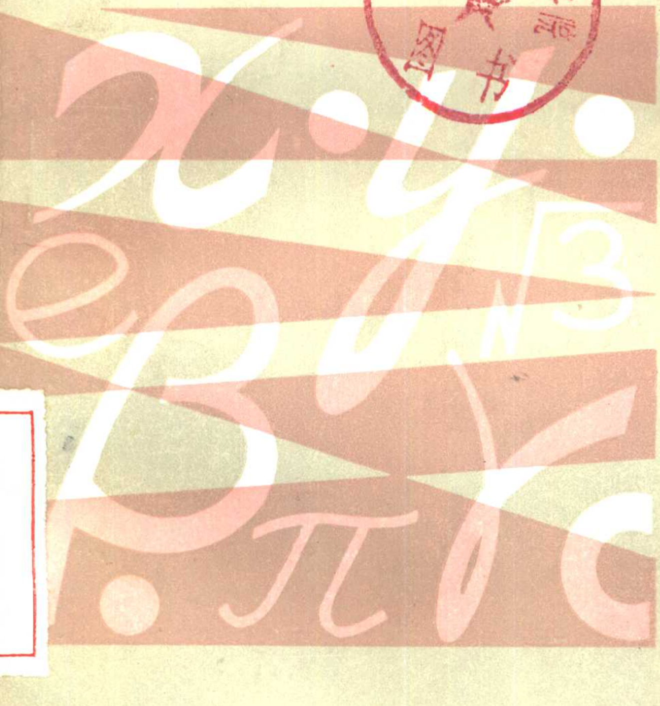
中学数学丛书

怎样用根的判别式解题

天津市数学会编



天津科学技术出版社

中学数学丛书

怎样用根的判别式解题

王 连 笑

责任编辑：黄立民

中学数学丛书

怎样用根的判别式解题

天津市数学会　编

●

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本787×1092毫米 1/32　印张6.375　字数134,000

一九八五年八月第一版

一九八五年八月第一次印刷

印数：1－25,400

书号：7212·9　定价：1.10元

编 者 的 话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

目　录

一、从几道高考试题谈起

最近几年，全国高等学校入学考试的数学试题中有这样几个题目：例如

（1）1980年有一个高考试题是，

设直线（L）的参数方程是

$$\begin{cases} x = t, \\ y = b + mt. \quad (t\text{ 是参数}) \end{cases}$$

椭圆（E）的参数方程是

$$\begin{cases} x = 1 + a\cos\theta, \quad (a \neq 0) \\ y = \sin\theta. (\theta\text{是参数}) \end{cases}$$

问 a，b 应满足什么条件，使得对于任意m值来说，直线（L）与椭圆（E）总有公共点.

（2）1981年高考试题的第九题：

给定双曲线

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

（1）过点$A(2,1)$的直线L与所给双曲线交于两点P_1及P_2，求线段P_1P_2的中点P的轨迹方程；

（2）过点$B(1,1)$能否作直线m，使m与所给双曲线交于两点Q_1及Q_2，且点B是线段Q_1Q_2的中点？这样的直线m如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由。

（3）1982年高考试题的第八题：

抛物线$y^2=2px$的内接三角形有两边与抛物线$x^2=2qy$相切，证明这个三角形的第三边也与$x^2=2qy$相切.

（4）1981年高考试题（副题）的附加题：

扇形OAB的中心角为45°，半径为R，矩形$PQMN$内接于这个扇形（如图2），求矩形对角线长L的最小值.

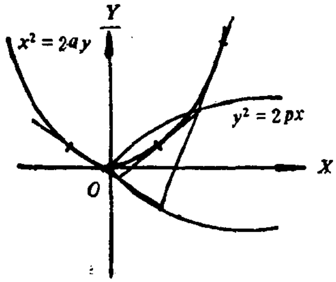


图 1

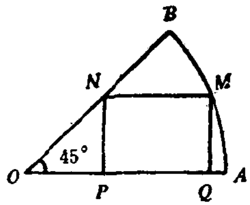


图 2

这几道题在高考试题中不是最后一题就是附加题，其综合程度，灵活性以及对学生运算能力和逻辑思维能力的考查等方面的要求都是比较高的.

但是，在这几个题目求解的过程中都需要用实系数一元二次方程的根的判别式来解，其中（1）、（2）、（3）三个题目恰巧依次用到判别式大于或等于零，小于零和等于零来解.

所谓实系数一元二次方程的根的判别式是指方程

$$ax^2+bx+c=0\ \ (a,b,c\text{是实数，}a\neq0)$$

的系数a,b,c所表达的关系式

$$\Delta=b^2-4ac.$$

实系数一元二次方程的根的判别式是中学数学中的一个十分重要的基础知识，用判别式来解题是中学数学中常用的

解题方法，这一点从上面所提到的连续三年（1980—1982）高考试题这样一个侧面也可以看出来。

那么，为什么$\Delta = b^2 - 4ac$叫做根的判别式，它有哪些性质，有哪些应用，怎样用判别式解题，这些正是这本小册子所要介绍的内容。

（关于本节中所提到的几道高考试题，我们将在有关节中用例题的形式给出解答，同学们可以先不看后面几节，而自己试做一下这几个题目。）

二、一元二次方程的根的判别式

关于一元二次方程的根的判别式有下面一个十分简单又十分重要的定理：

定理 实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0.\ (a\neq 0)$$

（1）有两个不相等的实数根的充分必要条件是$b^2-4ac>0$；

（2）有两个相等的实数根的充分必要条件是$b^2-4ac=0$；

（3）没有实根而有两个共轭虚根的充分必要条件是$b^2-4ac<0$.

下面我们证明这个定理.

证 由$a\neq 0$，方程可变形为

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c,$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于$4a^2>0$，所以

（1）当且仅当$b^2-4ac>0$时，

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

即方程有两个不相等的实数根；

（2）当且仅当$b^2-4ac=0$时，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,$$

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

即方程有两个相等的实数根；

（3）当且仅当$b^2-4ac<0$时，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0.$$

所以方程没有实数根.但是

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}.$$

由于$-(b^2-4ac)>0$，所以

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a}.$$

即方程有两个共轭虚根.

这就是说，一个实系数一元二次方程有不相等的实数根，还是有相等的实数根或者没有实数根而有共轭虚根都决定于b^2-4ac为正，为零或者为负.由于b^2-4ac有着判别一元二次方程的根的虚实和是否相等的作用，因此，我们常常把

b^2-4ac叫做根的判别式，并记作

$$\Delta=b^2-4ac.$$

Δ是希腊字母，它的读音（汉语拼音）是deirta.（国际音标可读作'deltə）

判别式Δ不仅能够判断一元二次方程的根，而且还可以判断二次三项式ax^2+bx+c分解成一次因式的情况、判断二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴交点的情况、还可以判断一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$（或<0）的解的情况.

下面分别进行讨论.

1.判断二次三项式ax^2+bx+c分解成一次因式的情况.

对于实系数二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由于它所对应的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，当$\Delta>0$时有二个不相等的实数根，此时二次三项式可分解为

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

当$\Delta=0$时方程有二个相等的实数根，则有

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

当$\Delta<0$时方程没有实数根，所以二次三项式ax^2+bx+c在实数集内不能进行因式分解，但在复数集合内可分解为

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}\right).$$

2.判断二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴的交点.

二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象是以$x=-\frac{b}{2a}$为对称轴，以$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$为顶点的抛物线（开口方向根据$a$的正负来决定），它与$x$轴有没有交点等价于方程$ax^2+bx+c=0$有没有实数根.

当$\Delta>0$时，$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴有两个交点，其交点坐标为$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$；

当$\Delta=0$时，$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴相切，即只有一个公共点，其公共点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\ 0\right)$；

当$\Delta<0$时，$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴没有公共点，即图象的所有点或都在x轴上方，或都在x轴下方.

3.判断一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$（或<0）的解.

关于一元二次不等式$ax^2+bx+c\geqslant0$（或$\leqslant0$），$ax^2+bx+c>0$（或<0）的解集可以结合一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根以及二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象来决定.

我们仅以$ax^2+bx+c>0$的解集为例，说明判别式与一元二次不等式的关系.

当$\Delta>0$时，设$ax^2+bx+c=0$的两个不等实根为x_1，x_2，且$x_1<x_2$.

若$a>0$，$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x:x<x_1\}\cup\{x:x>x_2\}$；

若$a<0$，$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x:x_1<x<x_2\}$；

作用（a,b,c为实数，$a\neq 0$）	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有二个不等实根 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有二个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	有二个共轭虚根 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}$
二次三项式 $ax+bx+c$ 的因式分解	在实数集内可分解出二相异因式 $a(x-x_1)(x-x_2)$	在实数集内有二相同因式 $a(x-x_1)^2$	在复数集内有二相异因式 $a(x-x_1)(x-x_2)$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	与x轴相交有二个交点，其坐标为 $(x_1,0)(x_2,0)$	与x轴相切，只有一个公共点，其坐标为 $(x_1,0)$	与x轴没有公共点
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集	$a>0$ 时 $\{x:x<x_1\}\cup\{x:x>x_2\}$ $a<0$ 时 $\{x:x_1<x<x_2\}$	$a>0$ 时 $\{x:x\neq x_1,x\in R\}$ $a<0$ 时 空集ϕ	$a>0$ 时 实数集R a<0 时 空集ϕ

当$\Delta=0$时，设$ax^2+bx+c=0$的二等根为$x_1=x_2$。

若$a>0$ $ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x:x\neq x_1, x\in R\}$；

若$a<0$，$ax^2+bx+c>0$的解集为空集ϕ。

当$\Delta<0$时，

若$a>0$，$ax^2+bx+c>0$的解集为实数集R；

若$a<0$，$ax^2+bx+c>0$的解集为空集ϕ。

由以上根的判别式的作用可列成下表：

鉴于根的判别式在一元二次方程，二次三项式，二次函数，一元二次不等式中都能发挥作用，因此遇到与以上这些内容有关的问题时，判别式就很有用武之地，例如在确定一元二次方程的系数，二次三项式的讨论，证明恒等式与不等式，求某些函数的极值或值域，研究直线和二次曲线的位置关系等等都有不少题目可以利用判别式而灵巧地得到解决。

三、判别式与一元二次方程的根

对于实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

的根的研究，主要分四个方面：

1.根的虚实；

2.根的相等与不等；

3.根的正负；

4.根的范围.

由上节的定理，关于根的虚实以及相等与不等的问题只要看判别式的值是正、是负还是零就可以完全解决了。

下面我们看几个例题：

【例 1】 试证对任意实数m，方程

$$x^2-(2m-1)x-m^2-m=0$$

必有二个不相等的实数根

证 $\Delta=(2m-1)^2-4(-m^2-m)$

$=4m^2-4m+1+4m^2+4m$

$=8m^2+1$,

因为m是实数，则$m^2\geqslant 0$，所以$\Delta=8m^2+1>0$.

于是方程必有二个不相等的实数根

【例 2】 a，b，c是三角形三边的长，求证方程

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

没有实数根

证一 $\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$$

$$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)$$

$$(b-c-a).$$

因为三角形任意两边之和大于第三边，所以

$b+c-a>0$，$b-c+a>0$，$b-c-a<0$

又因为a,b,c是正数，所以

$$b+c+a>0.$$

于是$\Delta<0$，即方程无实根

证二 设a的对角为A，

由余弦定理得

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$$

$$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$$

$$=4b^2c^2\cos^2A-4b^2c^2$$

$$=4b^2c^2(\cos^2A-1)$$

因为A为三角形的内角，则$A\neq 0$，$A\neq\pi$，所以

$$|\cos A|<1,\cos^2A-1<0.$$

于是$\Delta<0$，即方程无实根.

如果还要讨论根的正负，那么仅仅使用判别式就不行了，还要结合一元二次方程根与系数的关系进行研究。

关于一元二次方程的根与系数的关系

若x_1和x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$