

奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学 奥林匹克数学

奥数

总主编
单 樽 熊 斌

教程

· 高一年级 ·

熊 斌 冯志刚 编著



华东师范大学出版社

总主编 单 增 熊 斌

奥数教程

· 高一年级 ·

熊 斌 冯志刚 编著

华东师范大学出版社

开展竞赛学好数学
增进友谊共同提高

青少年数学爱好者留念

王元
二〇〇〇年七月



中国数学奥林匹克委员会主席、中国科学院
王元院士致青少年数学爱好者

前 言

据说在很多国家,特别是美国,孩子们害怕数学,把数学作为“不受欢迎的学科”。

但在中国,情况很不相同,很多少年儿童喜爱数学,数学成绩也都很好。

的确,数学是中国人擅长的学科.如果在美国的中小学,你见到几个中国学生,那么全班数学的前几名就非他们莫属。

在数(shǔ)数(shù)阶段,中国儿童就显出优势。

中国人能用一只手表示1~10,而很多国家非用两只手不可。

中国人早就有位数的概念,而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有12进制,60进制的残余)。

中国文字都是单音节,易于背诵.例如乘法表,学生很快就能掌握.再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”。但外国人,一学乘法,头就大了.不信,请你用英语背一下乘法表,真是佶屈聱牙,难以成诵。

圆周率 $\pi = 3.14159\dots$.背到小数后五位,中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字,专门写了一首诗,第一句三个单词,第二句一个,……要背 π 先背诗,我们看来简直自找麻烦,可他们还作为记忆的妙法。

四则运算应用题及其算术解法,也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始,中国人就编了很多应用题,或联系实际,或饶有兴趣,解法简洁优雅,机敏而又多种多样,有助于提高学生学习兴趣,启迪学生智慧.例如:

“一百个和尚分一百个馒头,大和尚一个人吃三个,小和尚三个人吃一个,问有几个大和尚,几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解. 中国人却有多种算术解法, 如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚, 100 个馒头表明小和尚是 300 个. 多出 200 个和尚, 是由于每个大和尚变小和尚, 多变出 8 个人. 从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人. 或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组, 平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少, 即大和尚是 $100 \div (3 + 1) = 25$ 人.

中国人善于计算, 尤其善于心算. 古代还有人会用手指帮助计算(所谓“掐指一算”). 同时, 中国很早就有计算的器械, 如算筹、算盘. 后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中, 我国的优势显然, 所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理, 在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算, 我国有不少论著), 比希腊人稍逊一筹. 但是, 中国人善于向别人学习. 目前我国中学生的几何水平, 在世界上遥遥领先. 曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班, 他们认为所教的几何内容太深, 学生不可能接受. 但听课之后, 不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解, 而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著. 在国际数学竞赛中, 我国选手获得众多奖牌, 就是最有力的证明. 当代著名数学家陈省身先生对此特别赞赏. 他说: “今年一件值得庆祝的事, 是中国在国际数学竞赛中获得第一. ……去年也是第一名.” (陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演《怎样把中国建为数学大国》)

陈省身先生还预言: “中国将在 21 世纪成为数学大国.”

成为数学大国, 当然不是一件容易的事, 不可能一蹴而就, 它需要坚持不懈的努力. 我们编写这套丛书, 目的就是:

1. 进一步普及数学知识, 使数学为更多的青少年喜爱, 帮助他们取得好的成绩.
2. 使喜爱数学的同学得到更好的发展, 通过这套丛书, 学到更多的知识和方法.

“天下大事, 必作于细.” 我们希望, 而且相信, 这套丛书的出版,

在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用。

著名数学家、中国科学院院士、中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词。我们表示衷心的感谢。

还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生,没有他们,这套丛书不可能很快问世。

本丛书从小学三年级至高中三年级共 10 册。本册为高一年级,由熊斌、冯志刚编著。

单 博 熊 斌

2000 年 8 月

目 录

基础篇	1
第一讲 集合的概念与运算.....	1
第二讲 有限集元素的数目.....	7
第三讲 二次函数.....	16
第四讲 函数的图象和性质.....	28
第五讲 幂函数、指数函数、对数函数.....	43
第六讲 函数的最大值和最小值.....	54
第七讲 三角函数的性质及应用.....	66
第八讲 三角恒等变形.....	75
第九讲 三角不等式与三角最值.....	85
第十讲 反三角函数与三角方程.....	94
第十一讲 几何与三角.....	104
第十二讲 空间中的“角”和“距离”.....	114
第十三讲 截面、折叠与展开.....	124
第十四讲 射影与面积射影定理.....	133
第十五讲 四面体.....	143
提高篇	151
第十六讲 集合的分划与综合题.....	151
第十七讲 二次函数综合题.....	159
第十八讲 离散量的最大值与最小值.....	170
第十九讲 函数迭代和函数方程.....	180
第二十讲 构造函数解题.....	190
第二十一讲 奇偶分析.....	200

第二十二讲 同余及其应用	209
第二十三讲 高斯函数 $[x]$	218
综合测试题(一)	229
综合测试题(二)	231
习题解答	233

第一讲 集合的概念与运算

一、知识要点和基本方法

集合是数学中最重要的概念之一,可以说,数学的各个领域、各个分支就是研究带有各种不同性质的集合.

正确地表达一个集合是学好数学的基础,描述法是表示集合的重要方法,它基于下面的概括原则:

概括原则 任给一个性质 p ,那么存在一个集合 S ,它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象,即

$$S = \{x | p(x)\},$$

其中 $p(x)$ 是“ x 具有性质 p ”的缩写.

两个集合之间的关系可以通过子集、交集、并集来反映.处理问题时,往往需要从元素出发来讨论,这里蕴含了“从局部到整体”的数学思想.

在集合的运算中,除了交与并两种运算外,经常出现的还有补运算与差运算.

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 关于 B 的差集,记作 $A \setminus B$,即

$$A \setminus B = \{x | x \in A, \text{但 } x \notin B\}.$$

集合的各种运算之间成立如下一些关系式.

$$\text{分配律: } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

De Morgan 法则: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

上述等式的严格证明要用到数理逻辑中的一些公理,读者可以利用文氏图予以验证.

二、例题精讲

例 1 求所有的实数 a , 使得关于 x 的不等式

$$|x - 1| < ax \tag{1}$$

的解集中, 恰有两个整数.

解 由条件, 不等式①的解应为一个有限区间, 这需从解不等式着手.

在图 1-1 中, 我们作出了函数 $y = |x - 1|$ 与 $y = ax$ 的图象, 由图象可得:

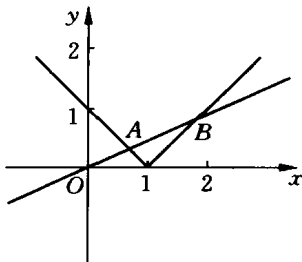


图 1-1

$a \geq 1$ 时, 不等式①的解为 $x > \frac{1}{1+a};$

$a < -1$ 时, 不等式①的解为 $x < \frac{1}{1+a};$

$-1 \leq a \leq 0$ 时, 不等式①的解集为 $\emptyset;$

$0 < a < 1$ 时, 不等式①的解为 $\frac{1}{1+a} < x < \frac{1}{1-a}.$

注意, 上面的 $\frac{1}{1+a}$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 是通过解方程(求两条直线的交点)得到的.

所以, 满足条件的 a 首先应满足 $0 < a < 1$, 这时, 解集为 $x \in \left(\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1-a} \right)$, 由于 $1 \in \left(\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1-a} \right)$, 所以 a 应满足 $2 < \frac{1}{1-a} \leq 3$, 故 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}.$

综上, 所有满足条件的 a 构成的集合为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right].$

说明 这是一个常见的求解含字母不等式的讨论问题, 解答中

利用图象来处理,显得简洁明了.

例 2 已知元素 $(1, 2) \in A \cap B$, 这里集合 $A = \{(x, y) | ax - y^2 + b = 0\}$, $B = \{(x, y) | x^2 - ay - b = 0\}$. 求 a, b 的值.

解 由交集的定义,可知 $(1, 2) \in A$, 且 $(1, 2) \in B$. 于是

$$\begin{cases} a - 4 + b = 0, \\ 1 - 2a - b = 0. \end{cases}$$

解此方程组,可知 $a = -3, b = 7$.

说明 本质上而言,集合 A 表示一个二次函数的图象, B 也是如此,所求问题为:在已知交点的条件上,确定参数的值.

例 3 集合 A, B, C (不必相异) 的并集

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 10\}.$$

求满足条件的集合的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

解 由文氏图,可知在求 $A \cup B \cup C$ 时, A, B, C 之间交出 7 个区域(如图 1-2 所示). 从而, $1, 2, \dots, 10$ 中每个数有 7 种选择,故所求有序三元组的个数为 7^{10} .

说明 这里每个数 $1, 2, \dots, 10$ 均有 7 种选择,用到了 A, B, C 不必相异,以及 (A, B, C) 为有序集合组两个条件. 当然,从解法上来看,我们体会了文氏图的一个妙用.

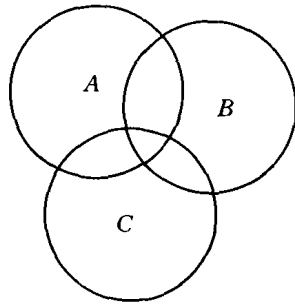


图 1-2

例 4 设 $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 15$, 集合 A, B 都是 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 的真子集, $A \cap B = \emptyset, A \cup B = I$. 证明:集合 A 或者 B 中,必有两个不同的数,它们的和为完全平方数.

证明 由 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = I$, 我们不妨设 $1 \in A$, 并采用反证法来处理.

设集合 A 与 B 中,都没有两个数,它们的和为完全平方数. 则 $3 \in B$, 于是 $6 \in A, 10 \in B$. 这时,如果 $15 \in B$, 则 $10 + 15 = 25$

为完全平方数,若 $15 \in A$, 则 $1 + 15$ 又是一个完全平方数,从而, 15 没有归属,由 $n \geq 15$, 这是一个矛盾.

所以,命题成立.

说明 这里我们不妨设 $1 \in A$ 是应该把握的一种技巧,人为地作合理的假设对处理具有对称性的问题,可使问题简化.

例 5 设 $P = \{\text{不小于 } 3 \text{ 的自然数}\}$, 定义 P 上的函数如下:若 $n \in P$, 定义 $f(n)$ 为不是 n 的约数的最小自然数,例如 $f(7) = 2$, $f(12) = 5$. 记函数 f 的值域为 M . 证明: $19 \in M$; $99 \notin M$.

证明 注意到,当 $n = 18!$ 时, $1, 2, \dots, 18$ 都是 n 的约数,故此时 $f(n) = 19$.

若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使 $f(n) = 99$, 则对小于 99 的自然数 k , 均有 $k|n$, 从而, $9|n$ 且 $11|n$, 但是 $(9, 11) = 1$, 由整除理论中的性质, 应有 $9 \times 11 = 99$ 是 n 的约数. 这是一个矛盾.

说明 可以证明 $M = \{p|p \text{ 为质数}\}$, 这一点利用本题的方法即可完成.

例 6 设 A_1, A_2, \dots, A_k 是集合 $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ 的不同子集, 它们两两的交集都不是空集, 而 X 的其他子集不能与 A_1, A_2, \dots, A_k 中每一个的交集都是非空集合. 求 k 的值.

解 设 A 为 X 的任意一个子集, 则 \bar{A} (视 X 为全集) 也是 X 的子集. 从而, X 的子集可以分为 2^9 个不同的集合对 (A, \bar{A}) .

由于 A_1, A_2, \dots, A_k 中, 任意两个集合的交集不空, 所以, 若 $k > 2^9$, 则必有一对集合 A 和 \bar{A} 在 A_1, A_2, \dots, A_k 中同时入选, 而它们的交集 $A \cap \bar{A}$ 是空集, 矛盾. 故 $k \leq 2^9$.

另一方面, 若 $k < 2^9$, 则有一对集合 A 和 \bar{A} 在 A_1, A_2, \dots, A_k 中同时不入选, 这时, 对 A 而言, 由条件, 存在 $j, 1 \leq j \leq k$, 使得 $A_j \cap A = \emptyset$, 从而 $A_j \subseteq \bar{A}$, 但是 A_j 与 A_1, \dots, A_k 中的其余每个集合的交都不空, 所以, \bar{A} 与 A_1, A_2, \dots, A_k 中的每个集合的交集都不空, 这是一个矛盾. 故 $k \geq 2^9$.

综上所述, $k = 2^9$. 并且, 当 $k = 2^9$ 时, 设 A_1, A_2, \dots, A_k 都为包含 1 的 X 的子集, 则它们满足题中的条件.

说明 建议读者在着手处理此题时,先把题中的条件完全弄懂.

练习 题

A 组

1. 设 x, y, z 都是非零实数, 试用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xy}{|xy|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 的所有可能值构成的集合表示出来.

2. 已知 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{x^2, 1\}$, 并且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$. 求 x 的可能取值情况数.

3. 已知 X 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的实数解集, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$. 且 $X \cap A = \emptyset$, $X \cap B = X$, 求 p, q 的值.

4. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = ax + 2\}$, $B = \{(x, y) | y = |x + 1|\}$, 且 $A \cap B$ 是一个单元集, 求实数 a 的取值范围.

5. 在集合 $\{1, 2, \dots, 50\}$ 的子集 S 中, 任意两个元素的平方和不是 7 的倍数, 求 $|S|$ 的最大值. 这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数(后同).

6. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 集合 $A = \{x | x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}$. 证明: $A \subseteq B$. 并在 $A = \{-1, 3\}$ 时, 求集合 B .

7. 设 S_1, S_2, S_3 是三个非空整数集, 已知对于 1、2、3 的任意一个排列 i, j, k , 如果 $x \in S_i, y \in S_j$, 则 $x - y \in S_k$. 证明: S_1, S_2, S_3 中必有两个集合相等.

8. 已知集合 $A = \{(x, y) | ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + ay = 1\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 问

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个二元集?

(2) 当 a 为何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个三元集?

9. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$. 其中 $a_i (1 \leq i \leq 5)$ 都是正整数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5, a_1 +$

$a_4 = 10$, 并满足 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, $A \cup B$ 中所有数之和为 224. 求集合 A .

B 组

10. 考虑集合 $\{1, 2, \dots, 2000\}$ 的满足下述条件的子集 A , A 中没有一个是另一个数的 5 倍, 求 $|A|$ 的最大值.

11. 已知一族集合 A_1, A_2, \dots, A_n 具有性质:

- (1) 每个 A_i 含有 30 个元素;
- (2) 对每一对 $i, j, 1 \leq i < j \leq n, A_i \cap A_j$ 都是单元集;
- (3) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$.

求使这样的集合族存在的最大的自然数 n .

12. 已知 $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2000\}$, 且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7, 求 $|A|$ 的最大值.

测 试 题

1. 已知集合 $A = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{y | y = b^2 - 6b + 10, b \in \mathbf{N}^*\}$, 问集合 A 和 B 之间的关系是怎样的.

2. 已知集合 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 并且 $M = N$, 求

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{y^3}\right) + \dots + \left(x^{2001} + \frac{1}{y^{2001}}\right)$$

的值.

3. 已知 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | y = 3x - 2\}$, $B = \left\{(x, y) \left| \frac{y-4}{x-2} = 3 \right.\right\}$, 求 $A \cap B$ 及 $\bar{A} \cup B$.

4. 设 $M = \{n | n = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{N}^*\}$, 证明: $2000 \in M$, 并求 M 中, 从小到大的第 2000 个正整数的大小.

5. 设 $M = \{n | n = x^2 + y^2, x, y \in \mathbf{N}^*\}$, 证明: $1999 \notin M$, 并且对任意自然数 k , 均有 $1999^k \notin M$.

第二讲 有限集元素的数目

一、知识要点和基本方法

按照集合的元素个数是否为有限数,集合可分为有限集和无限集.若集合 A 是有限集,用 $|A|$ 表示它的元素个数.

1. 映射

对任意的两个集合 A, B , 依对应法则 f , 如果对 A 中任意一个元素 x , 在 B 中都有唯一的元素 $f(x)$ 与之对应, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射. 这里 $f(x)$ 称为 x 的像, 而 x 称为 $f(x)$ 的原像.

若 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射, 且对任意 $x, y \in A, x \neq y$, 都有 $f(x) \neq f(y)$, 则称 f 是 A 到 B 的一个单射. 显然, 若 A, B 都是有限集, 而且能建立 A 到 B 的一个单射, 则 $|A| \leq |B|$.

若 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射, 且对任意 $y \in B$, 都有一个 $x \in A$, 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是 A 到 B 上的一个满射. 若 A, B 都是有限集, 且能建立 A 到 B 上的一个满射, 则 $|A| \geq |B|$.

若 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射, 并且 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是 A 到 B 的一个一一对应. 当 A, B 都是有限集时, 如能建立 A 到 B 上的一个一一对应, 则 $|A| = |B|$.

2. 容斥原理

定理 1 设 A, B 都是有限集, 则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

定理 2 设 A, B, C 都是有限集, 则

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| -$$

$$|B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

二、例题精讲

例 1 设 $M = \{1, 2, 3, \dots, 1995\}$, $A \subseteq M$, 且当 $x \in A$ 时, $19x \notin A$, 求 $|A|$ 的最大值.

解 由题设知 k 与 $19k$ ($k = 6, 7, \dots, 105$) 这两个数中至少有一个不属于 A , 所以

$$|A| \leq 1995 - (105 - 6 + 1) = 1895.$$

另一方面, 设 $B = \{1, 2, \dots, 5\}$, $C = \{106, 107, \dots, 1995\}$, 令

$$A = B \cup C = \{1, 2, \dots, 5\} \cup \{106, 107, \dots, 1995\},$$

则 $|A| = 1895$, 且 A 中没有一个数是另一个数的 19 倍.

事实上, 设 $k \in A$, 若 $k \in B$, 则

$$19 \leq 19k \leq 105, \quad 19k \notin A.$$

若 $k \in C$, 则 $19k \geq 106 \times 19 > 1995$, 故 $19k \notin A$.

综上所述, $|A|$ 的最大值为 1895.

例 2 设 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n, 2n+1\}$. B 是 A 的一个子集, 且 B 中的任意三个不同元素 x, y, z , 都有 $x+y \neq z$. 求 $|B|$ 的最大值.

解 设 $O = \{1, 3, \dots, 2n+1\}$, $E = \{2, 4, \dots, 2n\}$. 则 $A = O \cup E$. 设 $B = \{b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t\}$, 其中 $b_1, \dots, b_s \in O$, $c_1, \dots, c_t \in E$, 且 $b_1 < b_2 < \dots < b_s$. 由题设知

$$b_s - b_i \neq c_j,$$

其中 $i = 1, 2, \dots, s-1$, $j = 1, 2, \dots, t$ (否则集 B 中就有三个元素 b_i, c_j, b_s , 使得 $b_i + c_j = b_s$), 且

$$2 \leq b_s - b_i \leq 2n,$$

即 $b_s - b_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, s-1$.

所以 $b_s - b_1, b_s - b_2, \dots, b_s - b_{s-1}, c_1, \dots, c_t$ 是 E 中互不相同的元素,故

$$(s-1) + t \leq |E| = n,$$

$$|B| = s + t \leq n + 1.$$

又当 $B = \{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$ 时, B 中任意两个不同元素 x, y , 都有 $x + y \geq 2n + 3$, 从而 B 满足题意.

综上所述, $|B|$ 的最大值为 $n + 1$.

说明 例 1 和例 2, 我们都是先求出一个上界(例 1 是 $|A| \leq 1895$, 例 2 是 $|B| \leq n + 1$), 然后再构造一个具体的例子来说明这个上界是可以达到的, 这是处理这种最值问题的常用手法. 在实际解题时, 我们往往先通过具体的例子猜出这个上界, 然后再设法证明.

例 3 设 $X = \{1, 2, \dots, 100\}$, 对 X 的任一非空子集 M , M 中的最大数与最小数的和称为 M 的特征, 记为 $m(M)$. 求 X 的所有非空子集的特征的平均数.

解 设 $A \subset X$, 令 $f: A \mapsto A'$,

$$A' = \{101 - a \mid a \in A\} \subset X.$$

于是 $f: A \mapsto A'$ 是 X 的非空子集的全体(子集组成的集) Y 到 Y 自身的满射, 记 X 的非空子集为 A_1, A_2, \dots, A_n (其中 $n = 2^{100} - 1$), 则特征的平均数为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m(A_i) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (m(A_i) + m(A'_i)).$$

由于 A 中的最大数与 A' 中的最小数的和为 101, A 中最小数与 A' 中的最大数的和也为 101, 故 $m(A_i) + m(A'_i) = 202$, 从而特征的平均数为

$$\frac{1}{2n} \cdot 202 \cdot n = 101.$$

例 4 某班语文、数学、外语三门课程期中考试成绩统计结果: 至少有一门课程得满分的学生只有 18 人, 语文得满分的有 9 人, 数学得满分的有 11 人, 外语得满分的有 8 人, 语文、数学都得满分的有