

SMP

英国中学数学教科书

Z册

英国中学数学教科书

SMP

Z册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社

The School Mathematics Project

Book Z

Cambridge University Press

英国中学数学教科书

SMP

Z 册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 江苏南通印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11 字数 250,000

1978 年 8 月第 1 版 1978 年 8 月第 1 次印刷

统一书号: 7150·1892 定价: 0.90 元

内 部 发 行

序

这是 X、Y、Z 三册中的第三册。这三册书是为学完 A 到 H 册后准备参加普通水平考试的学生编写的。X、Y、Z 册的内容和 G 册衔接，包含参加“SMP 数学”普通水平考试所需的最后一部分课程。这三册书也适用于正在进行一年普通水平复习课程的学生和已参加过 CSE 考试的学生。

从 A 到 G 各册中介绍过的许多论题在 X、Y、Z 三册中进一步得到发挥，而且有些新问题也在这里作了介绍。

本册第一章“向量”是 X 册中有关内容的继续。“生长函数和对数函数”这一章是与 Y 册中“找函数”这一章衔接的，并引入了生长函数及其反函数——对数函数。

“速度和加速度”、“不变性”和“组合表的应用”这三章复习了 A~G、X 和 Y 这前几册中的有关内容，并作了进一步的讨论。第 6 章不仅介绍了“纬度和经度”，而且研究了球的表面积和体积，这样就讲完了普通水平课程所需的关于求面积和体积的内容。

最后有“矩阵”、“几何”、“统计”、“概率”、“图象”、“代数”和“计算”这样七章综合性的复习章节，其中有许多复习例题。这几章和前面几章之间，有一个关于“证明”的插曲。

AAE 38/101

目 录

| | |
|----------------------------------------------|-----|
| 序 | i |
| 符号和单位表 | 1 |
| 1. 再谈向量 | 4 |
| 向量的组合, 4; 距离和方向, 9; 分为两段的行程, 12; | |
| 2. 生长函数和对数函数 | 18 |
| 生长函数的性质, 18; 对数函数, 22; 以 10 为底的对数, 25; | |
| 把定义域扩充到大于 10 的数, 29; 把定义域扩充到介于 | |
| 0 与 1 之间的数, 33 | |
| 3. 速度与加速度 | 38 |
| 距离-时间图象, 38; 加速度, 40; 在图象下的面积, 42; 自由 | |
| 落体, 45 | |
| 4. 不变性 | 49 |
| 不变点和由不变点所组成的线, 49; 用代数方法找不变点 | |
| 和由不变点所组成的直线, 54; 不变线和由不变点所组成的 | |
| 线, 59; 在一般变换下的不变性, 61; 不变性质——面积和 | |
| 指向, 65; 变换的分类——长度、角度和平行性作为不变 | |
| 性质, 69; 全等形, 74 | |
| 5. 使用组合表 | 79 |
| 有限算术, 79; 四个性质, 82; 利用组合表解方程, 88; 含有 | |
| 一个运算的方程的解, 91 | |
| 6. 纬度和经度 | 96 |
| 球, 96; 球面上的最短距离, 98; 地球, 102; 海里, 107; 沿纬线计算 | |
| 的距离, 108; 球的体积和表面积, 111 | |
| 证明 | 113 |
| 一个旧证明题的新考察, 114; 关于定理, 115; 证明的写法, 116; | |
| 算术中的一个证明题, 118; 另一类证明法, 118; 几何中的间接证 | |

明, 119; 逆定理, 121; 为什么要费脑筋? 122; 试做一些证明
题, 123;

复习部分

7. 矩阵 128

存储信息, 128; 矩阵的组合, 129; 矩阵集合, 132; 关系矩阵, 135;
变换矩阵, 145; 联立方程, 150

8. 几何 154

对称, 154; 多边形和多面体, 159; 变换, 163; 变换——等距变
换, 165; 变换——放大与伸展, 170; 变换——切变和拓扑变换,
173; 变换的组合, 177; 立体几何, 182; 轨迹, 184

9. 统计 188

图形表示法, 188; 平均值, 194; 三种平均值的比较, 200; 离散程
度, 200

10. 概率 206

什么是概率? 206; “既…又…”与“或…或…”, 209; 复合事件, 212

11. 图象 217

图象, 217; 一些常用函数的图象, 218; 反函数的图象, 223; 斜
率, 226; 其他一些关系的图象, 227

12. 代数 230

元素和关系, 230; 运算, 232; 封闭性、恒等元素和逆元素, 237;
代数定律, 243; 方程和不等式, 249

13. 计算 I 253

引言, 253; 记数法的基, 254; 数的图案, 255; 指数, 258; 标准指
数形式, 259; 分数, 260; 百分数, 263; 精确度的界限, 264; 数集, 266

14. 计算 II 268

计算工具, 268; 面积, 270; 圆, 272; 体积, 274; 比和比例, 276; 毕
达哥拉斯法则, 279; 三角, 281

复习题 285

矩阵, 285; 几何, 292; 统计, 297; 概率, 303; 代数, 310; 计算, 314;
杂题, 319

符号和单位表

集 合

| | |
|------------------|---------------------------------|
| $\{x: x < 5\}$ | 所有小于 5 的 x 所构成的集合 |
| $\{1, 2, 3, 4\}$ | 1, 2, 3, 4 四个数所构成的集合 |
| \mathcal{E} | 全集合, 全集 |
| \emptyset | 空集合, 空集 |
| \in | 是……的一个元素, 属于 |
| \notin | 不是……的一个元素, 不属于 |
| $A \cap B$ | A 与 B 的交集; 由 A 与 B 共有的元素所构成的集合 |
| $A \cup B$ | A 和 B 的并集; 由 A 与 B 中所有的元素所构成的集合 |
| A' | A 的补集; 由全集中不属于集合 A 的那些元素所构成的集合 |
| $n(A)$ | 集合 A 中所含的元素的个数 |

关系、函数和变换

| | |
|----------------------|-----------------------|
| $x = y$ | x 等于 y |
| $x \neq y$ | x 不等于 y |
| $x \approx y$ | x 近似地等于 y |
| $x > y$ | x 大于 y |
| $x \geq y$ | x 大于或等于 y |
| $f: x \rightarrow y$ | 把 x 映射成 y 的函数 f |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \xrightarrow{f} y$ | 通过 f , 把 x 映射成 y |
| $f(x)$ | 在 f 的作用下 x 的映象 |
| f^{-1} | 函数 f 的反函数 |
| $f \circ g$ | “ f 作用在 g 的结果上”的复合函数; 即把 x 映射成 $f(g(x))$ 的函数 |
| $f \cdot g$ | 把 x 映射成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积的函数 |
| $M: P \rightarrow P'$ | 把 P 映射成 P' 的变换 M |
| $M: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ | 把 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 映射成 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 的变换 M |
| $M(P)$ | 在变换 M 的作用下 P 的映象 |
| MH | “ M 作用在 H 的结果上”的复合变换, 即把 P 映射成 $M(H(P))$ 的变换 |

向 量

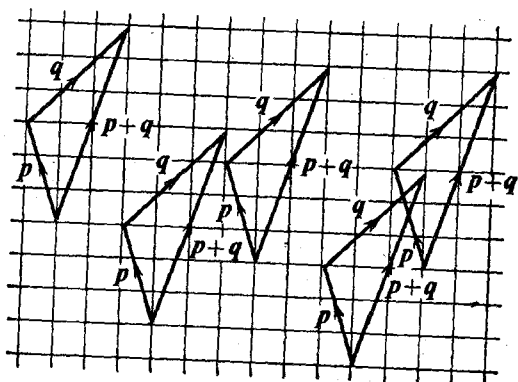
| | |
|-----------------|--------------------------------------------------------------|
| i | 在 x 增加方向上的单位向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| j | 在 y 增加方向上的单位向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| \overline{PQ} | 从 P 到 Q 的有向线段 |
| PQ | 有时用作 (i) 通过 P 和 Q 的无限伸展的直线, 有时用作 (ii) 从 P 到 Q 的线段的长度 |
| PQ | 从 P 到 Q 的位移, 或者是描述这个位移的向量 |

逻辑符号

| | |
|-----------------------|------------------------------|
| $p \Rightarrow q$ | 如果 p , 那末 q |
| $p \Leftrightarrow q$ | 当且仅当 q 时 p ; p 等价于 q |

| | |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| s, h, min | 时间: 秒, 小时, 分(日、年没有缩写) |
| m, mm, cm, km | 长度或距离: 米, 毫米, 厘米, 公里, 1000 毫米=1 米, 100 厘米=1 米, 1000 米=1 公里. |
| l | 体积, 容积: 1 公升(≈ 1000 厘米 ³) |
| kg, g | 质量: 千克, 克 |
| N | 力: 牛顿. 它是一个能使 1 千克质量产生 1 米/秒 ² 加速度的力. 质量为 m 千克物体的“重量”近似地等于 10 米· 牛顿 |
| m/s, km/h, kg/m ³ | 速率: 米/秒, 公里/小时, 千克/米 ³ |
| $x \rightarrow \sin x$ | 正弦函数 |
| $x \rightarrow \cos x$ | 余弦函数 |
| $x \rightarrow \operatorname{tg} x$ | 正切函数 |
| $x \rightarrow \lg x$ | 以 10 为底的对数函数 |
| $x \rightarrow 2^x$ | 以 2 为底的指数函数 |

1. 再谈向量



1. 向量的组合

(a) 上面的图象使我们回想起，向量 $p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的和可以用三角形方法求得。 $p+q$ 写成列向量是什么？

(b) 如果 a 和 b 是两个向量代表(图 1)，我们怎样求出 $a-b$ ？

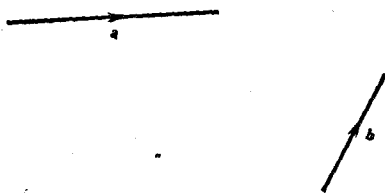


图 1

设 $a - b = x$ ，你认为我们可以把它写成 $a = b + x$ 吗？在这个形式中，我们要求的是这样一个向量：把它加上 b 时，结果会得到 a 。

在图 2 中，我们取 a 和 b 的两个代表使它们有共同的始点。

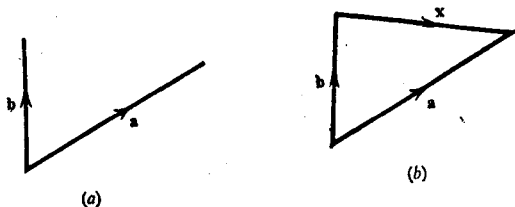


图 2

在图 2 (b) 中，我们看到 $b + x = a$ ，因此 x 就是 $a - b$ 的代表。

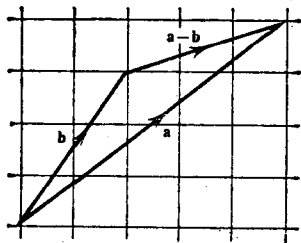


图 3

考虑图 3 中的两个向量：

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ 和 } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是什么？这个列向量能描述图 3 上标为 $a - b$ 的有向线段吗？

(c) 如果一个平移是用向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ 来描述, 那末它的逆平移就要用向量 $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 来描述, 我们可以把它写为 $-\mathbf{a}$.

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 是什么?

你得到的结果是否使你确信, 这两个向量描述了一对互逆的平移? 描述由向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 所表示的平移.

(d) 向量减法的另一种看法, 是把它看作加上逆向量的加法. 因此可以把 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 看作是 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

我们再来看

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

并且把 \mathbf{a} , $-\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ 表示在图 4 上.

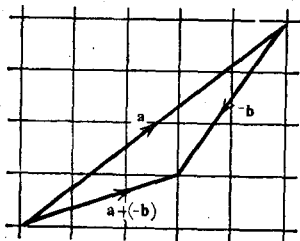


图 4

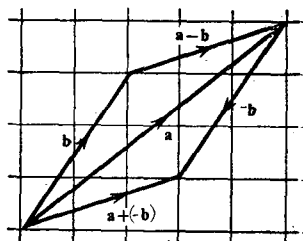


图 5

把 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ 写成列向量是怎样的? 你求得的结果和 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 看作列向量的结果一致吗? 图 5 是把图 4 与图 3 画在一起而成的.

你认为 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ 是同一个向量的两个代表吗? 这就再一次证实了我们对向量减法的两种看法:

$$(i) \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x},$$

$$(ii) \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

是等价的.

练习 A

1. 图 6 表示了三个向量的代表. 把这三个代表描在一张方格纸上, 并在其上画出表示下列各向量的代表:

$$(a) \mathbf{a} + \mathbf{b}; \quad (b) \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}; \quad (c) 2(\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

$$(d) \mathbf{a} + 2\mathbf{c}; \quad (e) \mathbf{a} - \mathbf{b}; \quad (f) \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

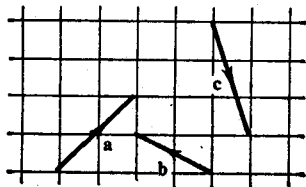


图 6

2. 设 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 试把下列各向量表示成列向量:

量:

$$(a) \mathbf{p} - \mathbf{q}; \quad (b) \mathbf{q} - \mathbf{r}; \quad (c) \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r};$$

$$(d) \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}; \quad (e) \mathbf{p} - (\mathbf{q} + \mathbf{r}); \quad (f) \mathbf{p} - (\mathbf{q} - \mathbf{r}).$$

3. 点 P 的坐标是 $(3, 2)$, 向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. 求出经过下列各向量所

表示的平移后点 P 的映象的坐标:

$$(a) \mathbf{a}; \quad (b) -\mathbf{a}; \quad (c) 2\mathbf{a}; \quad (d) -2\mathbf{a}.$$

4. 设 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, 试用列向量的形式写出下列各向量:

$$(a) -2\mathbf{a}; \quad (b) -3\mathbf{b}; \quad (c) \mathbf{a} - 2\mathbf{b};$$

$$(d) \mathbf{a} + (-2\mathbf{b}); \quad (e) 2\mathbf{b} - \mathbf{a}; \quad (f) 2\mathbf{b} + (-\mathbf{a});$$

(g) $3a-3b$; (h) $3(a-b)$.

5. 图 7 中 $ABCDEF$ 是一个正六边形, O 是它的中心. 用 a, b, c 来表示下列各向量:

- (a) AB ; (b) BC ; (c) CD ; (d) DE ; (e) EF ;
(f) FA .

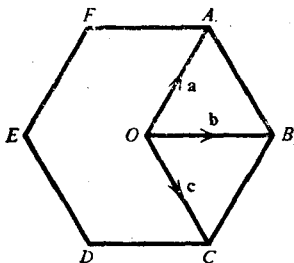


图 7

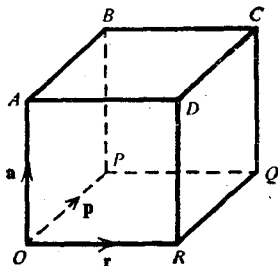


图 8

6. 用 p, a, r 表示下列各向量(见图 8):

- (a) AP ; (b) PR ; (c) OB ; (d) OQ ; (e) BQ ;
(f) BR .

7. 两列火车在两条平行的轨道上行驶, 其中一列以 100 公里/小时的速度向北行驶, 另一列以 85 公里/小时的速度向南行驶.

(a) 对于向南行驶的火车上的乘客来说, 向北行驶的火车的速度是多少?

(b) 对于向北行驶的火车上的乘客来说, 向南行驶的火车的速度是多少?

8. 一列客车以 90 公里/小时的速度向东行驶, 追赶另一列在毗邻的轨道上以 65 公里/小时的速度朝同一方向行驶的货车.

(a) 对于货车上的乘警来说, 客车的速度是多少?

(b) 对于客车上的乘警来说, 货车的速度是多少?

(c) 设 $p = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 65 \\ 0 \end{pmatrix}$, 把 $p-g$ 和 $g-p$ 写成列向量.

(d) 用 p 和 g 来表示(a)和(b)的答案.

2. 距离和方向

(a) 一艘船驶离港口 P ，一段时间后它的位置 Q 在港口东面 3 海里*，北面 4 海里。考察图 9，你是否认为 PQ 的距离是 5 海里？

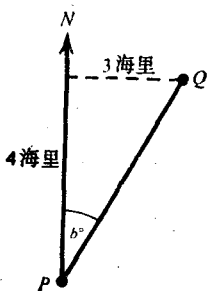


图 9

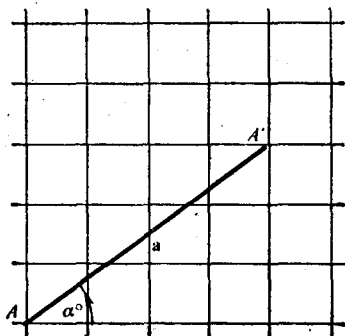


图 10

(b) 一个平移是用向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 来描述的。经过这个平移后平面上每个点移动了多少距离？图 10 表示一点 A 和它经过这个平移后的映象 A' 。你认为 AA' 的长是 5 个单位吗？我们说向量 \mathbf{a} 的长度是 5。下列各向量的长度是多少：

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) 图 9 中这艘船是沿着怎样的方位航行的？

你同意 $\operatorname{tg} b^\circ = \frac{3}{4}$ 吗？用正切函数表验证 $b \approx 36.9$ 。

* 1 海里 = 1854 米。——译者

(d) 向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的方向是什么? 由图 10, 我们得到:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha^\circ &= \frac{4}{3} \\ &\approx 1.33, \end{aligned}$$

从正切函数表查得:

$$\alpha \approx 53.1.$$

因此向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的方向与 x 轴交成 53.1° 的角.

不用三角方法, 求出下列各向量的方向:

(i) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; (ii) $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; (iii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) 图 11 表示点 B 和它经过一个用向量 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 描述的

的平移后的映象 B' .

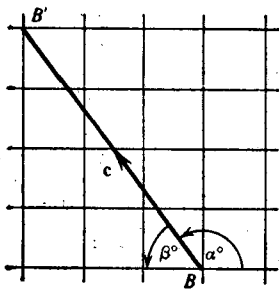


图 11

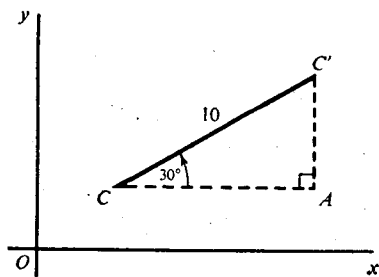


图 12

利用 2(b) 和 2(d) 的结果, 我们可以知道 \mathbf{c} 的长度是 5, 而 $\beta \approx 53.1$. 你同意 $\alpha = 126.9$ 吗? 我们通常借助一个平移向量与 x 轴正向的夹角, 来给定这个平移的方向.

(f) 通过平移 \mathbf{T} 后, 平面上所有的点沿与 x 轴成 30° 角

的方向上移动 10 个单位距离。图 12 表示一点 C 和它平移后的映象 C' 。

描述 T 的向量是怎样的？为了回答这个问题，我们需要知道 AC 和 AC' 的长度。

你同意 $AC = 10 \times \cos 30^\circ$

和 $AC' = 10 \times \sin 30^\circ$ 吗？

查表，可以得到：

$$AC \approx 10 \times 0.866 = 8.66$$

和

$$AC' = 10 \times 0.5 = 5.$$

描述 T 的向量是 $\begin{pmatrix} 8.66 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。我们说这个向量的两个分量分别为 8.66 和 5。

小结

1. 向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 的长度是 $\sqrt{u^2 + v^2}$ ，可以利用毕达哥拉斯法则求得。

2. 向量 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 的方向与 x 轴的正向的夹角为 α ，其中 $\operatorname{tg} \alpha = (v/u)$ 。

3. 一个平移使平面上所有点，沿与 x 轴正向成 α 角的方向移动 p 个单位距离，那么这个平移可以用两个分量为 $p \cos \alpha$ 和 $p \sin \alpha$ 的向量 \mathbf{a} 来表示，也就是：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} p \cos \alpha \\ p \sin \alpha \end{pmatrix}.$$