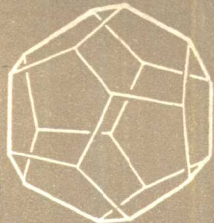


$$a|(b-c) \Leftrightarrow b \equiv c \pmod{a}$$

$$W_k = \cos \frac{\partial k \pi}{n} + i \sin \frac{\partial k \pi}{n} = W^k$$

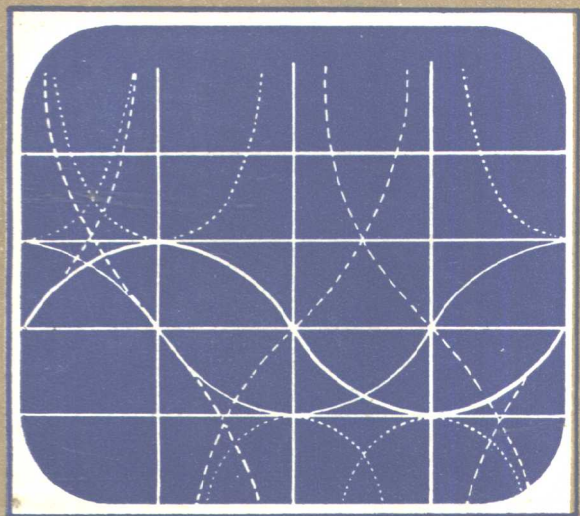


$$0.618$$

$$a+bi$$

$$x^2$$

$$y=$$



$$a+b$$

$$y=x^2$$

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} k$$

$$0.618$$

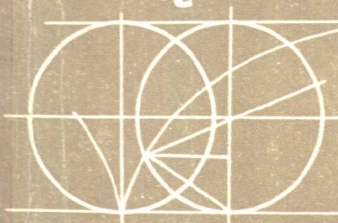


〔波兰〕史坦因豪斯编著 陈铨译

一百个数学问题

上海教育出版社

$$y=\sin x$$



$$y=x^2$$

$$W_k$$

$$a+b$$

一百个数学问题

〔波兰〕史坦因豪斯编著

陈 铨 译

上海教育出版社

СТО ЗАДАЧ
Гуго Штейнгауз
Государственное Издательство
физико-математической литературы
(1959 年)

一百个数学问题
〔波兰〕史坦因豪斯编著

陈 铨 译

上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)

数学书店上海发行所发行 上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.125 字数 110,000

1980 年 2 月第 1 版 1980 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—100,000 本

统一书号: 7150·2127 定价: 0.43 元

序

在 1948 年举行的波兰数学家代表大会上，教育部长斯克塞施维奇号召大会参加者更多地为中等学校写稿，使学生的数学知识有更好的提高。正如《数学》杂志的读者所知道，我响应了号召，承担了义务，并且支持了这个意见。我发表在这份杂志上的习题，就是完成 1948 年所承担的义务的一个部分。但是我还向自己提出另外的目的：我想使阅读《数学》杂志的教师，从而也使他们的学生注意数学跟现实的相互联系。因此，我努力编写这样的习题：它们以最自然的方式产生于几何现象或者现实的环境。编写这样的习题是不很容易的，因而这本书的篇幅并不大。虽然如此，读者在这里还可以看到一百个习题的全部解答，以及这些习题在必需的地方实际应用的概况。

这本初等的习题集，应当把读者引导到这个解释现象的普遍方法（希腊人曾经给数学取的名称）的实际应用，帮助他们从中学的实践向现代的数学过渡，并用容易理解的材料向他们说明这门科学。因此，这本书首先供给教师与学习能力较强的学生阅读。

本书的大多数习题是独创的，但是并非全部如此：其中某些习题是大家熟悉的，有些是其他的作者编写的，在这种情况下，如果知道作者是谁，我就写出他们的姓名。许多解答属于《数学》杂志的读者，他们的姓名列于本书的最后一页（这部分未译出。——译者），我感谢他们允许在这本书中运用他们的

AAE 39 / 1

解答.不少的解答属于《数学》杂志的主编伊凡什盖维奇教授,在这杂志上发表这些习题时,在我的习题正文中有着他的许多劳动,他改进了很多解法并且引导出了自己的推广与解题的思想(计划).在编写这本书时,最初,梅德爾斯基硕士帮助我,以后巴什可夫斯基硕士经常帮助我核验解答并且补充内容,最后编辑成书.一部分插图得自《数学》杂志,一部分是巴什可夫斯基绘制的.我感谢在这里所有提到名字的人对我的帮助.对于被我无意抄袭的作者,同样向他表示感谢(如果他们声明,我将在再版时写出他们的姓名).

尽管有许多人的帮助,我毕竟还应该援引一句拉丁谚语:即使现实落后于心愿,愿望本身也要受到赞扬.但是如果读者在一百个习题的例子中看到现代数学的意义与精神,我的主要目的就已经达到.

古伏.史坦因豪斯

目 录

一、数, 等式与不等式(第 1~12 题).....	1
二、点, 多边形, 圆, 椭圆(第 13~28 题)	4
三、空间, 多面体, 球(第 29~47 题).....	8
四、实际问题与非实际问题(第 48~78 题)	13
五、象棋, 排球, 追赶(第 79~92 题)	24
六、萨拉杰克博士的数学趣事(第 93~100 题).....	28
七、没有解答的题目.....	31
解答.....	38

一、数，等式与不等式

1. 乘法表的练习 我们来作如下的数列:

设第一项为 2, 第二项为 3, 因为

$$2 \cdot 3 = 6,$$

数列的第三项就取 6; 因为

$$3 \cdot 6 = 18,$$

那末, 第四项取 1, 第五项取 8; 因为

$$6 \cdot 1 = 6, \quad 1 \cdot 8 = 8,$$

第六项取 6, 第七项取 8, 等等.

这样, 我们得到数列:

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 8 \quad 6 \quad 8 \quad \dots$$

两数之间下面的小圆弧表示相乘, 所得的乘积就成为数列的下一个数. 上面的数列接下去是 8 乘以 6, 就写下得数 4、8. 任何时候都不会发生乘数不足, 因为每相乘一次, 小圆弧只移动一步, 而乘积至少是一位数, 有时候还会是两位数, 所以每相乘一次, 数字至少增加一个.

证明: 数 5、7、9 永远不会在这个数列中出现.

2. 数的有趣的性质 用十进制任意写出一个自然数(例如 2583), 计算这个数的各个数字的平方和($2^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2 = 102$). 再求所得数的数字平方和($1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$), 以后都是用同样的方法计算.

$$(5^2 = 25, \quad 2^2 + 5^2 = 29, \quad 2^2 + 9^2 = 85, \quad \dots)$$

证明: 如果这个过程中没有得出 1(显然, 如果得出 1, 那

末以后就是无限次重复地出现 1), 那末必定会得到数 145, 此后就是下列各数的循环重复出现:

145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

3. 被 11 整除 证明: 对于任何自然数 k , 数

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$$

能被 11 整除.

4. 数的整除性 数

$$3^{105} + 4^{105}$$

能被 13、49、181 与 379 整除, 但不能被 5 与 11 整除.

怎样验证这一点?

5. 简化的费尔马定理^① 如果 x, y, z 是自然数, 并且 $n \geq z$, 那末等式 $x^n + y^n = z^n$ 不可能成立.

6. 数的配置 请找出十个数 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}$, 使数 x_1 在区间 $[0, 1]$ 内,

把区间 $[0, 1]$ 二等分, 数 x_1, x_2 分别在这两部分内,

把区间 $[0, 1]$ 三等分, 数 x_1, x_2, x_3 分别在这三部分内,

把区间 $[0, 1]$ 四等分, 数 x_1, x_2, x_3, x_4 分别在这四部分内, 等等.

最后, 把区间 $[0, 1]$ 十等分, 数 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 分别在这十部分内.

7. 推广 上题中, 如果所求的数由 10 个改为 n 个 (n 是任意自然数), 并使它们满足类似的 n 个条件, 题目是否可解?

8. 字母的排列 由字母 $aabbcc$ 组成的不同的排列有 90 种 (这是有重复的排列: $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$. ——译者). 在排列

^① 所谓“费尔马定理”是指这样一个命题: 当 $n > 2$ 时, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有整数解. 这个命题到现在既未得到证明, 又未能给以推翻. 这里把这个命题加上条件 $n \geq z$, 这样, 就可以证明命题成立. ——译者

$aabcbc$ 中, 把字母 b 换成 c , 把 c 换成 b , 得到排列 $aacbcb$; 把排列 $aacbcb$ 的顺序倒过来, 得到排列 $bcbaaa$; 再把这个排列的字母调换, 可以得到排列 $acacbb$, 等等.

象 $aabcbc$, $aacbcb$, $bcbaaa$, $acacbb$ 这样的排列, 我们认为没有本质上的不同. 但是, 象 $aabcbc$ 与 $abcbca$ 两个排列, 我们就认为有本质上的区别, 因为, 不论调换字母或者颠倒顺序, 或者多次运用这两种变换, 都不能够把一个排列变为另一个排列.

问题: 由字母 $aabbcc$ 组成的, 本质上不同的排列共有多少种?

9. 比例 数 A, B, C, p, q, r 满足下列关系式:

$$A:B=p, B:C=q, C:A=r.$$

在比例式

$$A:B:C=\square:\square:\square$$

的空格中, 填写由 p, q, r 组成的式子, 且每个式子都由另一个式子的字母 p, q, r 进行轮换得到 (即: 如果把 p 换成 q , q 换成 r , r 换成 p , 那末第一个式子就变成第二个式子, 第二个式子变成第三个, 第三个变成第一个).

10. 对称式 象 $x+y+z$ 或 xyz 这样的式子是对称式. 所谓对称式是这样的式子, 其中变量 x, y, z 不管以怎样的排列方法调换, 式子的值都不变. 上面的两个例子显然是对称式, 但是有些式子的对称性却不是明显的, 例如:

$$||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z.$$

试证这个式子是对称式, 并确定它的值, 要求从这个值能明显地看出原式的对称性.

11. 根的无理性 用初等方法证明方程

$$x^5+x=10$$

的正根是无理数.

12. 不等式 证明不等式

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r},$$

其中所有的字母都代表正数.

二、点, 多边形, 圆, 椭圆

13. 平面内的点 在平面内已知几个(或几十个)点. 把每一点同最近的一点用线段连接. 我们假设每两点间的距离都是不相同的, 因此每一点都有确定的最近的一点.

证明: 这样所得的图形, 不含有封闭多边形或相交的线段.

14. 角的研究 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是正数. 在平面内取一射线 Ox , 在这射线上截取 $OP_1 = x_1$, 然后在 OP_1 的垂线上截取 $P_1P_2 = x_2$, 再在 OP_2 的垂线上截取 $P_2P_3 = x_3$, 等等. 直至 $P_{n-1}P_n = x_n$. 这里, 直角的方向是这样确定的: 它的左方的一条边经过点 O . 我们可以认为, 射线 Ox 绕着点 O 从最初位置起, 经过点 $P_1, P_2, \dots$ 到最后的位置 OP_n 为止, 旋转了一个角度.

证明: 当 x_i 给定, 如果这些 x_i 按下标是递降排列, 即 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, 那末这个旋转的角度最小; 如果下标按递增排列, 那末旋转的角度最大.

15. 三角形面积 不用三角知识证明: 如果三角形中 $\angle A = 60^\circ$, 那末这三角形的面积 S 可用下面的公式确定:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 - (b-c)^2], \quad (1)$$

如果 $\angle A = 120^\circ$, 那末

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12} [a^2 - (b-c)^2]. \quad (2)$$

16. 等分三角形周长 任意取一个三角形, 我们当然可以用一条直线, 把这三角形的周长截成相等的两部分. 我们甚至可以事先给定这条截线的方向. 如果按不同方向画两条这样的直线, 那末它们必定相交于某一点 Q . 这时, 过点 Q 的两条直线都把三角形的周长二等分.

是否存在一点, 过这点有三条这样的直线? 如果存在, 怎样求出?

17. 重心 设点 P 是三个点 A, B, C 的重心(谈及某三点的重心, 就意味着这三点的质量相同). 设 A_1, B_1, C_1 分别是下列三组点的重心:

$$B, C, P; \quad C, A, P; \quad A, B, P.$$

证明: A_1, B_1, C_1 三点的重心是点 P .

18. 三角形的分划 把一个三角形分为 19 个三角形, 使在所得三角形的每个顶点处(包括大三角形的顶点处), 聚集着相同数目的边. (所谓在某点聚集着的边, 是指所有以该点为公共端点的边. ——译者) 题中 19 这个数不可能改为更大的数, 但是可以换成较小的数. 为什么?

19. 三角形 设 n 是自然数. 在平面内给定 $3n$ 个点, 其中任意三点不在一直线上. 以这些点为顶点, 能否画 n 个三角形, 使它们既不互相交叉, 也没有一个三角形包含另一个三角形?

还可以提出类似的问题: 对 $4n$ 个点作四边形, 对 $5n$ 个点

作五边形等等。所有这些问题都可以解吗？

20. 三角形网(I) 大家知道，整个平面可以用等边三角形的网遮盖。

如果这个网的每一个结点(即三角形的顶点。——译者)都给予一个确定的符号(正或负)，法则如下：如果三角形有两个顶点的符号相同，那末第三个顶点取正号；反之，第三个顶点取负号。这样能够办得到吗？

当然，你可以让每个结点都取正号，但是我们排除这种没有意义的解。

21. 三角形网(II) 证明：整个平面不可能用这样的三角形网遮盖，在每一个顶点处都聚集着五个三角形(即每一顶点是五个三角形的公共顶点。——译者)。

22. 矩形还剩下什么？ 两条线段 a, b 如果满足等式

$$a:b=b:(a-b),$$

我们就说这两条线段是黄金分割线段。如果一个矩形的两条邻边是黄金分割线段，这个矩形叫做黄金矩形。

我们设想用纸剪一个黄金矩形，把它平放在桌上，使它较长的一边朝向我们。然后紧靠矩形的左边剪去一个面积尽可能大的正方形(其实这个剪去的正方形的边长等于矩形较短一边的长。——译者)。剩下的仍然是一个黄金矩形。现在我们站到桌子的左边，于是又是矩形的较长的一边朝向我们。把这个新矩形再进行与上面同样的剪裁。这样，我们绕着桌子作顺时针方向运动，同时依次一个一个地剪去正方形。除了只有一个例外的点，矩形的每一点都迟早会被剪去。请确定这个例外的点的位置。

23. 四边形 顺次连接凸四边形各边中点，得到一个小四边形。证明：这个小四边形是平行四边形，它的面积等于大

四边形面积的一半. 如果原四边形不是凸的, 这个结论还成立吗?

24. 正方形网 平面可以用全等的正方形网遮盖. 这个网的结点, 在数学上叫做整数格点.

能不能用字母 a, b, c, d 表示这些结点, 使每个正方形的四个顶点都分别是这四个字母(顺序不计. ——译者), 而且网的每一行与每一列都含有这四个字母中的每一个字母.

25. $14=15$ 1952 年, 在弗劳兹拉夫举行的数学竞赛大会上, 米古森斯基教授曾经指出, 可以把整个平面分成许多七边形, 使每个顶点处都聚集着三个七边形. 我想从这个结论出发, 证明 $14=15$. 设 P 表示 180° . 七边形的内角和等于 $5P$, 因而每个内角的平均度数等于 $\frac{5}{7}P$. 因为整个平面可以用七边形遮盖, 那末这些镶嵌的七边形, 它的一个内角的平均度数也等于 $\frac{5}{7}P$. 但是在每个顶点处聚集着三个这样的角, 所以在每个顶点处的一个角的平均度数等于 $\frac{2}{3}P$. 由此推出, 这些镶嵌的七边形, 它的一个内角的平均度数也等于 $\frac{2}{3}P$. 因为每一个角都属于某一个顶点, 所以

$$\frac{2}{3}P = \frac{5}{7}P, \quad \frac{2}{3} = \frac{5}{7}, \quad 14=15,$$

这就是我想证明的结论.

请找出上面推理中的错误.

26. 多边形 在平面内已知 n 个点, 其中任意三点不在一条直线上. 以这 n 个点为顶点作封闭 n 边形, 使它的边互不相交, 能办得到吗?

27. 点与圆 在平面内任给四点, 它们既不共圆也不共

线. 能不能用数字 1、2、3、4 分别表示这四点, 使点 4 在过 1、2、3 三点的圆内?

28. 几何问题 已知椭圆的长轴等于 $2a$, 短轴等于 $2b$. 请画一条封闭曲线, 使它的周长等于椭圆的周长, 而它围成的面积比椭圆的面积大 $(a-b)^2$.

三、空间, 多面体, 球

29. 空间的划分 经过一个定点作若干个平面, 把空间分成尽可能多的部分. 一个平面分空间成两部分, 两个相交的平面分空间成四部分, 三个相交于某一点而没有其他公共点的平面, 分空间为八部分. 四个相交于某一点的平面最多把空间分成几部分? n 个平面呢?

30. 两个投影 设平面 Π_1 同地球相切, 切点是北极 N , 平面 Π_2 同地球相切, 切点是南极 S . 从点 N 出发, 把地球表面的每一点投影到 Π_2 上, 我们可以画出一张地图; 从点 S 出发, 把每一点投影到 Π_1 上, 我们又可以画出一张地图. 这就是所谓球面投影. 现在, 把一个平面叠在另一个平面上面, 使各条对应的经线重合. 这样, 一张地图的每一点都同另一张地图的一个确定的点对应, 所以, 我们规定了平面到自身的一个映射. 怎样直接确定这个映射? (即这个映射关系如何用式子表示出来, 并看出是怎样的变换. ——译者)

31. 正方体 把一个正方体模型拿在手里, 使它绕着它的最长的轴(即正方体的对角线)旋转, 然后用黑纱线紧密地缠绕在正方体上(线绕上可以滑脱的那些地方不能绕线——译者). 黑线只能遮住正方体表面的一半(为什么?). 我们还

可以把正方体绕另一条轴旋转, 进行同样的缠绕. 正方体总共有四条轴, 每次缠绕上一种颜色的线(黑, 红, 蓝, 黄). 这样, 整个模型就被不同的颜色遮盖, 如果不同颜色重迭的地方出现混合色(正方体模型是白色的, 这个颜色我们不考虑在内), 正方体上共有几种颜色? 哪几种? 一条棱上有几种颜色? 正方体上有几层线? 每一个面的颜色是否各不相同?

32. 不需要数学知识的题目 在一个固定不动的正方体上, 绕上药房里药盒上的那种橡皮圈, 使它们互不交叉(这里所说的橡皮圈可能就是我们一般文具店出售的橡皮筋. 本题的正方体我们设想它的表面非常光滑没有摩擦力, 把橡皮筋套在正方体上, 由于橡皮筋的弹力, 它将使自己的周长保持最小. ——译者).

这样的橡皮圈所经过的路径, 叫做短程线.

(1) 遮盖正方体表面的短程线共有几层(即经过正方体表面的每一点有几条短程线)?

(2) 遮盖正方体表面的不同短程线族有几族?

33. 分子运动 无外力作用的质点在正方体容器内运动, 碰到容器壁时, 按经典定律弹回(入射角等于反射角, 过反射点垂直于平面的直线, 是分子进入与弹出的两直线所成角的平分线). 是否可能有这样的分子, 它不停地沿着一个封闭六边形运动, 依次碰击正方体容器的每一个面?

34. 正方体的展开面 多面体的模型可以由它的展开面做成. 在展开面中, 多面体的各个面以棱为界互相连接. 把硬纸的展开面沿着棱折合, 就可以做成模型. 正四面体(等边三棱锥)的这样的展开面有两种不同形式. 正方体的展开面有几种不同形式?

35. 正方体 大家知道, 用全等的正方体, 可以填满整个

空间. 每一个顶点处聚集着八个正方体. 把每个正方体, 以适当的方法切去一个角, 把切得的部分连成一体(可以形成一个正八面体. ——译者). 这样, 用正八面体以及正方体被切后剩下的形体, 可以填满空间. 这个剩下的是怎样的形体? 如果使这正八面体的体积为最大, 这些正八面体占空间的几分之几? 这时, 正方体被切后所剩的形体的各个面是什么形状? 每个顶点处聚集着几个形体?

36. 六面体 是否存在由全等的菱形(非正方形)围成的六面体?

37. 各个面都全等的四面体 能不能作一个四面体, 使它所有的面都是全等的三角形, 而这些三角形的三边 a 、 b 、 c 是任意给定的?

如果能作出, 请计算这四面体的体积.

38. 八面体 能不能作一个八面体, 使它的各个面是全等的四边形? 能不能作一个十面体或一般地 $2n$ 面体($n > 3$), 使它具有同样的性质?

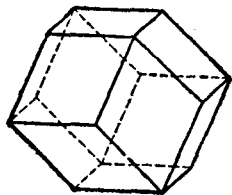


图 1

39. 苍蝇的旅行 苍蝇停在正十二面体模型的一个顶点上, 它决定沿着棱前进, 最后回到出发点, 做到经过每个顶点, 但是同一顶点不经过两次. 它的旅行计划成功了. 然后它打算在以菱形为面的正十二面体(图1)上,

用同样的办法试一试. 这个企图能成功地实现吗?

40. 正十二面体 可以用四种颜色分别涂在正十二面体的各个面上, 使任何两个相邻面上的颜色都不相同. 证明: 本题只存在四个解, 如果两个模型通过旋转, 可以使它们的颜色配置相同, 只算作一个解.

41. 内接多面体 各面是五边形的正十二面体可以内接一个正方体,使正方体的棱是这些五边形的对角线.这样的内接正方体的作法有好几种,请问共有几种?全部这样的正方体形成一个星体.如果十二面体的体积是1,这个星体的体积是多少?

所有正方体的公共部分,形成怎样的形体?

42. 多面体 凸多面体的面一定是凸多边形.反过来,一个多面体如果各个面都是凸多边形,它一定是凸多面体吗?特别地,是否存在这样的两个多面体(例如两个三十面体),它们由个数相同的对应全等的面围成(同一个多面体的各个面不一定全等),而其中一个多面体是凸的,另一个不是凸的?

43. 非凸多面体 能不能由全等的四边形围成一个非凸多面体?

44. 正多面体模型 从正四面体的六条棱中可以选出四条,形成一个封闭的空间四边形.这个四边形可以看成是原四面体的模型,因为它包含了四面体的全部顶点.用同样的方法,我们容易从正方体得到一个八边形,它包含正方体的全部顶点.这个方法能不能推广到其他正多面体,即正八面体,正十二面体,正二十面体?各有几个解?

45. 来自奇异国家的题目 寓言作家与数学家刻洛尔是奇谈怪论的创作者.例如,他曾建议使用比例尺为1:1的地图,因为把这张地图铺在地上,你不论什么时候要想知道自己在什么地方,只要简单地读出地图上写着的地名或记号就可以了.

我们设想,如果采用这个建议,就要在地球上把陆地、海洋分别涂上各种颜色,画上经线、纬线,用很端正的字写上城市、港口与国家的名称.罗盘仪将成为多余的.但是毕竟还