SMP 英国中学数学教科书

乙册

英国中学数学教科书

SMP

Z 册

上海师范大学数学系翻译组译

上 海 教 育 出 版 社

The School Mathematics Project

Book Z

Cambridge University Press

英国中学数学教科书

SMP

Z 册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行　江苏南通印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 11　字数 250,000

1978 年 8 月第 1 版　1978 年 8 月第 1 次印刷

统一书号：7150·1892　　定价：0.90 元

内 部 发 行

序

这是 X、Y、Z 三册中的第三册. 这三册书是为学完 A 到 H 册后准备参加普通水平考试的学生编写的. X、Y、Z 册的内容和 G 册衔接,包含参加"SMP 数学"普通水平考试所需的最后一部分课程. 这三册书也适用于正在进行一年普通水平复习课程的学生和已参加过 CSE 考试的学生.

从 A 到 G 各册中介绍过的许多论题在 X、Y、Z 三册中进一步得到发挥,而且有些新问题也在这里作了介绍.

本册第一章"向量"是 X 册中有关内容的继续. "生长函数和对数函数"这一章是与 Y 册中"找函数"这一章衔接的,并引入了生长函数及其反函数——对数函数.

"速度和加速度"、"不变性"和"组合表的应用"这三章复习了 A~G、X 和 Y 这前几册中的有关内容,并作了进一步的讨论. 第 6 章不仅介绍了"纬度和经度",而且研究了球的表面积和体积,这样就讲完了普通水平课程所需的关于求面积和体积的内容.

最后有"矩阵"、"几何"、"统计"、"概率"、"图象"、"代数"和"计算"这样七章综合性的复习章节,其中有许多复习例题. 这几章和前面几章之间,有一个关于"证明"的插曲.

目　录

符号和单位表

集　合

$\{x: x<5\}$	所有小于 5 的 x 所构成的集合
$\{1, 2, 3, 4\}$	1, 2, 3, 4 四个数所构成的集合
$\mathscr{E}$	全集合,全集
$\varnothing$	空集合,空集
$\in$	是……的一个元素,属于
$\notin$	不是……的一个元素,不属于
$A\cap B$	A 与 B 的交集;由 A 与 B 共有的元素所构成的集合
$A\cup B$	A 和 B 的并集;由 A 与 B 中所有的元素所构成的集合
A'	A 的补集;由全集中不属于集合 A 的那些元素所构成的集合
$n(A)$	集合 A 中所含的元素的个数

关系、函数和变换

$x=y$	x 等于 y
$x\neq y$	x 不等于 y
$x\approx y$	x 近似地等于 y
$x>y$	x 大于 y
$x\geqslant y$	x 大于或等于 y
$f: x\to y$	把 x 映射成 y 的函数 f

$x \xrightarrow{f} y$	通过f，把x映射成y
$f(x)$	在f的作用下x的映象
f^{-1}	函数f的反函数
fg	"f作用在g的结果上"的复合函数；即把x映射成$f(g(x))$的函数
$f\cdot g$	把x映射成$f(x)$与$g(x)$的乘积的函数
$\boldsymbol{M}: P\to P'$	把P映射成P'的变换$\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{M}: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$	把$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$映射成$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$的变换$\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{M}(P)$	在变换$\boldsymbol{M}$的作用下P的映象
$\boldsymbol{MH}$	"$\boldsymbol{M}$作用在$\boldsymbol{H}$的结果上"的复合变换，即把P映射成$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}(P))$的变换

向　　量

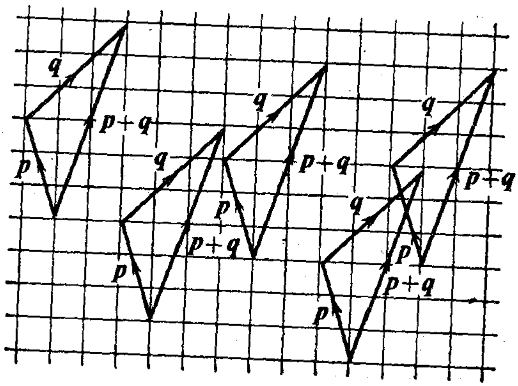
$\boldsymbol{i}$	在x增加方向上的单位向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$\boldsymbol{j}$	在y增加方向上的单位向量$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$\overline{PQ}$	从P到Q的有向线段
PQ	有时用作(i)通过P和Q的无限伸展的直线，有时用作(ii)从P到Q的线段的长度
$\boldsymbol{PQ}$	从P到Q的位移，或者是描述这个位移的向量

逻辑符号

$p\Rightarrow q$	如果p，那末q
$p\Leftrightarrow q$	当且仅当q时p；p等价于q

s, h, min	时间：秒，小时，分（日、年没有缩写）
m, mm, cm, km	长度或距离：米，毫米，厘米，公里，1000 毫米=1 米，100 厘米=1 米，1000 米=1 公里.
l	体积，容积：1 公升（≈1000 厘米^3）
kg, g	质量：千克，克
N	力：牛顿． 它是一个能使 1 千克质量产生 1 米/秒^{2}加速度的力．质量为 m 千克物体的“重量”近似地等于 10 米·牛顿
m/s, km/h, kg/m^3	速率：米/秒，公里/小时，千克/米^3
$x \to \sin x$	正弦函数
$x \to \cos x$	余弦函数
$x \to \mathrm{tg}\, x$	正切函数
$x \to \lg x$	以 10 为底的对数函数
$x \to 2^x$	以 2 为底的指数函数

1. 再谈向量



1. 向量的组合

(a) 上面的图象使我们回想起，向量 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ 的和可以用三角形方法求得．$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ 写成列向量是什么?

(b) 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量代表(图 1)，我们怎样求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

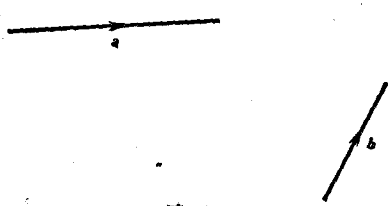


图 1

设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}$. 你认为我们可以把它写成 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}$ 吗？在这个形式中，我们要求的是这样一个向量：把它加上 $\boldsymbol{b}$ 时，结果会得到 $\boldsymbol{a}$.

在图 2 中，我们取 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的两个代表使它们有共同的始点.

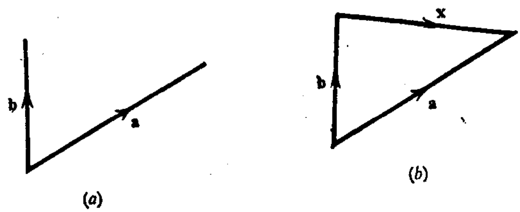


图 2

在图 2 (b) 中，我们看到 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, 因此 $\boldsymbol{x}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的代表.

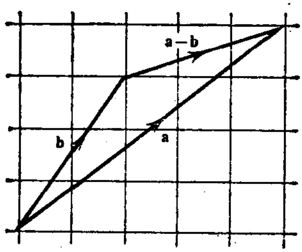


图 3

考虑图 3 中的两个向量：

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 是什么？这个列向量能描述图 3 上标为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的有向线段吗？

(c) 如果一个平移是用向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ 来描述，那末它的逆平移就要用向量$\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$来描述，我们可以把它写为$-\boldsymbol{a}$。$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$是什么？

你得到的结果是否使你确信，这两个向量描述了一对互逆的平移？描述由向量$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$所表示的平移.

(d) 向量减法的另一种看法，是把它看作加上逆向量的加法. 因此可以把 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 看作是 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

我们再来看

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$

并且把 $\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 表示在图 4 上.

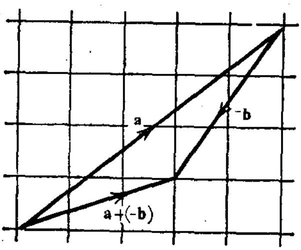


图 4

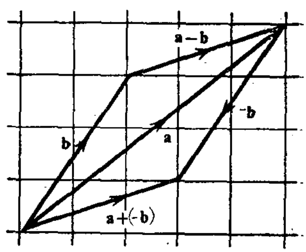


图 5

把 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 写成列向量是怎样的？你求得的结果和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 看作列向量的结果一致吗？图 5 是把图 4 与图 3 画在一起而成的.

你认为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 是同一个向量的两个代表吗？这就再一次证实了我们对向量减法的两种看法：

(i) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}$,

(ii) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

是等价的.

练习 A

1．图 6 表示了三个向量的代表．把这三个代表描在一张方格纸上，并在其上画出表示下列各向量的代表：

(a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;　(b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;　(c) $2(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(d) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}$;　(e) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　(f) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

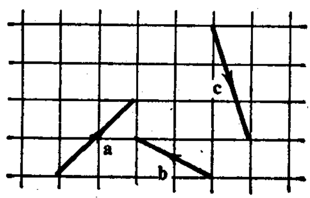


图 6

2．设 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，试把下列各向量表示成列向量：

(a) $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$;　(b) $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$;　(c) $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}$;

(d) $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$;　(e) $\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})$;　(f) $\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})$.

3．点 P 的坐标是 $(3, 2)$，向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$．求出经过下列各向量所表示的平移后点 P 的映象的坐标：

(a) $\boldsymbol{a}$;　(b) $-\boldsymbol{a}$;　(c) $2\boldsymbol{a}$;　(d) $-2\boldsymbol{a}$.

4．设 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$，试用列向量的形式写出下列各向量：

(a) $-2\boldsymbol{a}$;　(b) $-3\boldsymbol{b}$;　(c) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(d) $\boldsymbol{a}+(-2\boldsymbol{b})$;　(e) $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$;　(f) $2\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$;

(g) $3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$;　　(h) $3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

5. 图 7 中 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心. 用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 来表示下列各向量:

(a) $\boldsymbol{AB}$;　(b) $\boldsymbol{BC}$;　(c) $\boldsymbol{CD}$;　(d) $\boldsymbol{DE}$;　(e) $\boldsymbol{EF}$;

(f) $\boldsymbol{FA}$.

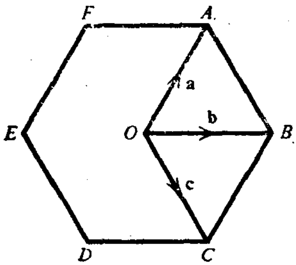


图 7

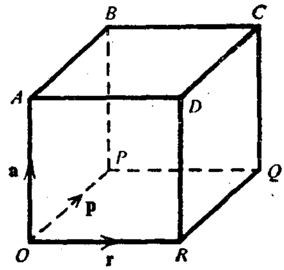


图 8

6. 用 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$ 表示下列各向量(见图 8):

(a) $\boldsymbol{AP}$;　(b) $\boldsymbol{PR}$;　(c) $\boldsymbol{OB}$;　(d) $\boldsymbol{OQ}$;　(e) $\boldsymbol{BQ}$;

(f) $\boldsymbol{BR}$.

7. 两列火车在两条平行的轨道上行驶，其中一列以 100 公里/小时的速度向北行驶，另一列以 85 公里/小时的速度向南行驶.

(a) 对于向南行驶的火车上的乘客来说，向北行驶的火车的速度是多少?

(b) 对于向北行驶的火车上的乘客来说，向南行驶的火车的速度是多少?

8. 一列客车以 90 公里/小时的速度向东行驶，追赶另一列在毗邻的轨道上以 65 公里/小时的速度朝同一方向行驶的货车.

(a) 对于货车上的乘警来说，客车的速度是多少?

(b) 对于客车上的乘警来说，货车的速度是多少?

(c) 设 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}90\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}65\\0\end{pmatrix}$, 把 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{p}$ 写成列向量.

(d) 用 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 来表示(a)和(b)的答案.

2. 距离和方向

(a) 一艘船驶离港口 P，一段时间后它的位置 Q 在港口东面 3 海里*，北面 4 海里．考察图 9，你是否认为 PQ 的距离是 5 海里？

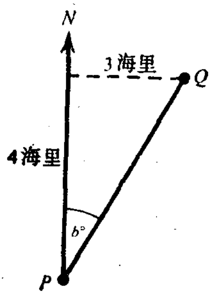


图 9

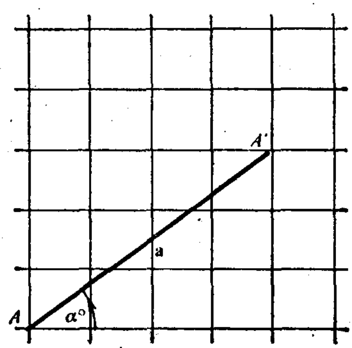


图 10

(b) 一个平移是用向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 来描述的．经过这个平移后平面上每个点移动了多少距离？图 10 表示一点 A 和它经过这个平移后的映象 A'．你认为 AA' 的长是 5 个单位吗？我们说向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度是 5．下列各向量的长度是多少：

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

(c) 图 9 中这艘船是沿着怎样的方位航行的？

你同意 $\operatorname{tg} b°=\frac{3}{4}$ 吗？用正切函数表验证 $b\approx36.9$．

---

* 1 海里＝1854 米．——译者

(d) 向量$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$的方向是什么？由图 10，我们得到：

$$\operatorname{tg}\alpha^\circ=\frac{4}{3}$$
$$\approx 1.33,$$

从正切函数表查得：

$$\alpha\approx 53.1.$$

因此向量$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$的方向与 x 轴交成 53.1° 的角.

不用三角方法，求出下列各向量的方向：

(i) $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$；　(ii) $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$；　(iii) $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(e) 图 11 表示点 B 和它经过一个用向量 $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$描述的平移后的映象 B'.

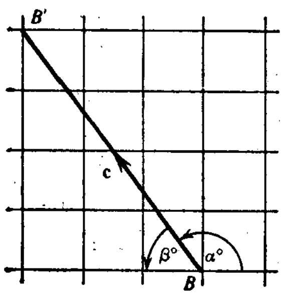


图 11

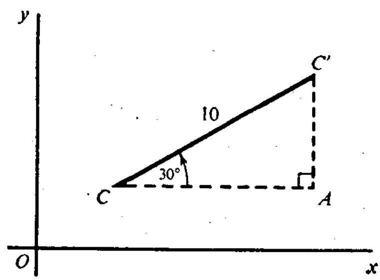


图 12

利用 2(b)和 2(d)的结果，我们可以知道 $\boldsymbol{c}$ 的长度是 5，而 $\beta\approx 53.1$. 你同意 $\alpha=126.9$ 吗？我们通常借助一个平移向量与 x 轴正向的夹角，来给定这个平移的方向.

(f) 通过平移 $\boldsymbol{T}$ 后，平面上所有的点沿与 x 轴成 30° 角

的方向上移动 10 个单位距离. 图 12 表示一点 C 和它平移后的映象 C'.

描述 $\boldsymbol{T}$ 的向量是怎样的？为了回答这个问题，我们需要知道 AC 和 AC' 的长度.

你同意 $$AC=10\times\cos 30^\circ$$

和 $$AC'=10\times\sin 30^\circ \text{ 吗？}$$

查表，可以得到：

$$AC\approx 10\times 0.866=8.66$$

和

$$AC'=10\times 0.5=5.$$

描述 $\boldsymbol{T}$ 的向量是 $\begin{pmatrix}8.66\\5\end{pmatrix}$. 我们说这个向量的两个分量分别为 8.66 和 5.

小结

1. 向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 的长度是 $\sqrt{u^2+v^2}$，可以利用毕达哥拉斯法则求得.

2. 向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 的方向与 x 轴的正向的夹角为 α，其中 $\operatorname{tg}\alpha=(v/u)$.

3. 一个平移使平面上所有点，沿与 x 轴正向成 α 角的方向移动 p 个单位距离，那么这个平移可以用两个分量为 $p\cos\alpha$ 和 $p\sin\alpha$ 的向量 $\boldsymbol{a}$ 来表示，也就是：

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}p\cos\alpha\\p\sin\alpha\end{pmatrix}.$$