多 元 微 积 分

C. GOFFMAN 著

史济怀 彭家贵 何 琛
李世雄 徐森林 龚 昇 译

人 民 教 育 出 版 社

多元微积分

C. GOFFMAN 著

史济怀　彭家贵　何　琛　译
李世雄　徐森林　龚　昇

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

850×1168 1/32　印张 6 2/16　字数 148,000

1978年9月第1版　1979年5月第1次印刷

印数 00,001—80,000

书号 13012·0235　定价 0.55 元

原　　序

数学家们广泛地一致认为，多元微积分的现代处理应是数学训练的一个标准部分，并且应该尽可能早地讲授. 希望此书能在这一方面有所助益.

本书内容曾在 Purdue 大学在两种教学水平上使用过. 前四章是低年级的一学期课程，每周三次. 全书可供高年级和第一年的研究生在类似课程中使用.

习题附在每一章的后面，按其所属节次编号. 例如，第二章后面的习题，编号 3.2，就是该章第三节的第二题. 许多习题只是为了练习或巩固书中的概念；相当一部分习题是检验学生的才能的；还有很少量的习题发展或补充了书中内容.

G. Pedrick 仔细阅读了此书，他的建议使我作了一些改动；R. Darst 提醒了我一处严重的错误；J. Serrin 注意到了一条定理假设上的问题，已作了改动. 对他们我表示感谢.

最后，对于 J. Snider 的精美打字，我十分愉快地表示感谢.

C. G.

目　　录

第一章　欧氏空间

欧氏空间是一个向量空间，它具有满足某些条件的距离函数．在这一章中，我们给出这些空间的定义和主要性质．还要讨论向量空间之间的线性映射及其性质．然后给出欧氏空间拓扑的一个简洁的处理．

1. 向量空间

实数域 R 上的**向量空间**是一个集合 S，它带有映射

$$g:\ S\times S\to S$$

和

$$v:\ R\times S\to S,$$

通常用记号 $g(x,y)=x+y$ 和 $v(a,x)=ax$ 记这两个映射，并假定下列条件成立：

(a) S 对于映射 g 成一 Abel 群．

(b_1) 对于每个 $x\in S$ 和 $a,b\in R$，$(ab)x=a(bx)$．

(b_2) 对于每个 $x\in S$ 和 $a,b\in R$，$(a+b)x=ax+bx$．

(b_3) 对于每个 $x,y\in S$ 和 $a\in R$，$a(x+y)=ax+ay$．

(b_4) 对于每个 $x\in S$，$1\cdot x=x$．

我们用记号 θ 记 S 中群的恒等元．容易证明 $0\cdot x=\theta$ 对每个 $x\in S$ 成立．不难看出，群的逆元是 $(-1)x$，记为 $-x$．我们把 $y+(-x)$ 写为 $y-x$．

我们只给出向量空间的两个例子．

例 A　设 S 是 n-实数组的集合．对于

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in S,$$

$$y=(y_1,\cdots,y_n)\in S,$$

命

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n).$$

对于

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in S$$

和 $a\in R$，命

$$ax=(ax_1,\cdots,ax_n).$$

例 B 设 A 是任一集合，X 是一向量空间. 命 X^A 是 A 到 X 的全体映射所成的集合. 对于任意 $f,g\in X^A$，定义 $f+g$ 是这样的映射：对于每个 $\alpha\in A$，

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha).$$

对每个 $f\in X^A$ 和 $a\in R$，定义 af 为这样的映射：对于每个 $\alpha\in A$，

$$(af)(\alpha)=af(\alpha).$$

设 A,B 是两个集合，映射 f: $A\to B$ 叫做**单射的** (injective)，如果它是一对一的；叫做**满射的**(surjective)，如果它是 A 到整个 B 上的映射；叫做**双射的**(bijective)，如果它是 A 到整个 B 上的映射，而且是一对一的. 这就是说，如果 $x,y\in A$，只要 $x\neq y$ 就有 $f(x)\neq f(y)$，f 就是单射的；如果对于每个 $u\in B$，存在 $x\in A$(可以多于一个)，使得 $u=f(x)$，f 就是满射的.

设 S,T 是两个向量空间，映射

$$f:\ S\to T$$

叫做一个**同态映射**，如果对任意 $x,y\in S$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，对每个 $x\in S,a\in R$ 有 $f(ax)=af(x)$.

同态映射称为**同构**映射，如果它是双射的. 向量空间 S 和 T 称为**同构的**，如果存在一个同构映射 f: $S\to T$.

注意 向量空间之间的同态映射也叫做**线性映射**. 今后我们就采用这后一术语.

设 S 是一向量空间，子集 $T\subset S$ 称为一个**子空间**，如果对于 $x, y\in T$ 有 $x+y\in T$, 对于 $x\in T, a\in R$ 有 $ax\in T$.

设 S 和 T 是两个向量空间，f: $S\to T$ 是一个同态映射．容易看出，S 中所有使 $f(x)=\theta$ 的元素 x 所成的集合 $k(f)\subset S$ 构成 S 的一个子空间，称为同态映射 f 的**核**．对于 $u\in T$, 如果总存在 $x\in S$, 使得 $f(x)=u$, 容易看出这种 u 的全体 $r(f)\subset T$ 构成 T 的一个子空间，称为同态映射 f 的**值域**(range)．f 是同构映射必须而且只须

$$k(f)=\{\theta\},\quad r(f)=T.$$

设 S 是一个向量空间，子集 $A\subset S$ 称为**线性无关的**，如果对于 A 中每个有限集 $x^1,\cdots,x^n$, 仅当 $a_1=\cdots=a_n=0$ 时才有

$$a_1x^1+\cdots+a_nx^n=\theta.$$

我们说向量空间 S 具有**有限维数** n, 如果在 S 中存在一个线性无关集 $e_1,\cdots,e_n$, 使得每个 $x\in S$ 都是它的线性组合：

$$x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n.$$

集合 $e_1,\cdots,e_n$ 称为 S 的一组**基**.

下面的定理说明维数的定义是合理的.

定理 1

如果 S 是有限维的，那末 S 的每一组基具有相同数目的元素.

证明

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 S 的一组基，$y^1,\cdots,y^n,y^{n+1}$ 是 S 的元素．由于

$$y^i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j,\qquad i=1,\cdots,n+1,$$

从矩阵的初等理论推知，y^i 中必有一个是其它的线性组合．因而 S 的每组基的元素个数不超过 n．因为没有一组基能比其它任一组基具有更多的元素，所以每组基具有相同数目的元素.∎

我们将只考虑有限维向量空间.

设E是一个n维向量空间. 固定E中的一组基$e_1, \cdots, e_n$, 那末每个$x \in E$可以表示为

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

这种表示是唯一的,因为如果

$$x = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n,$$

那末

$$\theta = (a_1 - b_1) e_1 + \cdots + (a_n - b_n) e_n,$$

从$e_1, \cdots, e_n$的线性无关性推知$a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$.

根据这种表示,我们得到由E到n-实数组构成的向量空间R^n(上面例A)内的标准映射φ,它定义为

$$\varphi(x) = (a_1, \cdots, a_n).$$

容易证明

$$\varphi: \ E \to R^n$$

是向量空间的同构映射,我们把证明的细节留给读者去做. 由此可知,任何两个n维向量空间是同构的.

2. 欧氏空间的定义

设E是一个n维向量空间, $n \geqslant 1$. 我们在E中引进一种使E成为n维欧氏空间的度量. 利用数量积是引进这种度量的一种方法. 对于每个$(x, y) \in E \times E$, 它的数量积是一个实数$[x, y]$, 使得

(a) $[x, y] = [y, x]$, 对于每个$(x, y) \in E \times E$.

(b) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$, 对于$x, y, z \in E$.

(c) $[ax, y] = a[x, y]$, 对于每个$(x, y) \in E \times E$ 和$a \in R$.

(d) $[\theta, \theta] = 0$ 和$[x, x] > 0$, 对于$x \in E, x \neq \theta$.

由此可以推出

$$[x, ay] = a[x, y], \quad [x, y + z] = [x, y] + [x, z].$$

在特殊情形 $E=R^n$，即 n-实数组构成的向量空间，如果 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，那末容易看出，函数

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

是一个数量积．读者一定能想起这就是解析几何中标准的数量积．

利用数量积可以在 E 中引进范数．对于每个 $x\in E$，x 的范数定义为

$$|x|=[x,x]^{\frac{1}{2}}$$

在讨论范数的性质之前，我们需要

定理 2（Schwarz 不等式）

对于每个 $x,y\in E$，我们有

$$[x,y]\leqslant|x||y|$$

证明

对于每个实数 a，

$$0\leqslant[x-ay,x-ay]=[x,x]+a^2[y,y]-2a[x,y].$$

如果 $y=\theta$，定理显然成立．假定 $y\neq\theta$，命 $a^2=[x,x]/[y,y]$，便能得到所要的结果．∎

注意　容易证明，在 Schwarz 不等式中要等号成立，必须而且只须存在 a，使得 $y=ax$ 或 $x=ay$ 成立．

由定理 2，我们得到

定理 3

向量的范数满足

(a) $|\theta|=0$；$|x|>0$，如果 $x\neq\theta$；

(b) 对于每个 $x\in E$，$a\in R$，有 $|ax|=|a||x|$；

(c) 对于任意的 $x,y\in E$，有 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$．

证明

(a)和(b)是定义的直接推论. 对于(c), 由定理 2 有

$$|x+y|^2=[x+y,x+y]=|x|^2+2[x,y]+|y|^2$$
$$\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=[|x|+|y|]^2.\blacksquare$$

E上具有定理 3 性质的任何函数称E上的**范数**. 对于 $x,y\in E$, 规定 x,y 的距离 $d(x,y)$为非负数

$$d(x,y)=|x-y|,$$

我们用这个范数定义E的度量. 于是

(a) $d(x,x)=0, d(x,y)>0$, 如果 $x\neq y$,

(b) $d(x,y)=d(y,x)$,

(c) $d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$.

向量空间 E, 连同数量积以及由此产生的范数和度量一起, 称为 n 维**欧氏空间**. 我们要证明, 对于每个 n, 本质上只有一个 n 维欧氏空间.

3. 么正基

n 维欧氏空间E中的两个元素 x, y 叫做**正交的**, 如果 $[x,y]=0$. 显然 θ 和每个 $x\in E$ 是正交的. $x\in E$ 叫做**么范的**, 如果 $|x|=1$. 集合 $A\subset E$ 叫做**么正的**, 如果每个 $x\in A$ 是么范的, 而且对于 $x,y\in A, x\neq y$, x 和 y 是正交的.

我们指出:

(a) 每个么正集是线性无关的.

(b) 存在包含 n 个元素的么正集.

为了证明(a), 设$\{e_1,\cdots,e_m\}$是一个么正集, 命

$$a_1e_1+\cdots+a_me_m=\theta.$$

对于每个 $i=1,\cdots,m$, 我们有

$$a_i=[e_i,a_1e_1+\cdots+a_me_m]=[e_i,\theta]=0,$$

所以

$$a_i=0.$$

对于(b)，设$k<n, e_1, \cdots, e_k$是么正集，命$x^{k+1}, e_1, \cdots, e_k$是一个线性无关集，那末让

$$y^{k+1}=x^{k+1}-\sum_{i=1}^{k}[x^{k+1}, e_i]e_i$$

现在

$$[y^{k+1}, e_i]=[x^{k+1}, e_i]-[x^{k+1}, e_i]=0, \qquad i=1, \cdots, k.$$

而且从y^{k+1}的表示式来看，$y^{k+1}\neq\theta$. 命

$$e_{k+1}=\frac{y^{k+1}}{|y^{k+1}|},$$

集合$e_1, \cdots, e_{k+1}$是么正的. 根据数学归纳法便能得到所要的结论. 于是我们有

定理 4

n维欧氏空间具有么正基.

从定理 4 可以推出，对于每个n，本质上只有一个n维欧氏空间. 为了证明这一点，我们说欧氏空间E和F是**同构的**，如果有一个映射

$$\phi: E\to F,$$

它是向量空间的保持数量积的同构映射，即对于每个$x, y\in E$有$[x, y]=[\phi(x), \phi(y)]$. 由此推知距离保持不变，即

$$d(x, y)=d(\phi(x), \phi(y)).$$

定理 5

如果E和F是n维欧氏空间，那末它们是同构的.

证明

设$e_1, \cdots, e_n$是E的一组么正基，$\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n$是$F$的一组么正基，定义线性映射$\phi$:

$$\phi(e_i)=\bar{e}_i, \qquad i=1,\cdots,n.$$

于是对于 $x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$, 我们有

$$\phi(x)=a_1\bar{e}_1+\cdots+a_n\bar{e}_n.$$

现在

$$[a_1e_1+\cdots+a_ne_n, b_1e_1+\cdots+b_ne_n]=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

$$[a_1\bar{e}_1+\cdots+a_n\bar{e}_n, b_1\bar{e}_1+\cdots+b_n\bar{e}_n]=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

所以数量积保持不变.

由此也可推出, 如果 $x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$, 那末

$$|x|=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$|\phi(x)|=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}. \blacksquare$$

仍设 E 是 n 维欧氏空间. 这时命 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 是 E 中的么正基. 由于 $e_1,\cdots,e_n$ 是一组基,

$$\bar{e}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j, \qquad i=1,\cdots,n.$$

因为

$$[\bar{e}_i, \bar{e}_j]=\delta_{ij},$$

这里

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 如果 i=j,\\ 0, & 如果 i\neq j.\end{cases}$$

我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$$

换句话说，矩阵(a_{ij})是正交阵.

4. 对偶空间和第二对偶空间

在这一节中，我们考虑由n维向量空间E到实数(一维空间)的同态映射. 这样一个由E到R的映射叫做**线性泛函**. 这样，线性泛函是一个映射，

$$f: E \to R$$

使得

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(ax)=af(x).$$

E上所有线性泛函的集合按照下面定义的运算$f+g$和af构成一个向量空间：对每个$x \in E$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(af)(x)=af(x).$$

用E^*记这个向量空间，称为E的**对偶空间**.

我们首先证明E^*是n维的. 为此目的，我们指出，如果$e_1, \cdots, e_n$是E的一组基，那末

(a) 每个$f \in E^*$被它在$e_1, \cdots, e_n$上的值所确定；

(b) 对于实数$a_1, \cdots, a_n$，存在一个$f \in E^*$，使得$f(e_i)=a_i$, $i=1, \cdots, n$.

对于(a)，取$f \in E^*$，假定$f(e_i)=a_i$, $i=1, \cdots, n$. 现在，设$x \in E$，那末x有唯一的表示：

$$x=c_1e_1+\cdots+c_ne_n,$$

而且

$$f(x)=c_1f(e_1)+\cdots+c_nf(e_n).$$

这就证明了我们的结论.

为了证明(b)，设$a_1, \cdots, a_n$都是实数. 对于

$$x=c_1e_1+\cdots+c_ne_n$$

命

$$f(x)=c_1a_1+\cdots+c_na_n$$

于是 $f(e_i)=a_i$, $i=1,\cdots,n$. 容易看出,f 是线性的.

从(a)和(b)来看,存在由 E^* 到 n- 实数组所成的向量空间 R^n 的双射映射,而且容易验证这个映射是向量空间的同态映射. 于是我们有

定理 6

如果 E 是一个 n 维向量空间,那末它的对偶空间 E^* 也是 n 维的.

我们考虑 E^* 的一组特殊的基. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的一组基. 对于每个 $i=1,\cdots,n$, $e_i^*\in E^*$ 被定义为

$$e_i^*(e_i)=1, e_i^*(e_j)=0, \qquad i\neq j.$$

容易明白, $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 是一个线性无关集. 由于 E^* 是 n 维的,因而它是 E^* 的一组基,称为 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基.

现在, E^* 是一个向量空间,因而它有一个对偶空间 $E^{**}=(E^*)^*$,它也是 n 维的. 我们证明,可以通过自然的方法使 E^{**} 恒同于 E.

设 $x\in E$,下面我们确定一个与 x 相配合的元素 $\bar{x}\in E^{**}$.

对于每个 $x^*\in E^*$,命

$$\bar{x}(x^*)=x^*(x),$$

因而 $\bar{x}$ 是一个 E^* 到 R 的映射. 我们证明 $\bar{x}\in E^{**}$. 为此,

$\bar{x}(x^*+y^*)=(x^*+y^*)(x)=x^*(x)+y^*(x)=\bar{x}(x^*)+\bar{x}(y^*)$ 对每个 $x^*, y^*\in E^*$ 成立;

$$\bar{x}(ax^*)=(ax^*)(x)=ax^*(x)=a\bar{x}(x^*)$$

对每个 $x^*\in E^*$ 和 $a\in R$ 成立.

这样,我们已经定义了一个从 E 到 E^{**} 的映射 ψ,这个映射使每个 x 与相应的 $\bar{x}$ 成对应. 我们证明这个映射是向量空间的同态

映射. 对于每个 $x,y\in E$ 和 $x^*\in E^*$,

$$\overline{x+y}(x^*)=x^*(x+y)=x^*(x)+x^*(y)=\bar{x}(x^*)+\bar{y}(x^*),$$

所以

$$\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}.$$

对于每个 $x\in E, a\in R$ 和 $x^*\in E^*$,

$$\overline{ax}(x^*)=x^*(ax)=ax^*(x)=a\bar{x}(x^*),$$

所以

$$\overline{ax}=a\bar{x}.$$

其次，我们证明映射 ψ 是单射的. 设 $\bar{x}=\psi(x)$ 是 E^{**} 中的群恒等元,如果 $x\neq\theta$,那末存在 $x^*\in E^*$, 使得 $x^*(x)\neq 0$, 因而 $\bar{x}(x^*)\neq 0$,所以 $\bar{x}$ 不可能是群恒等元,于是 $x=\theta$.

由于 E 和 E^{**} 都是 n 维的，因而这个映射也是双射的. 于是我们有

定理 7

在 E 和 E^{**} 之间有一个自然同构.

5. 对偶空间中的范数

设 E 是一个 n 维向量空间. 假定在 E 中定义了范数，因为 R 也有范数，所以 E^* 的元素是从一个赋范向量空间到另一个赋范向量空间的线性映射.

现在我们指出，如何通过 E 和 R 中的范数在 E^* 中引进范数. 事实上,命

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|:x\in E,\ |x|\leqslant 1\}.$$

如果 E 中的范数是欧氏的，容易证明 $|x^*|<\infty$. 根据这章后面给出的定理 15，可对任意范数证明同样的结论. 容易证明

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|:x\in E,\ |x|=1\}.$$