大　学

数学系

自学丛书

实变函数论

SHIBIAN HANSHU

大学数学系自学丛书

实 变 函 数 论

东北师范大学
徐荣权　金长泽　主编

辽 宁 人 民 出 版 社
一九八四年·沈阳

大学数学系自学丛书

实 变 函 数 论

Shibian Hanshu Lun

徐荣权
金长泽 主编

辽宁人民出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：370,000 开本：850×1168 1/32 印张：15 3/8
印数：1—18,500
1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 封面设计：安今生

统一书号：7090·261 定价：1.95元

出版说明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　录

第一部分　实变函数论

第一章　集　　合

自十九世纪末叶，康托（Cantor）引入集合观点以后，集合的理论即迅速地渗入到数学的许多部门，并成为近代数学的基础，也是实变函数论的基础.集合论本身现已成为数学的一个分支，但在本课程中仅根据需要介绍集合论的一些基本知识.

§1　集合及其运算

一、集合及其表示法

集合是数学中的一个基本概念，就象几何中的“点”和“直线”一样，要把“集合”究竟是什么说得很清楚并不是一件容易的事，好在“集合”这个概念在日常生活和数学中是经常遇到的，人们对它并不陌生，所以我们无需在什么是集合这个问题上过多纠缠，只对集合给出一种比较恰当的描述，这对我们学习本门课程是毫无影响的.

关于集合我们给予下述描述：

凡是具有某种特殊性质的，确定的事物的全体就是一个集合（或简称集）.

集合的概念在数学中是到处可见的，诸如

"自然数的全体"

"方程 $ax^2+bx+c=0$的根的全体"

"开区间 (a,b) 中点的全体"

等等都是集合．但要注意，并不是具有某种性质的事物的全体都是一个集合，例如

"比 1 大得多的数的全体"

就不是一个集合．因为"比 1 大得多的数"虽然也是一个特殊性质，但它是不确定的，究竟比 1 大到什么程度才算大得多呢？界限是不清楚的．给出一个数，它是否在这个比 1 大得多的数的全体里是无法判定的，因此它不能做为我们讨论研究的对象——集合．

任何事物对某一集合来说，或者属于该集合（即该事物是该集合中的事物），或者不属于该集合（即该事物不是该集合中的事物），二者必居其一，但不可得兼．

设 a 是一个事物，A 为一个集合，若 a 属于 A，则称 a 为 A 的元素，记作

$$a\in A \text{ 或 } A\ni a$$

若 a 不属于 A，则记作

$$a\notin A \text{ 或 } A\not\ni a \quad (\overline{a\in} A\text{或}A\overline{\ni} a)$$

例如　Q 为有理数集合，则$\frac{2}{3}\in Q$ 而 $\pi\notin Q$．

不含任何元素的集合称为空集，例如方程

$$x^2+1=0$$

的实根全体就是空集，我们用 ϕ 表示空集．

以后用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$表示集合，用小写字母

$a,b,x,y,\cdots$表示元素．但在讨论问题时，往往关系到集合的特征，所以也常用能够标出集合中元素特性的符号来表示集合，如以

$$\{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

表示所有具有性质 p 的事物组成的集合。

例如，自然数集合可表示为

$$\{n \mid n \text{ 为自然数}\}$$

而

$$\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\} \quad (\varepsilon>0)$$

则表示与 x_0 的距离小于正数 ε 的所有实数组成的集合，即是开区间$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$。

设 $f(x)$是(a,b)上的实值函数，则

$$\{x \mid x\in(a.b),\ f(x)>c\}$$

表示(a,b)中的使得函数$f(x)$的函数值大于 c 的所有自变量 x 组成的集合.

设A是一集合，当我们用通常的方法一个一个地去数A中的元素，若恰好数到某个自然数 n，A 中就再没有未经数过的元素时，则称集合A为**有限集**．此时A有 n 个元素，可以记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,\ a_n\}$$

空集也称为有限集．不是有限集的集合称为**无限集**.

只有一个元素 a 的集合，记作$\{a\}$．a与$\{a\}$的含义不同，a表示元素，而$\{a\}$则表示由一个元素 a 组成的集合，并称作单元素集.

必须注意，$\{a,a,a,b,b\}$ 并不表示是有五个元素的集合，它只有两个元素 a 和 b，这个集合只能表示为$\{a,b\}$，不能表示为$\{a,a,a,b,b\}$.

二、集合间的包含关系

在集合理论中，集合间的包含关系是一个重要的概念，我们先看两个例子：

例 1　设二集合分别为 $A=(a,b]$，$B=[a,b]$，显然集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素。

例 2　设二集合为

$N=\{n\mid n$ 为自然数$\}$，$Q=\{r\mid r$ 为有理数$\}$，则 N 与 Q 之间也有 N 中元素都是 Q 中元素的性质。

现在将上述例子中反映出来的，一个集合的元素都是另一集合的元素这种性质给出一般的描述。

定义 1　（1）设 A,B 是二集合，若属于 A 的元素都属于 B，则称 **A 包含于 B 或 B 包含 A**，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

（2）若 A 包含于 B（$A\subseteq B$），则称 A 为 B 的**子集**。特别的，若 A 是 B 的子集，而 B 中又有元素不属于 A 时，则称 A 为 B 的**真子集**，记为

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A$$

由子集定义可知：

① 欲证 A 是 B 的子集（$A\subseteq B$），只须证明任一 $x\in A$，则有 $x\in B$；或任一 $x\notin B$，则有 $x\notin A$。

欲证 A 不是 B 的子集（记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$），只须证明存在 $x_0\in A$，但 $x_0\notin B$。

② 由空集定义可知，空集 ϕ 是任何集合的子集，即对任意集合 A，总有 $\phi\subseteq A$。（因为任一 $x\notin A$ 必有 $x\notin\phi$）。

例 3　直角三角形的集合是三角形的集合的子集。

例 4 $(-1,1]$和$[-1,1)$哪一个都不是另一个的子集。

例 5 设二集合为

$$E=\{x \mid \frac{1}{x}>0\},\ F=\{x \mid x>0\}$$

则显然E是F的子集，同时F也是E的子集。

例 6 设 A,B,C 分别表示 $[a,b]$ 上可微，连续，黎曼(Riemann)可积函数组成的集合，则A是B的子集，B是C的子集，从而有 $A\subseteq B\subseteq C$。

定理 1 对于任意集合 A,B,C，恒有

（1）$A\subseteq A$;

（2）若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有$A\subseteq C$。

证明 （1）是明显的。今证（2），为此只须证明若 $x\in A$，则有 $x\in C$。

事实上，对任一$x\in A$，由已给条件 $A\subseteq B$ 知有 $x\in B$，再由条件 $B\subseteq C$ 知有 $x\in C$。即对任一$x\in A$，都有 $x\in C$，于是由子集定义知 $A\subseteq C$。

定义 2 设 A,B 是二集合，若A是B的子集且同时B也是A的子集时，则称A与B**相等**，记作

$$A=B$$

由二集合相等定义可知：

① 二集合 A,B 相等当且仅当它们的元素完全相同。否则，称 A,B **不相等**，且记为 $A\neq B$。

② 欲证 $A=B$，只须证明 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$。

例 7 $A=\{x \mid x$ 是 $x^2-5x+6=0$ 的根$\}$与$B=\{2,3\}$相等；例 5 中的二集合E和F也相等。

三、集合的并、交运算

在讨论问题时，由于某种目的常常需要将集合做各种各样

的合并或分解，即要进行集合的运算，为此我们给出下述概念。

定义 3　设 A、B 是二集合，用 A 与 B 中所有元素组成一个新集合，则称此新集合为 A 与 B 的**并集**，记作

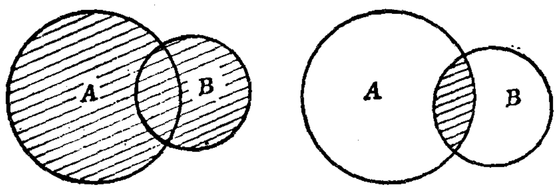
$$A\cup B$$

即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$（图 1—1(a)）.

定义 4　设 A、B 是二集合，用 A 与 B 所共有的元素组成一个新集合，则称此新集合为 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B$$

即　$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$（图 1—1(b)）.



$A\cup B$　　$A\cap B$

(a)　　(b)

图1—1

例 8　设 $A=\{a,b,e\}$，$B=\{b,c,d\}$，　$C=\{c,e,g\}$，$D=\{a,b,d,f\}$.

则　　$A\cup B=\{a,b,e,c,d\}$

$B\cup C=\{b,c,d,e,g\}$

$C\cup D=\{a,b,d,f,c,e,g\}$

而

$A\cap C=\{e\}$，$A\cap D=\{a,b\}$，$B\cap D=\{b,d\}$，$C\cap D=\phi$

例 9　设 $A=[0,2)$，$B=\left[\frac{1}{2},3\right]$，则

$[A\cup B=[0,3]$, $A\cap B=\left[\frac{1}{2},2\right)$

设D是一个集合（有限集或无限集），如果对于D的每个元素 α，都有一个集合 A_α 与之对应，则由这些集合 A_α 组成的集合，称作以D为指标集的**集族**，记作

$$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D} \quad \text{或} \{A_\alpha \mid \alpha\in D\}$$

当不致发生误解时也可略去指标集而简记为$\{A_\alpha\}$.

所谓集族就是以集合为元素的集合，比如设 $N_n=\{1,2\cdots,n\}$，与 i 对应的集合为A_i，则以 N_n 为指标集的集族，就是以 A_1，$A_2\cdots,A_n$ 为元素的集合$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，即

$$\{A_i\}_{i\in N_n}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$$

定义 3 和定义 4 分别给出了两个集合的并集与交集概念，同样我们也可以定义有限多个集合，以及任意多个集合的并集与交集如下：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，用这 n 个集合的所有元素组成的新集合，称为 A_1，A_2，$\cdots,A_n$ 的并集，记作

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid \text{存在某个 } k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \text{使 } x\in A_k\}$.

用上述 n 个集合所共有的元素组成的新集合，称为A_1，$A_2\cdots,A_n$ 的交集，记作

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid \text{对每个 } k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \text{皆有 } x\in A_k\}$.

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是任意集族，用这个集族中的一切$A_\alpha$的所有元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的并集，记作

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha \text{ 或简记为 } \bigcup A_\alpha$$

即 $\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x \mid \text{存在 } \beta\in D, \text{使 } x\in A_\beta\}$.

用这个集族中的一切A_α所共有的元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的交集，记作

$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha \text{ 或简记为 } \bigcap A_\alpha$$

即 $\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x \mid \text{对每个 } \alpha\in D, \text{都有 } x\in A_\alpha\}$.

特别地，设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列集合，则其并集与交集分别记作

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

由并集与交集定义可知：

① 如已知x属于一些集合中的某个集合，则知x必属于这些集合的并集；反之，如已知x属于一些集合的并集，则知x必至少属于这些集合中的某一个集合.

欲证x属于一些集合的并集，只须证明x属于这些集合中的某个集合.

欲证x不属于一些集合的并集，只须证明x不属于这些集合的每个集合.

②如已知x属于一些集合的每个集合，则知x必属于这些集合的交集；反之，如已知x属于一些集合的交集，则知x必属于这些集合的每个集合.

欲证x属于一些集合的交集，只须证明x属于这些集合的每个集合.

欲证 x 不属于一些集合的交集，只须证明 x 不属于这些集合中的某个集合．

③ 每个参加"并"运算的集合都是该并集的子集；交集是参加"交"运算的每个集合的子集．比如，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是一集族，则对任意 $\alpha\in D$，均有

$$A_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha,\qquad A_\alpha\supseteq\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha$$

例10 设 $A_i=\left[0,\frac{1}{i}\right)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则

（1）$\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$，（2）$\bigcap\limits_{i=1}^{m}A_i=\left[0,\frac{1}{m}\right)$

证明（1）只须证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\subseteq[0,1)$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\supseteq[0,1)$．

左$\subseteq$右 设 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$，由并集定义应有 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant m)$，使 $x\in A_{i_0}=\left[0,\frac{1}{i_0}\right)$．因为 $\left[0,\frac{1}{i_0}\right)\subseteq[0,1)$，所以 $x\in[0,1)$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\subseteq[0,1)$．

左$\supseteq$右 设 $x\in[0,1)$，即 $x\in[0,1)=A_1$，因为 $A_1\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$，所以 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A\supseteq[0,1)$．

综上得证 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$．

（2） 只须证明$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq \left[0, \frac{1}{m}\right)$且$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \supseteq \left[0, \frac{1}{m}\right)$.

左⊆右 设 $x \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$，由交集定义对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$都

有 $x \in A_i = \left[0, \frac{1}{i}\right)$，于是$x \in A_m = \left[0, \frac{1}{m}\right)$，故$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq \left[0, \frac{1}{m}\right)$.

左⊇右 设 $x \in \left[0, \frac{1}{m}\right)$，即 $0 \leqslant x < \frac{1}{m}$，因为对每个$i(1 \leqslant$

$i \leqslant m$）皆有$\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{i}$，从而对每个 i （$1 \leqslant i \leqslant m$）皆有 $x \in \left[0, \frac{1}{i}\right)$

$= A_i$，于是由交集定义知 $x \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$，故$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \supseteq \left[0, \frac{1}{m}\right)$.

综上得证$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \left[0, \frac{1}{m}\right)$.

例11 设 $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ （$n = 1, 2, \cdots$），则

（1）$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$， （2）$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.

证明 （1）这是显然的.

（2）左⊆右 设 $x \notin \{0\}$，即 $x \neq 0$，不妨设 $x > 0$，

于是有 n_0 使 $0 < \frac{1}{n_0} < x$，即 $x \notin \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) = A_{n_0}$，从而有