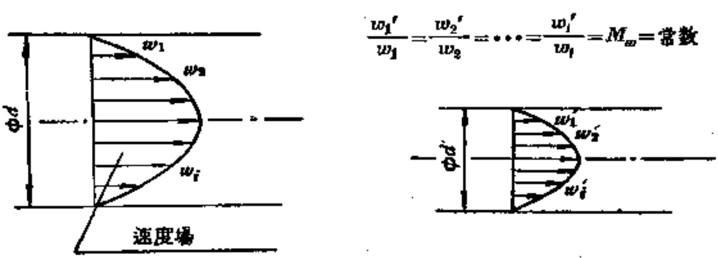

图 5

动力相似：动力相似即力場的几何相似。它表现为所有的作用力都有相对应的方向，它的大小相应地成比例。具有几何上相似的索多角形的两个受載梁就是一个例子(图6)。

溫度相似[1]：溫度相似就是溫度場的几何相似。它表现为所有的溫度都成相应的比例。等溫綫成几何相似的两个瓦斯、煤油

*) 即在相对应的点上和在相应的时刻，向量的方向相同，大小成比例。下同——譯者註。

1) 一般地説，即任何标量的相似，如濃度、压力等等。

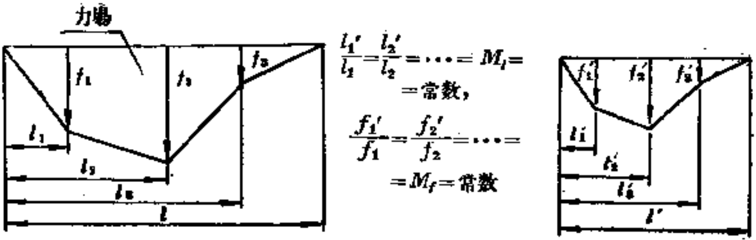

图 6

或煤粉的軸对称火舌就是一个例子(图 7)。

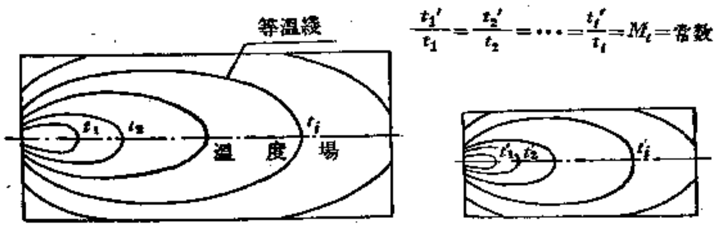

图 7

由上述各例看出，物理相似实际上可以(形式地)归結为向量場和标量場的几何相似。

§ 2. 相似的数学表述式

根据上一节的叙述，物理量的相似在数学上就表現为下列的比例形式：

1) 标量(例如温度)相似：

$$\frac{u_1'}{u_1}=\frac{u_2'}{u_2}=\cdots=\frac{u_i'}{u_i}=M_u=\text{常数};$$

2) 向量(例如速度)相似：

$$\frac{u'_i}{u_i}=\frac{u'_{ix}}{u_{ix}}=\frac{u'_{iy}}{u_{iy}}=\frac{u'_{iz}}{u_{iz}}=M_u=\text{常数}.$$

其中 u——任何的特征量，可以是标量（如温度）也可以是向量(如速度)；对于向量，u 理解为它的絕对值。

M_u——比例常数，即所謂相似比例(相似常数或相似变换

倍数)[1]。

沒有上标的符号代表第一物理現象或者原型，有上标"′"的代表第二物理現象或者模型．脚标 1，…，i 代表空間(場)的相应的点和相应的时刻．脚标 x, y, z 代表在相应坐标軸上的分量．

在模拟物理現象时，相似比例就是模型的比例：

M_l——綫性相似比例；

M_τ——时間相似比例；

M_w——速度相似比例；

M_f——力的相似比例；

M_t——溫度相似比例；等等。

置換法則：根据比例的性质，如果

$$\frac{u_1'}{u_1}=\frac{u_2'}{u_2}=M_u=\text{常数},$$

則

$$\frac{u_1'+u_2'}{u_1+u_2}=\frac{u_2'-u_1'}{u_2-u_1}=\frac{\Delta u'}{\Delta u}=M_u=\text{常数}.$$

由于常量的极限値就等于它的本身，因此

$$\lim\left(\frac{\Delta u'}{\Delta u}\right)_{\Delta u\to 0}=\frac{du'}{du}=M_u=\text{常数}.$$

根据这个法則，推导物理現象相似准則时(如在第二章§1中)，对于特征量的任意阶导数可以用相应特征量的比値(冪次組合量)即所謂积分类比来代替．例如在研究热传导現象时，包含在方程(1)中各阶导数：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial t}{\partial x}, \cdots \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \cdots$$

可以用它們的积分类比来代替：

$$\frac{t}{\tau}, \frac{t}{x}, \cdots, \frac{t}{x^2}, \cdots.$$

---

1) 每一种特征量(例如溫度的相似比例、速度的相似比例等)和每一对相似現象都有它們自己不同的比例常数．

§3. 相似准則

比較同类現象、个别現象和相似現象，根据前面的叙述，我們对于这些概念可以給出如下的定义：

1. 同类物理現象——它們是用同一个基本物理方程組（方程中各參数和变数具有相同的物理意义）所描述的現象的总和。

2. 个别現象——这是同类物理現象中由一定的单値条件所决定的一种現象。

3. 相似現象——它們是同类現象中特征量（首先是单値条件）相似的現象群。換句話說，相似現象就是仅仅在特征量（首先是单値条件）的比例上有所区别的同类現象群。

物理現象相似的必要和充分条件：

1）对变数作相似变換时（所有变数都用和它成比例的量代替），基本方程組具有不变性（恒定性），即同时存在着方程：

$$f(u_1, u_2, \cdots, u_n)=0;$$

$$f(M_1u_1, M_2u_2, \cdots, M_nu_n)=0,$$

这里 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为不同的变数；

$M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为对应的相似比例；

2）基本方程組的所有物理參数均相似；

3）空間（几何）相似；

4）过程的定常性，或者在过程的初始时刻（指非定常过程）所有变数場均相似；

5）边界条件（在系統的边界上的条件）相似。

現在詳細研究上面第一个条件，首先必須指出，已定的无量綱組合*）的不变性（即在相对应的空間点上和相对应的时刻，其无量綱組合相等）是变数作相似变換时基本方程保持不变性的必要和充分的特征。下面的例子可以說明这一点。

我們来研究前面曾引用过的方程（1）中变数的相似变換問題。

---

*）即由已知參数組成的无量綱組合量——譯者註。

規定第一現象(原型)的量都不带上标"′"，第二現象(模型的量都带上标"′"。它們的方程如下：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial x}w_x+\frac{\partial t}{\partial y}w_y+\frac{\partial t}{\partial z}w_z=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right); \qquad (\text{I}-1)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'}+\frac{\partial t'}{\partial x'}w_x'+\frac{\partial t'}{\partial y'}w_y'+\frac{\partial t'}{\partial z'}w_z'=$$

$$=a'\left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2}\right). \qquad (\text{I}-1')$$

因为它們是相似現象，所以，由相似現象的数学表示式便得：

$$\frac{t'}{t}=M_t,\ \frac{\tau'}{\tau}=M_\tau,\ \frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\frac{l'}{l}=M_l,$$

$$\frac{w_x'}{w_x}=\frac{w_y'}{w_y}=\frac{w_z'}{w_z}=\frac{w'}{w}=M_w,\quad \frac{a'}{a}=M_a.$$

因而：

$$t'=M_t t,\ \tau'=M_\tau \tau,\ x'=M_l x,\ \cdots,$$

$$w_x'=M_w w_x,\ \cdots,a'=M_a a.$$

把上列得到的第二現象(模型)的变数值代入(I-1′)，即在基本微分方程中对变数作相似变换，方程(I-1′)就变成下面形式：

$$\frac{M_t}{M_\tau}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{M_w M_t}{M_l}\left(\frac{\partial t}{\partial x}w_x+\frac{\partial t}{\partial y}w_y+\frac{\partial t}{\partial z}w_z\right)=$$

$$=\frac{M_a M_t}{M_l^2}a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (\text{I}-1'\text{a})$$

作相似变换时，为了保持基本微分方程(I-1)和(I-1′)的不变性，方程(I-1′a)各項的系数必須彼此相等，即：

$$\frac{M_t}{M_\tau}=\frac{M_w M_t}{M_l}=\frac{M_a M_t}{M_l^2},$$

即 $$\frac{M_t}{M_\tau}=\frac{M_a M_t}{M_l^2},\quad \frac{M_w M_t}{M_l}=\frac{M_a M_t}{M_l^2},$$

或者，把上式化为等于 1 的比式[1]：

$$\frac{M_a M_\tau}{M_l^2}=M_{\left(\frac{a\tau}{l^2}\right)}=1,$$

$$\frac{M_w M_l}{M_a}=M_{\left(\frac{wl}{a}\right)}=1.$$

由此可见，已定的无量綱組合的相似比例必須等于 1 。这意味着相似現象的上述无量綱組合应当保持不变。实际上，把变数代入上面的相似比例式中，即可得到：

$$\frac{\frac{a'}{a}\frac{\tau'}{\tau}}{\frac{l'^2}{l^2}}=1 \text{ 或者 } \frac{a'\tau'}{l'^2}=\frac{a\tau}{l^2}=K_1=\text{不变量}^{*)},$$

$$\frac{\frac{w'}{w}\frac{l'}{l}}{\frac{a'}{a}}=1 \text{ 或者 } \frac{w'l'}{a'}=\frac{wl}{a}=K_2=\text{不变量}.$$

这里談的是不变性(恒定性)，而不是常量，因为上述无量綱組合仅仅在該系統(場)的对应点上才相等；对非定常过程来說，除在对应点上外还要处于对应的时刻。对于該系統的不同点(和不同时刻)来說，上述組合可以是不相同的，即：

$$\frac{a_1'\tau_1'}{l_1'^2}=\frac{a_1\tau_1}{l_1^2},\quad \frac{a_2'\tau_2'}{l_2'^2}=\frac{a_2\tau_2}{l_2^2};$$

$$\frac{w_1'l_1'}{a_1'}=\frac{w_1l_1}{a_1},\quad \frac{w_2'l_2'}{a_2'}=\frac{w_2l_2}{a_2};$$

但是

$$\frac{a_1'\tau_1'}{l_1'^2}\neq\frac{a_2'\tau_2'}{l_2'^2},\quad \frac{a_1\tau_1}{l_1^2}\neq\frac{a_2\tau_2}{l_2^2};$$

$$\frac{w_1'l_1'}{a_1'}\neq\frac{w_2'l_2'}{a_2'},\quad \frac{w_1l_1}{a_1}\neq\frac{w_2l_2}{a_2}.$$

---

1) 由于方程(Ⅰ-1)是綫性的齐次的，并且 a 不随溫度而变，所以溫度的相似比例M_t可以消掉。

*) 原文为$\frac{a'\tau'}{l'^2}=\frac{a\tau}{l}=K_1$，恐系誤印——譯者註。

无量綱組合的不变性是物理現象相似的数量特征即判据，这些无量綱組合就称作相似准則(有时也称作相似不变量)。

由已知量(单値条件所給定的量)組成的相似准則叫做已定相似准則。对于物理現象的相似，除单値条件須相似外，只要已定相似准則保持不变就够了。其余的相似准則的不变性是物理現象相似的結果。因此，这些相似准則叫作未定或待定相似准則[1)]。

根据以上的討論，已定相似准則不变和单値条件相似是物理相似的必要和充分条件。

§ 4. 准則方程

由于已定相似准則的不变性是相似的必需条件，而待定相似准則的不变性是物理現象相似的結果，因此这两种相似准則之間就存在着一定的因果关系。这种关系在数学上可以表成待定相似准則对已定相似准則的单値函数关系的形式：

$$K_u=f_1(K_1, K_2, \cdots, K_n),$$
$$K_v=f_2(K_1, K_2, \cdots, K_n),$$
$$K_w=f_3(K_1, K_2, \cdots, K_n),$$

其中 $K_1, K_2, \cdots, K_n$——已定相似准則；

$K_u, K_v, \cdots, K_w$——待定相似准則。

待定相似准則对已定相似准則的函数关系叫作准則方程。

准則方程就是我們所感兴趣的基本微分方程組的具体特解(积分)[23,24]。

通常，直接由一般理論来确定准則方程中函数关系的具体形式是不可能的。探求这个函数关系的具体形式可以有两条路，即众所周知的經驗法和分析法。

建立准則方程具体形式的經驗法可总括如下：

1) 由实驗来測量出相似准則中所包括的一切量；

2) 把实驗数据配成准則的形式，并将結果用准則关系的图表

---

1) 把相似准則分成已定和待定两种是有条件的，在某些情况下它們能够互換。

形式表示出来；必要时归納出經驗公式，这些公式令人滿意地描述了所得的准則关系。

經驗法的缺点是：

1）实际利用这种方法的局限性。只在已定相似准則只有两个，最多三个的情形下才能运用这种方法；

2）在很多情况下，必須把实驗得来的关系分为若干段，对于其中的每一段有不同的經驗公式；

3）經驗准則方程只对所研究的准則数値范围是适用的，特别是各段具有不同的經驗公式时更是这样。

对所討論現象确定其准則方程具体形式的分析法乃是：对基本微分方程組求分析解（准确的或近似的），它表成准則的形式幷包括全部必需的相似准則。在实驗驗証（比較理論的与实驗的規律性）之后，这样所得的准則方程就能够用于以后的研究和工程計算上。

如果任何一个已定相似准則在其某一数値范围內变动时，而現象的相似性实际上幷不破坏，則对于該准則而言，这种現象叫做是自模拟。該准則的相应数値范围叫做自模拟区。

当所論物理現象群对某一个已定准則为自模拟时，准則方程中就不再包括該准則。作为例子，可以指出流体力学上，液体在管道中作自模拟的层流运动（$0<Re<2300$），其速度場总是相似的，而与已定的流体力学的雷諾准則的数値无关。

§5. 模拟的一般原理

任何物理現象的模拟就是实現与“原型”相似的現象，此时，作为实驗研究对象而被实現的現象就是整个相似現象群的“模型”。

在下述两种情况下，必須采用模拟：

1）当需要研究的工程对象很难直接进行研究或根本不能进行直接研究时；在这种情况下要用模型来获得相似于該工程对象（已有的实物）的現象。

2）当需要研究新設計的工程对象时；这里的模型就是所有和

它相似的实物对象的“雛形”，用这个模型可以获得与新設計的工程对象(尙未存在的实物对象)相似的現象。

为了正确地模擬現象，也就是为了使模型上的現象和原型上的現象相似，必須且只須遵守下述基本条件(参看§1—4，[24]，由相似方法的基本原理直接引出)：

1）模型的現象和原型的現象应当属于同一类，即用同一个基本微分方程組所描述。(例如，根据这一条件，用可压縮流体，特别是蒸汽或压縮空气来模拟不可压縮流体的現象是不正确的)。

2）在模型和原型的对应断面上，已定相似准則在数值上必須相等。只有成自动模拟的那些准則才可以不遵守这个条件。

3）模型和原型的基本微分方程組中的同名物理参数必须相似，也就是相应地成比例。

4）模型与原型必須成几何相似。

5）模型的时間条件(或者是定常过程，或者非定常过程的初始条件)应当这样确定，使之与原型的相应条件相似。

6）模型的边界条件与原型的边界条件必須相似。

在进行模拟时，边界条件具有特殊的意义。对于任何物理化学問題的理論(分析)解，所有边界条件都是同等的，因为它們都是单值条件，也就是对于所研究的具体情况，求其基本方程組的单値解的必要条件。当用模型对物理現象进行实驗研究时，实际上需要实現边界条件，而实現的方法却不一样。从这个观点来看，存在两类边界条件：一类是可以按实驗者的意願建立的可控制的边界条件；另一类是不以实驗者的意志为轉移的不可控制的边界条件，这类条件只受物理現象本身的規律支配。

为了能够求得所研究問題的单値解，必須在原型的整个空間边界上，給定可控制的边界条件。如果遇到了困难，即，如果在某一界面上的可控制边界条件是未知的，則必須扩大原型的边界并且选择这样的新的界面，在它上面可控制边界条件确实已知。同时必須把相应的补充方程同描述該現象的基本方程組联立起来。

为了实現不可控边界条件，必須保証模型和原型的相应边界