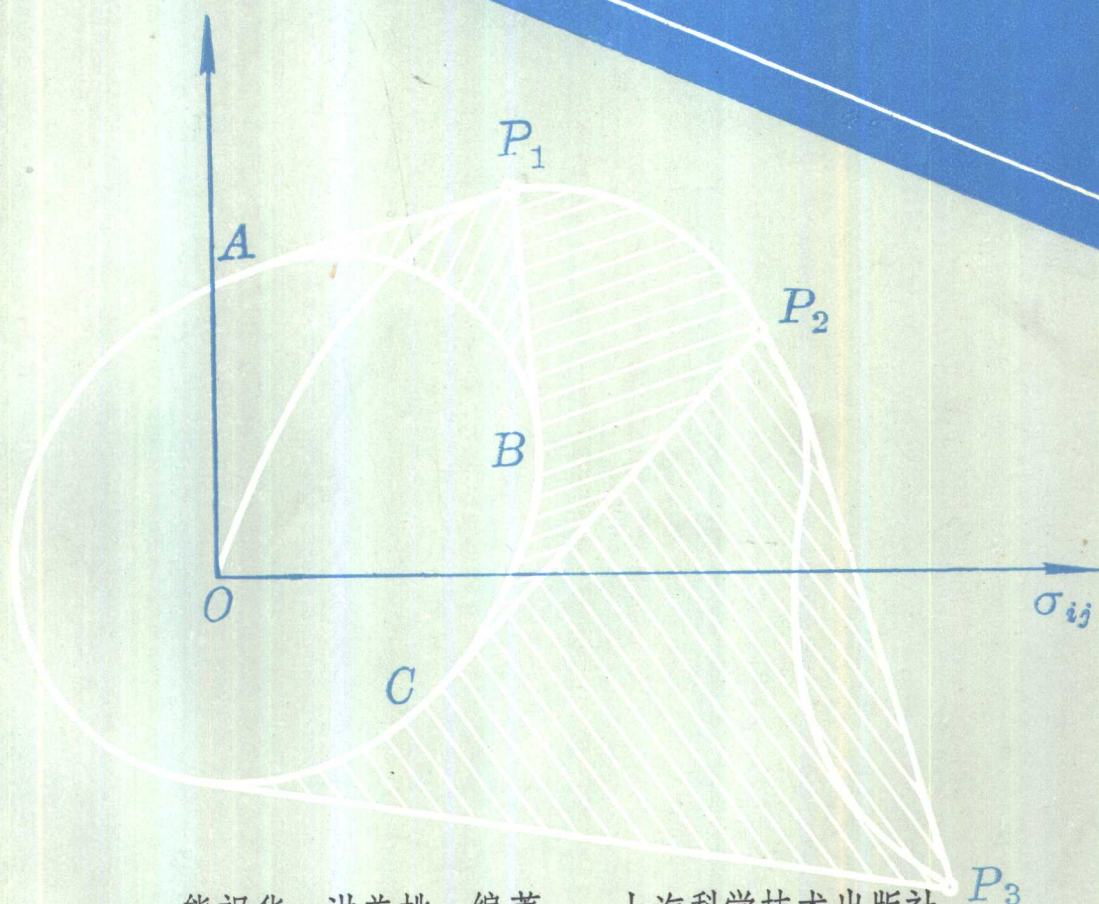


塑性力学



熊祝华 洪善桃 编著

上海科学技术出版社

P_3

塑性力学

熊祝华 洪善桃 编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书系统地叙述了塑性力学中的基本概念和基本理论,着重于物理概念的阐述和数学的严整推导,并注意到张量记号的应用。

本书共分十章,包括静力学部分和动力学部分。主要内容有金属的塑性性质、塑性力学的基本方程和基本原理、极限分析定理和安定性定理,以及结构的动力响应和塑性波的传播等。内容比较完备,叙述由浅入深。

本书可作为高等学校有关专业本科生和研究生的教材或参考书,也可供有关的教师、科研人员和设计人员参考。

塑 性 力 学

熊祝华 洪善桃 编著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 16 字数 382,000

1984 年 12 月第 1 版 1984 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—008,900

统一书号: 15119·2377 定价: 2.50 元

前 言

这是一本取材稍有不同的塑性力学书，其目的在于帮助已具弹性力学基础知识的读者对塑性力学的基本理论取得系统的和深入的了解，以利其从事塑性力学的教学和研究工作。为此本书着重于基本概念，基本理论和基本定理的阐述。在内容编排和叙述方面则求由浅入深，简明易懂，便于阅读。

为了让读者能初步了解和掌握张量在力学中的应用，本书都用张量(笛卡尔坐标系内)表达和推导有关的方程。与此同时，我们对应力状态理论和应变状态理论给予了比一般塑性力学书稍多的篇幅，借以熟悉张量符号的运用及张量运算的初步方法。

本书共分十章，另加一个附录。前八章属于塑性静力学，后两章属于塑性动力学。静力学部分着重介绍应力状态理论和应变状态理论、塑性状态方程以及塑性力学的一般定理(包括极限定理、安定性定理)；动力学部分简要介绍结构的塑性动力响应和弹塑性波的传播，后两章内容相互独立，可以根据情况自由选读。前八章与后两章的内容既有一定的联系，又有各自的独立性，因此可以根据需要有侧重地选读。

本书是在作者多年来对力学本科生、研究生和教师讲授塑性力学课所用讲义的基础上写成的。其中部分内容是以1980年教育部举办的全国高等工业学校力学教师讲习班所写讲义为基础，几经修改补充，又分别在北京工业学院和华南工学院力学、化机教师讲习班使用两次，才最后删增修订而成的。有些内容曾作为本科学生和研究生的教材使用过多次，因此，本书可作为本科生、研究生的教材和参考书，以及有关教师和科技工作者的参考用书。

在本书的编写过程中，曾得到同济大学翁智远、徐植信两教授的大力支持和热心帮助，他们仔细审阅了本书的部分内容，并对全书提出了许多宝贵意见。傅依铭和杨建中两同志描绘了插图，熊慧而和杨建中两同志校对了全书手稿。作者在此一并表示衷心的感谢。由于我们经验不足，水平有限，书中难免有错误和不当之处，望读者批评指正。

ABG 44/113

目 录

第一章 轴向拉(压)状态下金属的塑性特性及最简单的弹塑性平衡问题

第一节	拉伸图、金属材料的塑性	1
第二节	σ - ε 曲线的简化	5
第三节	拉伸失稳	7
第四节	三杆桁架的弹塑性平衡	8
第五节	残余应力、残余变形	10
第六节	变形历史的影响	12
第七节	极限载荷曲线	14

第二章 应力状态分析及有关的方程

第一节	应力矢、应力分量的标号	19
第二节	一点处任意方向上的应力矢、给定外力的边界条件	20
第三节	平衡方程式	20
第四节	一点处的应力状态分析	22
第五节	应力张量的主方向、主应力、应力张量的不变量	23
第六节	应力圆、罗地(Lode)参数	24
第七节	八面体应力、应力偏张量和球张量	26
第八节	应力空间、 π 平面	29

第三章 应变状态分析及有关的基本方程

第一节	相对位移、应变分量、转动分量	34
第二节	刚性位移、无旋位移、均匀变形	36
第三节	一点处的应变状态、相对位移张量	38
第四节	应变主方向、主应变、应变张量的不变量	40
第五节	应变连续方程(协调方程)	42
第六节	有限变形	43
第七节	应变率张量	44

第四章 屈服条件

第一节	布里奇曼(Bridgman)试验、体积弹性定理	46
第二节	广义虎克定理	46
第三节	初始屈服条件、初始屈服曲面	47
第四节	两个常用的屈服条件	48
第五节	强化条件、强化材料的加载和卸载准则	51
第六节	极限曲面、完全塑性材料的变形过程准则	53
第七节	强化规律	54

第八节 关于材料的公设	58
-------------------	----

第五章 塑性本构关系

第一节 完全塑性材料的本构方程、塑性流动法则	65
第二节 各向同性强化材料的增量理论	72
第三节 随动强化材料的增量理论	80
第四节 随动强化模型的完全理论和简单理论	85
第五节 组合强化模型	93
第六节 独立作用的强化模型	95
第七节 全量理论	99

第六章 塑性力学的一般原理

第一节 虚功原理	107
第二节 虚位移原理、虚力原理	109
第三节 广义力、广义位移、广义应力、广义应变	110
第四节 力和位移的逆步原理	113
第五节 全量理论本构方程的逆转及其唯一性问题	115
第六节 应变能函数和应变余函数	115
第七节 全量理论的最小能量原理	116
第八节 全量理论解的唯一性	122
第九节 增量理论本构方程的逆转及其唯一性问题	123
第十节 增量理论的基本不等式	126
第十一节 增量理论的最小值原理	127
第十二节 增量理论解的唯一性问题	129

第七章 极限状态下的一般原理

第一节 极限应力场	130
第二节 极限应力场的唯一性问题	130
第三节 极限状态下的极值原理	131
第四节 载荷空间、载荷空间内的屈服曲面	132
第五节 载荷空间内的极限曲面	135
第六节 极限定理	137
第七节 极限载荷的上下限定理	137
第八节 应力场和速度场间断的影响	139
第九节 用能量法计算极限载荷(简例)	142
第十节 塑性比功率、比耗散函数	148
第十一节 载荷极限曲面的界限	152
第十二节 极限分析的变分原理	155
第十三节 极限分析中新的上、下限定理	161

第八章 结构的安定性

第一节 解答的收敛性	167
第二节 弹性应力和残余应力的迭加	169
第三节 给定塑性应变的弹性解	170

4. 目 录

第四节	应力和弹性应变的最小原理	171
第五节	残余应力和与残余应力所对应的弹性应变的最小原理	173
第六节	由最小原理所得到的某些结论	175
第七节	循环载荷	176
第八节	安定性	177
第九节	结构的安定性	179
第十节	安定性定理	183

第九章 结构的动力响应

第一节	简支梁的刚塑性动力分析	188
第二节	简支圆板在冲击载荷下的刚塑性分析	193
第三节	梁的弹塑性动力响应	200
第四节	薄板的弹塑性动力分析	205
第五节	关于弹塑性动力响应工作的简要介绍	209

第十章 一维平面波

第一节	加载纵波沿半无限长弹塑性细杆传播	211
第二节	均匀弹塑性介质中的卸载波	218
第三节	强间断和激波	227
第四节	平面纵波在弹性-粘塑性介质中的传播	233
第五节	关于一维塑性波传播的简要介绍	237

附 录

一、求和约定	239
(一)字母标号	239
(二)求和标号、求和约定	239
(三)自由标号	240
(四)克罗内克尔代尔塔 δ_{ij}	240
(五)排列(置换)符号 ϵ_{ijkl}	241
二、张量的概念	243
(一)标量	243
(二)矢量	243
(三)二阶张量	244
(四)二阶张量的相加和相减	245
(五)对称张量、反对称张量	246
(六)共轭张量	247
(七)张量的分解	247
(八)张量的不变量	248
(九)张量的主方向	248
(十)张量的升阶和降阶	249
三、译名对照表	250

第一章 轴向拉(压)状态下金属的塑性特性及最简单的弹塑性平衡问题

本章将通过金属试样在轴向拉(压)情况下的性态, 介绍金属(主要是钢材)的基本塑性性质。同时通过三杆桁架这种最简单的结构, 介绍弹塑性平衡问题的分析方法, 及其与弹性平衡问题的区别和特点。

第一节 拉伸图、金属材料的塑性

一、拉伸图 σ - ϵ 曲线

图 1-1 是常温静载下轴向拉伸(压缩)时的拉伸曲线(σ - ϵ)形状, 此处假定试样在受力前内部没有残余应力和残余应变, 亦即处于自然状态(这对应于图 1-1 中的原点)。当试样受到拉伸或压缩(假定不会丧失平衡的稳定性)时, 试验表明, 开始屈服(出现塑性变形)的应力 σ_s 在数值上是相等的, 即材料没有初始包氏效应。当应力如下时

$$-\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_s \quad (1-1)$$

试样处于弹性状态, 应力与应变为线性关系

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-2)$$

这个关系与应力路径无关。可以将 $\pm\sigma_s$ 称为初始屈服点, 而两个初始屈服点间的应力变化范围则是初始弹性范围。

当应力超过初始弹性范围后(图 1-1 中是在拉伸方向超过 σ_s), 即开始出现塑性变形。如果应力沿拉伸方向单调增加, σ - ϵ 曲线如图中的 $OABC$ 。若增加到 σ_+^* 后卸载, 应力-应变曲线又呈现为直线, 在此直线上, 应力应变关系为

$$\Delta\sigma = E\Delta\epsilon \quad (1-3)$$

即增量形式的虎克定律。当应力继续减小, 以至变为压应力, 仍可保持一段直线关系, 直到 $\sigma = \sigma_-^*$ (σ_-^* 本身包括正负号)后, 试样又反向地(压缩)进入塑性状态。只要应力在下列范围内

$$\sigma_-^* \leq \sigma \leq \sigma_+^* \quad (1-4)$$

应力增量和应变增量都保持为直线关系(式 1-3), 可以将这个应力变化范围称为相继弹性范围, 它的边界 σ_+^* 、 σ_-^* 则称为相继屈服点。初始屈服点和相继屈服点统称为屈服点, 它们是应力弹性变化范围的界限。材料在经历塑性变形之后, 相继屈服点升高($\sigma_+^* > \sigma_s$), 这种现象称为材料强化。显然, 在任何情况下, 应力只可能或是位在弹性范围之内, 或是位在弹性范围的边界(屈服点)上, 否则, 不能维持平衡。

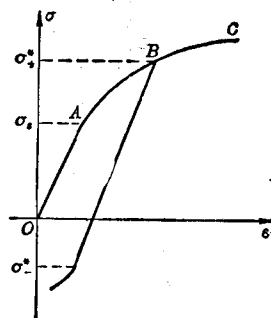


图 1-1

二、关于材料的基本假设(公设)—— σ - ϵ 曲线的理想化

在上面关于 σ - ϵ 曲线的讨论中,实际上我们已对它进行了简化,即对材料引进了若干基本假设:

1. 关于材料基本性质的假设

这里认为材料是非粘性的,即在本构关系中,没有时间效应。例如,不考虑应变率对 σ - ϵ 曲线的效应,不考虑蠕变效应;在应力与应变的关系式中,不包含时间因素。同时假定材料有无限的韧性,即具有无限变形的可能,不会出现断裂。这些假设都是对本课程的研究对象加以限制,因而,也相应地限制了本课程内容的应用范围。

2. 关于弹性和塑性的假设

在图 1-1 中,当应力从 σ_+^* ($\sigma_+^* > \sigma_s$) 减小,直到 $\sigma=0$ 时,应变并不能恢复到零,即试样不回到自然状态。这种不能恢复的变形,称为塑性变形或残余变形。

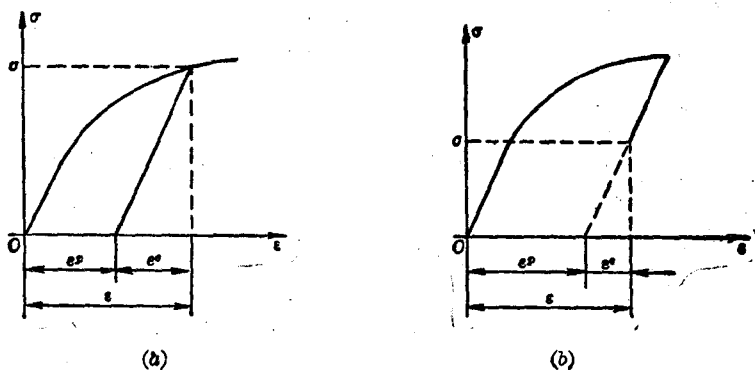


图 1-2

由图 1-2b 可见,任何时刻的应变都可写成

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1-5)$$

而且

$$\epsilon^e = \sigma / E \quad \epsilon^p = \epsilon - \sigma / E \quad (1-6)$$

这意味着应变 ϵ 总可分为弹性部分和塑性部分。弹性应变部分 (ϵ^e) 与应力之间的关系服从弹性应变规律(虎克定律),而且弹性常数 E 为常数,与塑性变形无关,即假定材料的弹性性质与塑性变形无关。

在式(1-6)中,令 $\sigma=0$ (全部卸去载荷),则 $\epsilon^p = \epsilon$, ϵ^p 就是残余应变。而且,在图 1-2 所示情况下,只要

$$\sigma_-^* \leq \sigma \leq \sigma_+^* \quad (1-7)$$

则 ϵ^p 不变,因此, ϵ^p 是不能由应力 σ 唯一确定的,它还与以前整个应力历史有关。这就表明,材料在经历塑性变形之后,应力与应变之间不存在单值一一对应关系,其本构关系与应力历史有关。

3. 关于材料力学性质的进一步假设

当应力单调变化时(例如单调拉伸,图 1-3),假设 σ - ϵ 曲线满足下列不等式

$$E \geq E_0 \geq E_t \geq 0 \quad (1-8)$$

式中

$$E_0 = \sigma / \epsilon \quad (\text{割线模量})$$

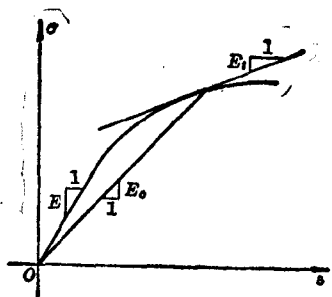


图 1-3

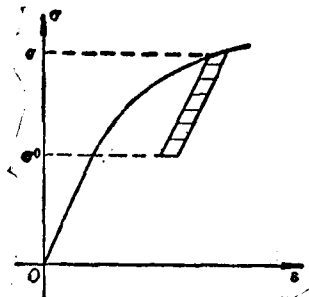


图 1-4

$$E_t = d\sigma/d\varepsilon \quad (\text{切线模量})$$

由上列不等式可得出下述结果: 设应力从 σ^0 加载到 σ , 然后又卸载, 回到应力 σ^0 , 在此应力循环过程中(图 1-4), 若塑性应变的变化至多是无限小量, 则在此应力循环中, 净功不为负, 即

$$\left. \begin{aligned} (\sigma - \sigma^0) d\varepsilon^p &\geq 0 \\ d\sigma d\varepsilon^p &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

这些不等式同将要介绍的德鲁克尔 (Drucker) 公设是同一范畴的假设, 它们与材料的本构方程、解的唯一性及平衡稳定性密切相关。

三、金属材料的基本塑性性质

1. 应变规律

从以上分析可见, 在轴向拉(压)下, 应力可处于两种可能的状态: 一是处于弹性范围之内(弹性状态); 一是处于弹性范围的边界上(屈服点上)。当应力处于屈服点上时, 称为塑性状态。应力所处的状态不同, 其应变规律也就不同, 换句话说, 即在塑性力学中, 应变规律不是唯一的。

在弹性范围内(应力点不在屈服点上)又有

$$\left. \begin{aligned} \text{初始弹性范围} \quad \sigma &= E\varepsilon \\ \text{相继弹性范围} \quad \Delta\sigma &= E\Delta\varepsilon \\ \text{或} \quad d\sigma &= E d\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

上列本构关系是与应力路径无关的。

在屈服点上, 即 $\sigma = \sigma_+^*$ 或 $\sigma = \sigma_-^*$ 。这时, 视应力变化 $d\sigma$ 不同, 而有不同的变形规律(图 1-5):

当 $\sigma d\sigma > 0$ 时, 应力从一个屈服点到达相继的另一个屈服点, 或者说, 从一个塑性状态到达另一个(新的)塑性状态, 这一变化过程称为加载。在此过程中

$$d\sigma/d\varepsilon = E_t \quad (1-11)$$

$$\sigma d\sigma > 0 \quad (1-12)$$

$$\text{或者} \quad d\varepsilon = d\sigma/E_t = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = d\sigma/E + d\varepsilon^p$$

所以

$$d\varepsilon^p = (1/E_t - 1/E)d\sigma = 1/E_t d\sigma \quad (1-13)$$

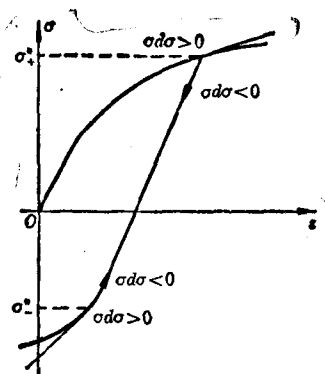


图 1-5

$$1/E_p = 1/E_t - 1/E \quad (1-14)$$

显然, E_p 不是常数, 它与以前的应力历史有关。

当 $\sigma d\sigma < 0$ 时, 材料从塑性状态转入弹性状态, 应力点从屈服点移到弹性范围内, 这一应力变化过程称为卸载, 这时有

$$d\sigma = E ds \quad (1-15)$$

$$\sigma d\sigma < 0 \quad (1-16)$$

式(1-12)称为加载准则, 式(1-16)称为卸载准则。这只是一种简单的表示形式。一般的形式应该用屈服函数来表达。

2. 弹性区域的范围——屈服点

由以上分析可见, 要研究塑性本构关系, 必须确定屈服点, 即弹性区域的范围或边界(在一般应力状态下, 这种边界称为屈服曲面)。根据试验结果可知:

(1) 弹性范围的边界, 即屈服点, (σ_+^*, σ_-^*) 与先前的应力历史有关, 因此, 它们是应力历史的函数。

(2) 应力在弹性范围内的变化(或应力史)不影响原有的屈服点, 所以屈服点不是整个应力历史的函数, 只是其中属于加载过程(塑性应变变化)的那部分历史的函数。这部分应力史称为力学性质的记录史(recorded history), 可用参数 H_a 表示。于是屈服点是应力 σ 和记录史参数 H_a 的函数, 可写成 $\sigma^* = \sigma^*(\sigma, H_a)$ 或 $\varphi(\sigma, H_a) = 0$ 。

3. 强化规律、强化模型

弹性范围或屈服点 (σ_+^*, σ_-^*) 的变化规律, 称为强化规律, 这是一个很复杂的问题。一般常采用几种简化模型:

(1) 各向同性强化(图 1-6, 假定材料为弹性线性强化) 假定材料在任一方向强化了, 在相反的方向也得到同等的强化, 即假定

$$\sigma_+^* = |\sigma_-^*| \quad (1-17)$$

或者, 用方程式表示为

$$\varphi(\sigma, H_a) = \sigma^2 - \sigma^{*2} = 0 \quad (\sigma^* \geq \sigma_s) \quad (1-18)$$

式中 σ^{*2} 是 σ^2 在此前的历史中曾到达过的最大值($\sigma^{*2} \geq \sigma_s^2$)。

显然, σ^{*2} 也与塑性比功有关, 事实上, 在图 1-6 情况下, $1/E_p = 1/E_t - 1/E = \text{常数}$, 由图可见

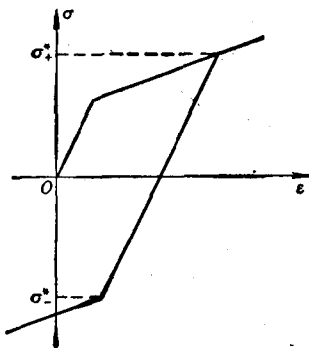


图 1-6

$$dw^p = \sigma ds^p = \sigma d\sigma / E_p$$

$$= 1/E_p \int_{\sigma_s}^{\sigma_+^*} \sigma d\sigma = 1/2 E_p (\sigma_+^{*2} - \sigma_s^2) \quad (1-19)$$

式中 σ_+^{*2} 为 σ^2 在全部应力史中曾到达过的最大值, 即 σ^{*2} 。所以式(1-18)也可写成

$$\varphi(\sigma, H_a) = \sigma^2 - F(w^p) = 0 \quad (1-20)$$

此处, σ^{*2} 和 w^p 都是单调变化的正数, 是此前全部应力史中 σ^2 或 w^p 曾经到达过的最大值, 它们都是记录史的参数。

(2) 随动强化 认为如果材料在拉伸方向强化了, 则在压缩方向将同等地弱化, 即(图 1-7)

1601108

$$\sigma_+^* - \sigma_-^* = 2\sigma_s$$

或者, 屈服点方程为

$$\varphi(\sigma, H_a) = (\sigma - \hat{\sigma})^2 - \sigma_s^2 = 0 \quad (1-21)$$

这里 $\hat{\sigma}$ 为弹性范围的中点(参考点)的坐标。显然, $\hat{\sigma}$ 是表征应力历史的参数, 它也是塑性变形的函数。事实上, 在图 1-7 所示弹性线性强化情况下, $E_p = \text{常数}$, 因此有

$$\hat{\sigma} = E_p s^p \quad (1-22)$$

于是, 式(1-21)可写成

$$\varphi(\sigma, s^p) = (\sigma - E_p s^p)^2 - \sigma_s^2 = 0 \quad (1-23)$$

(3) 组合模型 即将上述两种强化模型组合起来, 以合理反映材料的包氏效应。屈服点的方程可写成

$$(\sigma - \hat{\sigma})^2 - \alpha(w^p) = 0 \quad (1-24)$$

综上所述, 应力处于塑性状态的条件, 亦即屈服点的函数可一般地写成

$$\phi(\sigma, H_a) = 0 \quad (1-25)$$

式中 H_a 为记录史参数。

四、若干结论

根据以上分析, 可以得出以下各点:

1. 材料的应变可分为弹性部分和塑性部分, 弹性部分应变与应力之间的关系属于弹性, 与应力历史无关; 塑性本构关系则与材料所处的状态(弹性状态或塑性状态)及应力变化情况(加载或卸载)有关, 不是唯一的。材料在经历塑性变形之后, 应力与应变之间不再存在单值对应关系, 它们将是应力、应力史以及初始状态的函数。一般假定初始状态为自然状态。塑性变形是不可逆的, 它只在加载过程中才发生变化, 它与应力的关系一般是非线性的。

2. 屈服点是与加载过程有关的那部分应力史的函数, 这部分应力史叫做力学状态的记录史。显然, 塑性本构关系也是记录史的函数。随着材料的强化性质不同, 记录史可用不同的参数表示。

3. 塑性力学问题从本质上说, 只能按增量形式来建立, 然后追踪全部应力历史求解。只在特殊情况下, 才能按应力和应变的全量形式建立并求解塑性力学问题。

4. 一般地说, 反映塑性状态的方程可分为四个方面:

关于材料性质的基本假设;

确定弹性范围的界限(屈服函数);

塑性本构方程(加载过程);

卸载过程中的本构方程(卸载定理)。

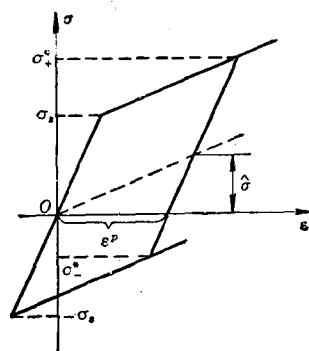


图 1-7

第二节 σ - ε 曲线的简化

为了使求解塑性力学问题成为可能或得到简化, 除了对材料进行上述基本假设之外, 还常常将 σ - ε 曲线作进一步的简化。一般的简化模型有下列四种(图 1-8)。

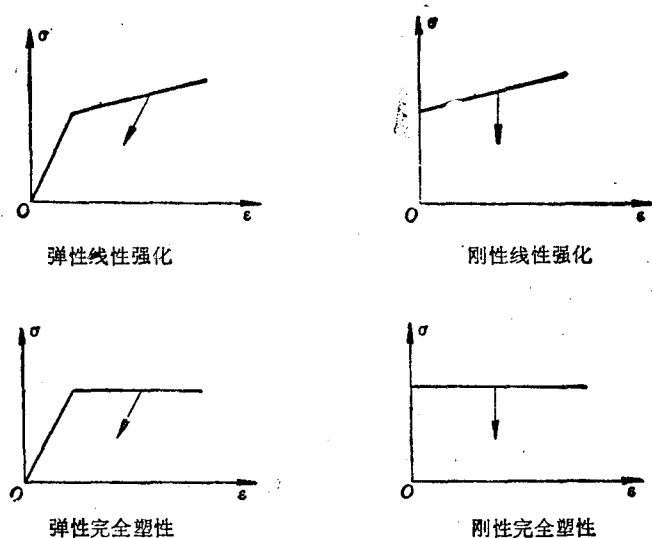


图 1-8

对于某些材料,也可将 σ - ε 曲线近似地用幂函数表示

$$\sigma = A\varepsilon^n \quad (0 \leq n \leq 1) \quad (1-26)$$

其中, A 和 n 为材料常数,关于 n 的限制是为了保证式(1-8)的成立,即 $E_0 \geq E_t \geq 0$.

在按全量形式建立塑性力学问题时,为了求近似解,可将 σ - ε 关系写成(图 1-9)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon(1-\omega), & s \geq s_s \\ \sigma &= E\varepsilon, & s \leq s_s \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

式中

$$\omega = \frac{E\varepsilon - \sigma}{E\varepsilon} \quad (s \geq s_s) \quad (1-28)$$

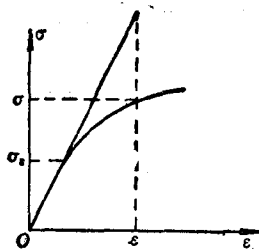


图 1-9

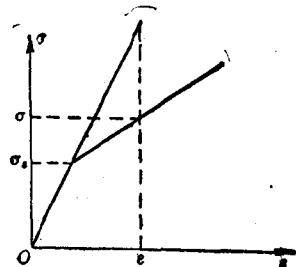
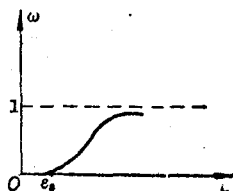


图 1-10

对于弹性线性强化材料(图 1-10)

$$\omega(s) = \frac{E - E_t}{E} (1 - s_s/s) \quad (s \geq s_s) \quad (1-29)$$

或者写成

$$\omega(s) = \frac{E - E_t}{E} (1 - s_s/s \operatorname{sign} s) \quad (|s| \geq s_s) \quad (1-30)$$

式中

$$\operatorname{sign} s = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases} \quad (1-31)$$

第三节 拉伸失稳

结构(解)的唯一性问题和稳定性问题,是就人们所建立的力学模型和数学模型而言的,因此,它既与关于材料力学性质的假设(例如,材料的不等式等)有关,也与平衡方程和几何方程的是否线性有关。所以,一般可将结构问题的稳定性分为两类,即固有稳定性(intrinsic stability)和几何稳定性。几何方程,特别是平衡方程的非线性,可以引起结构丧失平衡形式的稳定性;受压的杆、板、壳等细长或薄壁构件,由于考虑几何变化导致非线性平衡方程而引起平衡形式的不稳定,就属于几何稳定性问题。大家都知道,在分析压杆的稳定性问题,计算临界压力时,平衡方程就是非线性的,要考虑直杆变弯后轴向压力 P 所产生的弯矩 $P\eta$ (此处 η 为杆的弯曲挠度)。这时,挠度 η 和轴力 P 之间不再是线性关系了。如果不考虑杆的弯曲挠度,按轴向受力的模型建立平衡方程式 $N = -P$ (N 为轴力, P 为压力值),则不能出现丧失稳定性的结果,即不能导致在同一个压力值(临界压力)作用下,同时存在两种平衡形式:弯曲变形和轴向压缩。

另一方面,如果材料是固有不安定的,例如 $E_t < 0$,则在一定情况下,即使采用线性的平衡方程和几何方程,也可能引出整个结构是不稳定的。在这里,应该再一次指出:结构的稳定性问题,从理论上说,是从人们所采用的力学模型和数学模型来分析的。如果结构实际上是稳定的,而根据计算模型却得出不稳定的结果,或者,反过来,结构实际上会丧失平衡的稳定性,而所采用的计算模型却是稳定的。这就表明计算模型与实际不符,应该改变计算模型。

下面介绍的拉伸失稳,也属于几何失稳。在分析拉伸失稳问题时,必须考虑受拉杆件横截面的收缩(即变形引起的几何变化)。现设等直杆受到轴向拉力 P 作用,其初始截面面积为 A_0 ,在拉伸过程中,瞬时截面积为 A ,假定材料是不可压缩的。平衡方程为

$$P = A\sigma \quad (1-32)$$

由于 A 是变化的,所以上式不是线性关系。式中的 σ 称为真应力。设杆件原长 l_0 ,瞬时长为 l 。根据材料不可压缩,应有

$$A_0 l_0 = Al = \text{常数} \quad (1-33)$$

由此可得

$$A dl + l dA = 0$$

或者

$$dl/l = -dA/A$$

杆件的瞬时应变增量为(采用对数应变)

$$d\theta = dl/l = -dA/A$$

由上式可得

$$dA/A d\theta = -1 \quad (1-34)$$

由于杆件的尺寸和材料不可能完全均匀,总会有某个或若干截面更弱些,它们将首先开始塑性变形。由于塑性变形比较大,将引起两种相反的影响截面强度的因素:

(1) 截面收缩,使截面的抗力降低;

(2) 材料强化,使截面的抗力升高。

如果后者大于前者,则该截面的抗力提高,其他较弱的截面开始塑性变形。这种过程继续下去,将使得塑性变形在杆件内均匀发展。如果到达某一时刻,前一因素大于后一因素,则塑

性变形将集中于该截面附近, 杆件将在该处出现“颈缩”, 此后, 如不减小拉力, 则不能维持平衡, 即出现拉伸失稳。所以, 出现拉伸失稳的条件或“颈缩”的条件为

$$dP/d\vartheta = 0 \quad (1-35)$$

将式(1-32)代入, 可得

$$A \frac{d\sigma}{d\vartheta} + \sigma \frac{dA}{d\vartheta} = 0$$

注意到式(1-34), 由上式可得拉伸失稳的条件为

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \sigma_{cr} \quad (1-36a)$$

由于 $\vartheta = \ln(1+s)$, $d\vartheta = \frac{ds}{1+s}$, 所以拉伸失稳的条件也可写成

$$(1+s) \frac{d\sigma}{ds} = \sigma_{cr} \quad (1-36b)$$

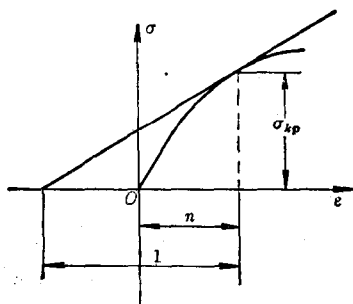


图 1-11

又设 $\psi = \frac{A_0 - A}{A_0}$ 为截面收缩率, 则根据材料不可压缩的假定, 可得 $\psi = 1 - \frac{A}{A_0} = 1 - \frac{l_0}{l} = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s}$, 或者 $s = \frac{\psi}{1-\psi}$. 于是式(1-36b)可写成

$$(1-\psi) \frac{d\sigma}{d\psi} = \sigma_{cr} \quad (1-36c)$$

σ_{cr} 为拉伸失稳时的临界拉应力(真应力)。如果 σ - ϑ 的关系式为(图 1-11)

$$\sigma = A\vartheta^n \quad (0 \leq n \leq 1)$$

则拉伸失稳时, 应有

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \sigma_{cr} \quad \vartheta_{cr} = n$$

第四节 三杆桁架的弹塑性平衡

设三杆桁架如图 1-12 所示, 三杆的材料和截面积都相同, 面积为 F , 材料为弹性线性强化。在节点 D 受到竖向力 P 作用, 以 u, v 表示节点 D 的水平(向右为正)和竖直(向下为正)位移, $\delta_i (i=1, 2)$ 表示杆的总伸长。

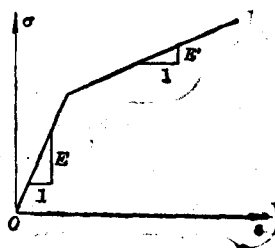
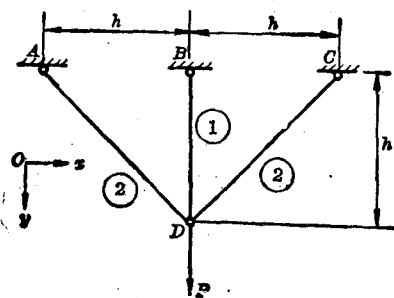


图 1-12

设载荷 P 是单调增加的, 因此, 桁架各杆的轴力也属单调增加, 不会出现卸载过程。在这种情况下, 可以应用全量型的本构方程。其基本方程如下:

(1) 平衡方程式

$$P = N_1 + \sqrt{2} N_2 = F (\sigma_1 + \sqrt{2} \sigma_2) \quad (1-37)$$

(2) 几何方程式

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= v & \varepsilon_1 &= v/h \\ \delta_2 &= v/\sqrt{2} & \varepsilon_2 &= v/2h = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-38)$$

(3) 本构方程式

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \quad (\sigma_i \leq \sigma_s) \quad (1-39a)$$

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i + (E - E') \varepsilon_s = E' \varepsilon_i + (1 - \lambda) \sigma_s \quad (\sigma_i > \sigma_s) \quad (1-39b)$$

$$\lambda = E' / E \quad (1-39c)$$

从上列基本方程可见, 本例与弹性力学问题有类似的地方。例如, 都采用全量型的基本方程, 都可以按力法或位移法求解。在这里我们将采用位移法, 于是基本未知数为位移分量 v ; 通过几何方程和本构方程可以建立用位移表示的平衡方程。但是, 与弹性力学不同, 此处的本构方程不是唯一的, 它们将随着杆件所处的状态不同而有不同的表达式(参见式 1-39)。由于各杆总是先从初始弹性状态进入塑性变形状态, 而且不是同时进入塑性状态的, 所以, 对于弹塑性平衡问题, 要如下地分阶段进行计算。

(1) 弹性解: $\sigma_i \leq \sigma_s$ 。根据基本方程式, 可得

$$P = EF (\varepsilon_1 + \sqrt{2} \varepsilon_2) = EF \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{EFv}{h} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1-40)$$

因为 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 所以 $\sigma_1 > \sigma_2$, 杆 ① 最先到达塑性状态。当 $\sigma_1 = \sigma_s$ 时, $\varepsilon_1 = \frac{v}{h} = \varepsilon_s$, 于是桁架开始出现塑性变形时的载荷为

$$P_1 = F \sigma_s \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1-41)$$

P_1 称为桁架的弹性极限载荷。

(2) 弹塑性解: $\sigma_1 > \sigma_s$, $\sigma_2 \leq \sigma_s$, $P > P_1$ 。由基本方程可得

$$P = [E' \varepsilon_1 + (1 - \lambda) \sigma_s + \sqrt{2} E \varepsilon_2] F = \frac{EFv}{h} \left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F \sigma_s (1 - \lambda) \quad (1-42)$$

当 $\sigma_2 = \sigma_s$, 即 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{v}{h} = \varepsilon_s$ 时, 桁架全部进入塑性状态, 对应的载荷为

$$P_2 = F \sigma_s (\lambda + \sqrt{2} + 1) \quad (1-43)$$

(3) 塑性解: $\sigma_i > \sigma_s$ ($i=1, 2$), $P > P_2$ 。根据基本方程, 有

$$\begin{aligned} P &= F [E' \varepsilon_1 + (1 - \lambda) \sigma_s + \sqrt{2} E' \varepsilon_2 + \sqrt{2} (1 - \lambda) \sigma_s] \\ &= (1 + \sqrt{2}) \left[\frac{EF\lambda}{\sqrt{2}} \frac{v}{h} + F \sigma_s (1 - \lambda) \right] \end{aligned} \quad (1-44)$$

根据上列结果可以绘制 $P-v$ 图如图 1-13 所示。在 P 由零渐渐增加(单调加载)过程中, 桁架的变形可分为三个不同的阶段:

弹性阶段 $P \leq P_1$

弹塑性阶段 $P_1 \leq P \leq P_2$

塑性阶段 $P > P_2$

在弹塑性阶段, 杆①虽发生塑性变形, 但由于其余两杆仍在弹性状态, 杆①的塑性变形受到约束, 整个桁架的变形仍限制在弹性变形量级, 这个阶段又称为约束塑性变形阶段。在塑性阶段, 三杆都进入塑性状态, 各杆的塑性变形可自由开展, 桁架的变形大于弹性变形量级, 所以, 这个阶段又称为自由塑性变形阶段。一般说来, 所有的弹塑性结构在外力作用下, 都会有这样三个变形阶段。

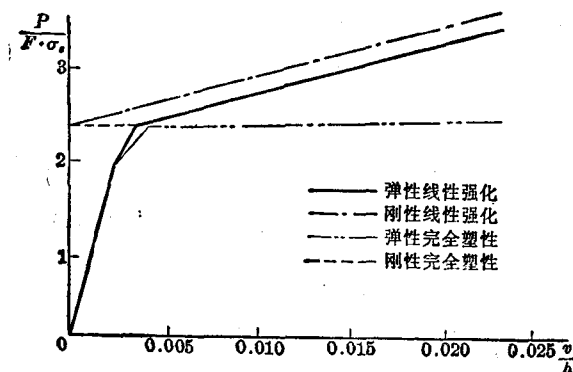


图 1-13

如果材料是弹性完全塑性的, 则令 $E' = 0$, $\lambda = 0$; 对于刚性完全塑性桁架, 则应令 $E \rightarrow \infty$, $\lambda E = E' = 0$ 。当然, 也可根据不同的 σ - ϵ 曲线的简化模型建立基本方程, 直接求解这些基本方程。各种 σ - ϵ 曲线简化模型的 P - v 图都已绘在图 1-13 中。由图可见:

(1) 在约束塑性变形阶段, 材料的强化效应不显著。在自由塑性变形阶段, 随着变形的发展, 弹性变形的影响越来越小, 而强化的效应则越来越大, 但变形增加很快。因此, 当结构不允许出现较大的变形时, 可以忽略材料的强化, 将容许载荷控制为 P_2 。

(2) 完全塑性结构有一个最大的载荷值, 在此载荷作用下, 结构可“无限制”地变形, 即塑性变形可“无限制”地增长, 称为塑性流动(以区别于自由塑性变形)。这时, 结构变为塑性机构。这个最大的载荷称为结构的极限载荷或承载能力。

(3) 完全刚塑性和完全弹塑性结构的极限载荷相同(在小变形条件下)。

以上结论, 对一般结构都适用。

第五节 残余应力、残余变形

当结构发生塑性变形之后, 设 $P = P^* > P_2$, 桁架内的应力、应变为 σ_i^* , ϵ_i^* , 节点位移为 v^* 。然后卸载 ΔP , 如果在卸载过程中, 结构内处处都卸载, 而且没有一处发生反向塑性变化, 即应力变化不超出相继弹性范围, 则应力、应变的关系为

$$\Delta \sigma_i = E \Delta \epsilon_i \quad (1-45)$$

即对应于 ΔP 的应力增量和应变增量之间为弹性关系, 可以按弹性问题求解。卸载 ΔP 后桁架内的应力和应变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^* - \Delta \sigma_i \\ \epsilon_i &= \epsilon_i^* - \Delta \epsilon_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (1-46)$$

如果载荷全部卸去, 即 $\Delta P = P^*$, 以 $\tilde{\sigma}_i$ 和 $\tilde{\epsilon}_i$ 表示完全卸载的应力和应变, 此处 $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\epsilon}_i$ 为外载等于 P^* 时, 弹性结构中的应力和应变, 于是完全卸载后桁架中的应力和应变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^* - \tilde{\sigma}_{ij} \\ \epsilon_{ij}^0 &= \epsilon_{ij}^* - \tilde{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$