

OLYMPIC
MATHS

奥林匹克数学

初一分册

训练题集



钱展望 朱华伟 / 编著
湖北教育出版社

奥林匹克数学训练题集
初一分册

钱展望 朱华伟 / 编著

湖北教育出版社

与《奥林匹克数学》
初一分册配套

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学训练题集·初一分册/钱展望,朱华伟编著.
—武汉:湖北教育出版社,2002

(奥林匹克数学系列丛书)

ISBN 7-5351-3146-8

I. 奥… II. ①钱…②朱… III. 数学课—初中—习题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011133 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址: <http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新华书店

印 刷:湖北新华印务有限公司

(430034·武汉市解放大道 145 号)

开 本:850mm × 1168mm 1/32

5 印张

版 次:2002 年 3 月第 1 版

2002 年 3 月第 1 次印刷

字 数:122 千字

印数:1-5 000

ISBN 7-5351-3146-8/G·2552

定价:8.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

目 录

测试题一	1
测试题二	5
测试题三	9
测试题四	14
测试题五	19
测试题六	23
测试题七	28
测试题八	33
测试题九	38
测试题十	44
测试题十一	49
测试题十二	54
测试题十三	59
测试题十四	63
测试题十五	69
测试题十六	75
测试题十七	82
测试题十八	90
测试题十九	96
测试题二十	102
测试题二十一	107
测试题二十二	113
综合测试题一	118
综合测试题二	125
综合测试题三	132
综合测试题四	140
综合测试题五	148

测试题一

一、选择题

1. a, b 两数差的平方除以 a, b 两数的平方差是 ().

(A) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ (B) $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

(C) $\frac{a-b^2}{a^2-b^2}$ (D) $\frac{a^2-b^2}{a-b^2}$

2. 甲数为 a , 乙数为 b , “用甲数的 3 倍与乙数的差去除甲数与乙数 2 倍的和”, 写成代数式为 ().

(A) $\frac{3a-b}{a+2b}$ (B) $\frac{a+2b}{3a-b}$

(C) $\frac{3a-b}{a} + 2b$ (D) $\frac{a}{3a-b} + 2b$

3. 若代数式 $2x^2 + 3y + 7$ 的值为 8, 那么代数式 $4x^2 + 6y + 9$ 的值是 ().

(A) 1 (B) 2

(C) 11 (D) 无法确定

4. 已知 a 是一个两位数, b 是一位数 ($b \neq 0$). 如果把 b 放置于 a 的左边组成一个三位数, 这个三位数是 ().

(A) ab (B) $b+a$

(C) $10b+a$ (D) $100b+a$

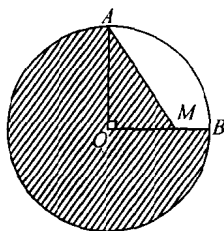
5. A, B 两地相距 s 千米, 甲、乙的速度为 a 千米/时, b 千米/时 ($a > b$). 甲、乙都从 A 到 B 去开会, 如果甲比乙先出发 1 小时, 那么乙比甲晚到 B 地的小时数是 ().

(A) $\frac{s}{a} - (\frac{s}{b} + 1)$ (B) $\frac{s}{b} - (\frac{s}{a} + 1)$

(C) $\frac{s}{a} - (\frac{s}{b} - 1)$ (D) $\frac{s}{b} - (\frac{s}{a} - 1)$

二、填空题

6. 如图, O 为圆心, 半径 $OA = OB = r$, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 M 在 OB 上, $OM = 2MB$, 用 r 表示阴影部分的面积是_____.



(第6题)

7. 浓度为 $p\%$ 的盐水 m 千克, 加入 n 千克水后盐水的浓度是_____.

8. 如果 a 名同学在 b 小时内共搬运 c 块砖, 那么 c 名同学以同样的速度搬运 a 块砖所需的小时数是_____.

9. 已知容器盛满浓度为 $a\%$ 的盐水 100 克, 倒出 x 克后, 又用水加满, 则后来盐水的浓度为_____.

10. 一次测验成绩中, 得 m 分的 a 人, 得 n 分的 b 人, 得 p 分的 c 人, 则这次测验的平均成绩为_____.

三、解答题

11. 已知 $\frac{xy}{x+y} = 2$, 求代数式 $\frac{3x - 5xy + 3y}{-x + 3xy - y}$ 的值.

12. 有一杆最多能称 5kg 的弹簧秤, 在称物体重量时, 发现弹簧长度 l cm 与重量 x kg 之间有一固定的关系, 试根据下表写出用 x 表示 l 的公式, 并求出当 $x = 5$ 的 l 的值.

x (kg)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3
l (cm)	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5

13. 某商店有幸福金笔和英雄金笔共 143 支, 幸福金笔每支 6 元, 英雄金笔每支 3.78 元. 某学校购了该商店的全部英雄金笔和部分幸福金笔, 经过核算后, 发现应付款的总数与幸福金笔的总数无关. 问购买的幸福金笔是该商店幸福笔总数的百分之几? 应付款是多少元?

解 答

一、选择题

1. 解 a, b 两数差的平方为 $(a - b)^2$, a, b 两数的平方差为 $a^2 - b^2$, 前者除以后者, 选(A).

2. 解 甲数的3倍与乙数的差为 $3a - b$, 甲数与乙数2倍的和为 $a + 2b$, 前者去除后者, 选(B).

3. 解 $4x^2 + 6y + 9 = 2(2x^2 + 3y + 7) - 5 = 2 \times 8 - 5 = 11$. 选(C).

4. 解 b 置于 a 的左边, 即 b 位于百位上. 故选(D).

5. 解 甲、乙在路上所花时间分别为 $\frac{S}{a}, \frac{S}{b}$. 乙比甲要多 $(\frac{S}{b} - \frac{S}{a})$ 小时, 又甲早走1小时, 故乙晚到 $[\frac{S}{b} - (\frac{S}{a} - 1)]$ 小时. 选(D).

二、填空题

6. 解 阴影部分的面积 S 等于圆面积的 $\frac{3}{4}$ 加上三角形 AOM 的面积, 即

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4} \pi r^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} OB \cdot OA = \frac{3}{4} \pi r^2 + \frac{1}{3} r^2 \\ &= (\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}) r^2. \end{aligned}$$

7. 解 $\frac{mp}{m+n} \%$.

8. 解 每一名同学平均每小时所搬砖头为 $\frac{c}{ab}$ 块, c 名同学按此速度每小时搬砖头 $\frac{c^2}{ab}$ 块, 他们搬运 a 块砖头所需时间为 $a \div \frac{c^2}{ab} = \frac{a^2 b}{c^2}$.

9. 解 后来盐水中含盐 $(100 - x) a \%$, 其浓度为 $\frac{(100 - x) a \%}{100}$

$$\times 100\% = \frac{(100-x)a}{100}\%.$$

10. 解 总分为 $(am + bn + cp)$, 平均分为 $\frac{am + bn + cp}{a + b + c}$.

三、解答题

11. 解 依题设, 知 $xy = 2(x + y)$, 故

$$\text{原式} = \frac{3(x+y) - 5 \times 2(x+y)}{3 \times 2(x+y) - (x+y)} = \frac{-7(x+y)}{5(x+y)} = -1\frac{2}{5}.$$

12. 解 根据题设表格可以发现称重的物体每加重 1 千克, 弹簧就伸长 2cm, 未挂重时弹簧原长 5.5cm, 故有公式

$$l = 5.5 + 2x \quad (x \text{ 为 } 0 \text{ 与 } 5 \text{ 之间的数})$$

当 $x = 5$ 时,

$$l = 5.5 + 2 \times 5 = 15.5(\text{cm}).$$

13. 解 设购买的幸福金笔占幸福金笔总数的百分比为 x , 幸福金笔总数为 m 支, 付款总数为 S 元. 依题意, 得

$$\begin{aligned} S &= 6xm + 3.78(143 - m) \\ &= 6xm - 3.78m + 3.78 \times 143. \end{aligned}$$

因 S 与 m 无关, 故

$$6x = 3.78,$$

即 $x = 0.63 = 63\%$. 此时 $S = 540.54(\text{元})$.

答 购买的幸福金笔是该商店幸福金笔总数的 63%, 应付款 540.54 元.

测试题二

一、填空题

1. 数 $-1.1, -1.01, -1.001, -1.00101$ 中最大的一个数与最小的一个数的比值是_____.

2. 若 x 的绝对值小于 1, 则 $|x+1| + |x-1|$ 的值是_____.

3. $\left| \frac{1}{1001} - \frac{1}{1000} \right| + \left| \frac{1}{1002} - \frac{1}{1001} \right| - \left| \frac{1}{1002} - \frac{1}{1000} \right| =$ _____.

4. 已知 a 的相反数是 $-2\frac{2}{3}$ 的倒数的绝对值, 则 $a =$ _____.

5. 四个有限数 a, b, c, d 满足 $\frac{|abcd|}{abcd} = -1$, 则 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|d|}{d}$ 的最大值是_____.

二、选择题

6. 设 a 是最小正整数, b 是最大负整数的相反数, c 是绝对值最小的有理数, 则 a, b, c 三数之和为 ().

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. a, b, c 为非零有理数, 且 $a + b + c = 0$, 则 $\frac{|a|b}{a|b|} + \frac{|b|c}{b|c|} + \frac{|c|a}{c|a|}$ 的值等于 ().

(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) 不能确定

8. 若 a, b, c 为整数, 且 $|a-b|^{19} + |b-c|^{99} = 1$, 则 $|c-a| + |a-b| + |b-c|$ 的值为 ().

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 不能确定

9. 设有理数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 1$, 则 a, b, c 中正数的个数是 ().

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

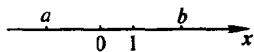
10. a, b 为有理数, 在数轴上如图所示, 则 ().

$$(A) \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$$

$$(B) \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$$

$$(C) \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$$

$$(D) 1 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$



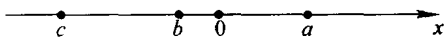
(第 10 题)

三、解答题

11. 计算

$$-40 \frac{1}{2} \times (1 \frac{1}{4} + \frac{109}{144}) \div (0.5) \div \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{3} [(-2)^2 - 2^2].$$

12. 设有理数 a, b, c 在数轴上的对应点如图所示, 化简 $|b - a| + |a + c| + |c - b|$.



(第 12 题)

13. 将 $1, 2, 3, \dots, 100$ 这 100 个自然数任意分成 50 组, 每组两个数, 现将每组的两个数中任一个数记为 a , 另一个数记为 b , 代入代数式 $\frac{1}{2}(|a - b| + a + b)$ 中进行计算, 求出其结果. 50 组都代入后可求得 50 个值, 求这 50 个值的和的最大值.

14. 怎样把数列 $1, 2, 3, \dots, 1996$ 中所有数重新排列成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1996}$, 使 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1995} - a_{1996}|$ 最大?

解 答

一、填空题

1. 解 最大数为 -1.001 , 最小数为 -1.1 , 所求比值为 0.91 .

2. 解 因 $|x| < 1$, 故 $-1 < x < 1$, 原式 $= (x+1) + (1-x) = 2$.

3. 解 原式 $= (\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}) + (\frac{1}{1001} - \frac{1}{1002}) - (\frac{1}{1000} - \frac{1}{1002})$
 $= \frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{1002} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{1002}$
 $= 0$.

4. 解 $-2\frac{2}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{8}$, 其绝对值为 $\frac{3}{8}$. 因 a 的相反数是 $\frac{3}{8}$, 则 a 为 $-\frac{3}{8}$.

5. 解 依题意, $abcd < 0$. 故 a, b, c, d 中有一个负数, 或 3 个负数, 显然, a, b, c, d 中有一个负数时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|d|}{d}$ 有最大值 2.

二、选择题

6. 解 $a=1, b=-(-1)=1, c=0$, 故 $a+b+c=2$. 选(D).

7. 解 至少有一正数, 也至少有一负数. 不妨设 $a > 0, c < 0$. 于是, 所求值为

$$\frac{ab}{a|b|} + \frac{|b|c}{b(-c)} + \frac{-ca}{ca} = \frac{b}{|b|} - \frac{|b|}{b} - 1 = -1.$$

选(C).

8. 解 由于 a, b, c 为整数, 故 $|a-b| \geq 1, |b-c| \geq 1$. 惟有 $|a-b|=0, |b-c|=1$ 或 $|a-b|=1, |b-c|=0$. 当 $|a-b|=0, |b-c|=1$ 时, $a=b, b-c=\pm 1$, 所求值为 2; 当 $|b-c|=0, |a-b|=1$ 时, 同样所求值为 2. 选(A).

9. 解 由 $abc=1$ 可知 a, b, c 中正数的个数为奇数. 又 $a+b+$

$c=0$, 可知 a, b, c 不能全为正数. 所以 a, b, c 中有一个正数. 选 (C).

10. 解 由图示知 $b > 1, a < 0$, 故 $\frac{1}{a} < 0, 0 < \frac{1}{b} < 1$. 选 (B).

三、解答题

11. 解 原式 = $(-\frac{81}{2}) \cdot (\frac{289}{144} \times 2) \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times 0 = 289$.

12. 解 由图示可知 $a > 0, b < 0, c < 0$, 且 $|c| > |a| > |b| > 0$, 故 $b - a < 0, a + c < 0, c - b < 0$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a - b) - (a + c) + (b - c) \\ &= a - b - a - c + b - c \\ &= -2c. \end{aligned}$$

13. 解 任意一组两个数必有一大一小, 不妨设 $a > b$, 则

$$\frac{1}{2}(1|a - b| + a + b) = \frac{1}{2}(a - b + a + b) = a.$$

可见 50 组的值只与大数 a 有关, 欲使它们的和最大, 这 50 组的大数应分别取 51, 52, \dots , 100, 它们的和为

$$51 + 52 + \dots + 100 = 3775.$$

14. 解 在 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1995} - a_{1996}|$ 中, $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{1995}$ 各用到两次, 而 a_1 和 a_{1996} 各用一次, 为了使它达到最大值, 把 1, 2, 3, \dots , 1996 分成两类: 一类是 1996, 1995, \dots , 998, 另一类是 997, 996, \dots , 2, 1. 由于 $a_1, a_2, \dots, a_{1996}$ 互不相等, 则设想 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1995} - a_{1996}| = 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{1994}) + a_{1996} - a_1 - 2(a_3 + a_5 + \dots + a_{1995})$. 为使其最大, 带正号的数尽量取其较大, 带负号数尽量取其较小, 故可构造出下面的排列: 997, 1996, 1, 1995, 2, 1994, 3, 1993, \dots , 996, 998, 则其 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1995} - a_{1996}|$ 取得最大值为

$$2(1996 + 1995 + \dots + 999) + 998 - 2(1 + 2 + \dots + 996) - 997 = 1993004.$$

另外, 上述排列不是惟一的.

测试题三

一、填空题

1. $899999 + 89999 + 8999 + 899 + 89 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $13 \frac{4}{19} + 86 \frac{15}{19} \times 0.25 + 0.625 \times 86 \frac{15}{19} + 86 \frac{15}{19} \times 0.125 = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + 4 \times 8 \times 16 + 5 \times 10 \times 20}{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + 4 \times 12 \times 36 + 5 \times 15 \times 45} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \cdots + 1997 + 1998 - 1999 - 2000 + 2001 = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\frac{190091}{19901990^2 - 19901989 \times 19901991} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 10筐苹果的重量如下:(单位:千克)

52, 53, 49, 47, 50, 54, 51, 48, 48, 49

则平均每筐苹果重 $\underline{\hspace{2cm}}$ 千克.

二、计算题

7. $(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17}) \times (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) - (1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) \times (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17})$.

8. $(\frac{1}{3} - \frac{7}{12} + \frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56}) \times 2^3 \times 21$.

9. $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{10 \times 12}$.

10. $\{1 - [\frac{1}{16} - (-0.25)^3] \times (-2)^4\} \div [7 \times (-\frac{1}{8}) + 5 \div (-8 + 4 \times (-0.125))]$.

11. $1 + 2^2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^8$.

12. 某水池装有编号为 1, 2, \dots , 9 的 9 个进出水管. 已知所开的水管号与水池灌满的时间如下表:

水管号	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	9,1
时间(小时)	2	4	8	16	31	62	124	248	496

问 9 个水管一齐开几小时可以把水池灌满?

解 答

一、填空题

1. 解 原式 = $(9 \times 10^5 - 1) + (9 \times 10^4 - 1) + (9 \times 10^3 - 1) + (9 \times 10^2 - 1) + (9 \times 10 - 1) = 999990 - 5 = 999985$.

2. 解 原式 = $13 \frac{4}{19} + 86 \frac{15}{19} \times (0.25 + 0.625 + 0.125)$.
= $13 \frac{4}{19} + 86 \frac{15}{19} = 100$.

3. 解 原式 = $\frac{8 \times (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)}{27 \times (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)} = \frac{8}{27}$.

4. 解 原式 = $1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \cdots + (1998 - 1999 - 2000 + 2001) = 1$.

5. 解 原式 = $\frac{190091}{19901990^2 - (19901990 - 1)(19901990 + 1)}$
= $\frac{190091}{19901990^2 - (19901990^2 - 1)}$
= 190091.

6. 解 计算各数与 50 的差,再计算差的平均数为

$$\frac{1}{10}(2 + 3 - 1 - 3 + 0 + 4 + 1 - 2 - 2 - 1) = \frac{1}{10}.$$

故平均每筐 $50 \frac{1}{10}$ 千克.

二、计算题

7. 解 原式 = $[1 + (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17})](\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) - [1 + (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19})](\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17})$
= $(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) + (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17})(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) - (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17}) - (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}) \times (\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17})$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{13} + \frac{1}{17}) \\
& = \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} = \frac{1}{19}.
\end{aligned}$$

8. 解 原式 = $(\frac{1}{3} - \frac{7}{3 \times 4} + \frac{9}{4 \times 5} - \frac{11}{5 \times 6} + \frac{13}{6 \times 7} - \frac{15}{7 \times 8}) \times 2^3 \times 21$

$$\begin{aligned}
& = [\frac{1}{3} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) \\
& \quad + (\frac{1}{6} + \frac{1}{7}) - (\frac{1}{7} + \frac{1}{8})] \times 2^3 \times 21 \\
& = (-\frac{1}{8}) \times 2^3 \times 21 \\
& = -21.
\end{aligned}$$

9. 解 原式 = $\frac{1}{2}[(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$$\begin{aligned}
& \quad + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{10} - \frac{1}{12})] \\
& = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12}) = \frac{175}{264}.
\end{aligned}$$

10. 解 原式 = $[1 - (\frac{1}{16} + \frac{1}{4^3}) \times 16] \div (-\frac{7}{8} - \frac{5}{8} - 4 \times \frac{1}{8})$

$$= (1 - 1 - \frac{1}{4}) \div (-2) = \frac{1}{8}.$$

11. 解 记 $S = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^8$, 则

$$2S = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 8 \times 2^8 + 9 \times 2^9.$$

相减得 $-S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 - 9 \times 2^9,$

$$-2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 + 2^9 - 9 \times 2^{10}.$$

再相减可得 $S = 1 + 9 \times 2^{10} - 10 \times 2^9 = 4097.$

12. 解 考虑所有水管同时开 1 小时, 并把全池灌满水作为 1 单位, 则

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \frac{31 \times (1 + 2 + 4 + 8) + 16 + (1 + 2 + 4 + 8)}{496} \\ &= \frac{15 \times 32 + 16}{2 \times 16 \times 31} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这表明所有水管一齐开需 2 小时灌满全池.

测试题四

一、填空题

1. 规定运算 $*$, 使得 $a * b = a^2 + b^2 + a + b$, 则 $1 * (-3) =$ _____.

2. 规定运算 \triangle , 使得 $a \triangle b = (a^2 - b^2) \div ab$ ($ab \neq 0$), 则 $\frac{25}{6} \triangle (3 \triangle 2) =$ _____.

3. 规定运算 ∇ , 使得 $x \nabla y = x^2 + y^2$. 若 x, y 为然数, 且 $x \nabla y = 625$, 则 $x + y =$ _____.

4. 规定运算 $*$, 使得 $x * y = ax^y + b + 1$. 若 $1 * 2 = 969, 2 * 3 = 983$, 则 $2 * 9 =$ _____.

5. 规定运算 \oplus 、 \otimes , 使得 $x \oplus y = x + y - 1, x \otimes y = xy - 1$, 则 $(6 \oplus 8) \otimes (3 \otimes 5) =$ _____.

二、解答题

6. 在自然数范围内规定运算 $*$, 使得 $3 * 2 = 3^2 + 4^2, 4 * 3 = 4^2 + 5^2 + 6^2, 5 * 4 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2, \dots$.

(1) 求 $6 * 5$;

(2) 若 $1 * x = 30$, 求 x .

7. $*$ 表示一种运算, 它的含义是:

$$x * y = \frac{1}{xy} + \frac{1}{(x+1)(y+A)}.$$

若 $2 * 1 = \frac{2}{3}$, 求 $1998 * 1999$ 的值.

8. 规定运算 $*$, 使得 $a * b = ab + a - b$, 下面的式子有哪些是错误的?

(A) $a * a = a^2$;

(B) $a * b = (-b) * (-a)$;

(C) $(a * b) * a = a^2 * b$;