工程数学

主　编　张长春　刘　刚

副主编　王国富　秦春成

　　　　秦体恒　郭志兰

编　委　郑旭东　王　峰

　　　　刘年义　杨雪香

航空工业出版社

内容提要

本书参照原国家教委审定的高等工业院校专科工程数学各课程教学基本要求，在多年使用讲义的基础上编写。考虑到工程数学各课程学时大幅度减少的实际情况，作者在保持工程数学各课程全貌的前提下，试图探索一种较新的编写体系与方法，力求使本教材更接近于基本要求，更适于教学，也使读者在学习时少遇到一些困难，多感到一些兴趣。

本书内容为矩阵、线性方程组、特征值及二次型、事件及概率、随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、复变函数、积分变换。

本书可供高等工业院校专科各专业使用，也可供科技工作者及大中专学生作为学习工程数学相关课程的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学／张长春，刘刚主编.—北京：航空工业出版社，2000.9

ISBN 7-80134-741-2

Ⅰ.工… Ⅱ.①张… ②刘… Ⅲ.工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 70202 号

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里 14 号 100029）

北京云浩印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

2000 年 9 月第 1 版　　2000 年 9 月第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　　印张：20.5　　字数：498 千字

印数：1-8000　　定价：26.80 元

前　言

本书是在多年使用的《线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数与积分变换》三本讲议的基础上改编而成的。考虑到工程数学各课程学时数大幅度减少的实际情况，作者力图在保持工程数学各课程全貌的前提下，探索一种较新的编写体系与方法，力求使本教材更接近于原国家教委审定的高等工业院校专科次层工程数学各课程教学基本要求，更适于教学，也想使读者在学习时少遇到一些困难，多感到一些兴趣。

编写本教材有两个目的：①减少内容和学时，使教材更适合专科层次的要求；②结合工科院校专科学生的实际水平，不强调严格细致的数学推导，而是强调如何理解概念，能用它来分析问题、解决问题，习题与例题也侧重于这一方面。

本书实际上为三部分相对独立的内容：线性代数、概率论与数理统计、积分变换。由于积分变换需用复变函数的一些基本概念，因此，介绍了一些必备的复变函数的知识。

参加本书编写的有安阳大学张长春、刘刚、王国富、秦春成、郑旭东、王峰、郭志兰；新乡机电专科学校秦体恒；焦作师范学校刘年义、杨雪香等。其中既有教学经验丰富的中年教师，也有教学功底扎实、勇于探索进取的青年教师。本书的编写工作具体分工为：

张长春（第三篇第一章）；刘刚（第三篇第二章）；王国富、秦春成（第二篇第一、二章）；秦体恒、郭志兰（第一篇第一章）；郑旭东、王峰（第二篇第三、四章）；刘年义、杨雪香（第一篇第二、三章）。

主编张长春、刘刚提供编写思路及方案，把握本书的修改、定稿，确保风格统一。

虽然编者对本书的编写倾心投入，尽了很大努力，但限于经验水平有限，缺点错误一定很多，恳请专家、读者不吝指教。

编　者

2000 年 7 月

第一篇　线性代数

线性代数是代数学的重要分支，它为数学的几乎所有分支和工程学、电学、管理科学、经济学等提供了极为有效的表示方法和计算工具。线性代数是学习后继课程的重要基础。本篇仅介绍线性代数课程中最基本的内容。

第一章　矩阵

矩阵是本课程研究的基本对象之一。它不仅在本课程中研究各类问题时要被用作工具，而且在自然科学和工程技术以及生产实际中还有大量问题与矩阵有关，并可通过对矩阵的研究获得解决。因此矩阵是一个非常重要的数学工具。本章主要介绍矩阵的定义、运算及其性质和一些特殊的矩阵。

§1.1　n 阶行列式

在线性代数一些问题的研究中，如线性方程组、矩阵须利用行列式作工具，在数学的其他分支中，也经常用到行列式，本节由二阶、三阶行列式的定义、性质和计算入手，并进一步讨论 n 阶行列式的定义和计算。

一、二阶和三阶行列式

解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1-1}$$

应用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{cases} \tag{1-1-2}$$

为便于使用和记忆，将式(1-1-2)出现的那种四个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc \tag{1-1-3}$$

并称为**二阶行列式**。利用二阶行列概念，当式(1-1-1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，二元一次方程组的解就可简洁地表达为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1-1-4}$$

由此可见，二阶行列式就是由其元素之间的特定运算所得到的一个数值。

类似地，为了便于记忆和表达三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-1-5}$$

的解，引进记号

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &\stackrel{\triangle}{=}(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{23}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ &\quad+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{1-1-6}$$

并称为**三阶行列式**。例

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} &=2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \\ &=2(0\times8-5\times6)-(4\times8-5\times(-1))+3(4\times6-0\times(-1)) \\ &=2\times(-30)-37+3\times24=-25 \end{aligned}$$

可见，三阶行列式也是一个数值，它可以通过转化为二阶行列式计算得到。

用消元法解三元一次方程组(1-1-5)，利用三阶行列式的概念，当其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时，其解同样可简洁地表达为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad (1-1-7)$$

对于解的表达式(1－1－4)和(1－1－7),很容易抓住规律进行记忆,分母均是相应的系数行列式,x_i 的分子是把系数行列式的第 i 列换成方程组中的常数项,其余列不动。

二、n 阶行列式的定义

我们由二阶行列式,以及三阶行列式和二阶行列式的关系,可推广到一般情形而得到 n 阶行列式的定义。

定义 1　由 n^2 个数排列成 n 行 n 列(横的称行,竖的称列),并左、右两边各有一竖线,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它代表一个由确定的运算关系所得到的数。

当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \qquad (1-1-8)$$

其中数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素($i,j=1,2,\cdots,n$)

$$A_{ij}\triangleq(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (1-1-9)$$

称为 a_{ij} 的代数余子式;M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}\triangleq\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1-1-10)$$

称为 a_{ij} 的余子式。

根据定义可以知道一个 n 阶行列式代表一个数值，而且这个数值可以利用定义由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而求得。通常把该定义简称为**按第一行展开。**

例1 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&-4\\7&-1&0&5\\-2&6&1&0\\8&4&-3&-5\end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_4=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0&5\\6&1&0\\4&-3&-5\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{(1+4)}\begin{vmatrix}7&-1&0\\-2&6&1\\8&4&-3\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot\left[(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-3&-5\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}\right]$$

$$+4\cdot\left[7\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&1\\8&-3\end{vmatrix}\right]$$

$$=2[5+5(-18-4)]+4[7(-18-4)+(6-8)]=-834$$

计算此例可以体会到第一行的零元素越多，按第一行展开时计算越方便。

三、n 阶行列式的性质

为了应用行列式来处理问题并简化行列式本身的计算，现介绍 n 阶行列式的性质。

设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

则把行列式 D 中的行与列按原顺序互换以后的行列式记为 D'，即

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

并称行列式 D' 为行列式 D 的转置行列式。

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$。

对于二阶行列式可由定义直接验证

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\quad D_2'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=D_2$$

至于一般 n 阶行列式则可以用数学归纳法加以证明,此处从略。

这个性质说明对于行列式来说,行与列无本质的区别,凡是行列式对行成立的性质对列也成立。譬如设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\qquad D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}&a_{41}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}&a_{42}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

按定义

$$D'=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{32}&a_{42}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}+(-a_{21})\begin{vmatrix}a_{12}&a_{32}&a_{42}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{22}&a_{42}\\a_{13}&a_{23}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+(-a_{41})\begin{vmatrix}a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}\end{vmatrix}$$

而由性质 1,把上述四个三阶行列式转置其值不变,因此

$$D=D'=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+(-a_{21})\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+(-a_{41)}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{vmatrix}$$

上述右边即为 D 按第一列元素的展开式。因此定义中按第一行展开也可换成按第一列展开,其实质不变。

例 2　计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{n-1} = a_{11}a_{22}D_{n-2} = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

显然

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \tag{1-1-11}$$

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号。

性质 2 关于二阶行列式的正确性,可通过计算直接验证。如

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

将两行互换得行列式

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

易知其值为 $cb - ad$,恰为 D_2 的值变号。

至于 n 阶行列式的情况,可用数学归纳法证明。建议由读者完成,此处从略。

例 3　计算

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 7 & 12 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 9 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解　注意到 D 中的第一行和第四行是相同的,因此我们把 D 中的第一行、第四行互换,一方面由这两行元素对应相等,故仍为 D;另一方面由性质 2,可知应为 $-D$。于是有

$$D = -D$$

即 $D=0$

读者可由此归纳出一般的规律。

性质 2 的意义还在于,按定义似乎行列式的第一行处于一种特殊地位,而性质 2 告诉我们,只要适当调整符号,任何一行均能换至第一行的位置,因此说明第一行并不特殊。下面具体剖析四阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按定义}} a_{31}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{32}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{33}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{34}\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

我们注意到原行列式的代数余子式 A_{31}、A_{32}、A_{33}、A_{34} 的表达式，就可把上式写成

$$D_4 = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

这表明行列式亦可按第三行展开。易见上述分析具有一般性，因此可得到下面重要的性质。

性质 3　**n 阶行列式等于任意一行(列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和。** 即

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad \left(D_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right) \tag{1-1-12}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$ $(j=1,2,\cdots,n)$。简言之，即行列式可按任意一行(列)展开。

性质 4　**n 阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

中任意一行(列)的元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。 即当 $i\neq k$ 时，有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0$$

证　构造一个辅助行列式 D_0，把 D 中的第 i 行换成和第 k 行相同，其他各行不变。即

$$D_0=\begin{array}{|cccc|l}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & 第\ i\ 行 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & 第\ k\ 行 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}$$

因为 D_0 与 D 除去第 i 行不同外，其余各行对应相同，故 D_0 的第 i 行元素的代数余子式就是 D 的第 i 行元素的代数余子式 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$，现将 D_0 按第 i 行展开得

$$D_0=a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}$$

因 D_0 有两行相同，故 $D_0=0$，从而得

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0$$

性质 4 有重要的理论价值，以后将会引用它。

性质 5　行列式一行(列)的公因子可以提出来。即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1-1-13}$$

证　由性质 3 把上式左右两边的行列式分别均按第 k 行展开，且注意到它们第 k 行元素的代数余子式是对应相同的，均为 $A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}$。于是

$$\begin{aligned}左边&=(\lambda a_{k1}A_{k1}+(\lambda a_{k2})A_{k2}+\cdots+(\lambda a_{kn})A_{kn}\\&=\lambda[a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+a_{kn}A_{kn}]\\&=右边。\end{aligned}$$

(证毕)

把式(1-1-13)由右向左看，即表明数与行列式相乘时，其积如何以行列式的形式表达的法则。

性质 6　若行列式的某一行(列)都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证　把上式中的三个行列式均按第 k 行展开，且注意到它们第 k 行元素的代数余子式都是对应相同的。于是有

$$\begin{aligned}\text{左边} &= (a_{k1}+b_{k1})A_{k1}+(a_{k2}+b_{k2})A_{k2}+\cdots+(a_{kn}+b_{kn})A_{kn} \\ &= (a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots a_{kn}A_{kn})+(b_{k1}A_{k1}+b_{k2}A_{k2}+\cdots b_{kn}A_{kn})=\text{右边}\end{aligned}$$

（证毕）

把上式由右向左看，即表明仅有一行(列)元素不同，而其他各行元素都对应相等的两行列式之和，直接以行列式形式表达的法则。

性质 7　用常数 λ 遍乘某一行(列)的各个元素，然后再加到另一行(列)对应的元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & \cdots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证

$$\text{右端}\xlongequal{\text{由性质 6}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 5}} \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{由性质 5}} 0$$

∴　右端 = 左端　　　　　　（证毕）

例 4　计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal[(①,③)]{} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{②+①\cdot(1) \\ ③+①\cdot(-2) \\ ④+①\cdot(-1)}} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(②,③)} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{③+②\cdot(-2) \\ ④+②\cdot(1)}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④+③\cdot(1)} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3)\cdot 3 = -9$$

从本题的计算过程可总结出把数字元素的行列式化为上三角行列式的一般步骤：

先把 a_{11} 变换为 1（本题是通过列交换来实现的，有时也可把第一行乘 $\frac{1}{a_{11}}$ 来实现，但要注意尽量避免元素变为分数，否则将给后面的计算增加困难），然后把第一行分别乘 $(-a_{21})$，$(-a_{31})$，…，$(-a_{n1})$ 并加到第 2，3，…，n 行对应元素上去。这样，就把第一列 a_{11} 以下的元素全化为零。再逐次用类似的方法把主对角线 $a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{n-1\,n-1}$ 以下的元素全化为零，则行列式就化为上三角行列式。

注意：在上述变换过程中，主对角线上元素 $a_{ii}(i=1,\cdots,n-1)$ 不能为零，若出现零，可通过行交换或列交换使得主对角线上元素不为零。

例5　计算

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

解　本行列式中许多元素为分数，如果立即按上述步骤计算，就要进行许多次分数相乘及相加运算，既麻烦又容易出错。所以先利用性质5把各行的公因子提出，把各元素化为整数，然后再通过其他变换，把行列式化为上三角行列式。

$$D=\frac{1}{30}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 10 & -75 & 12 & 45 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(①,④)}-\frac{1}{31500}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ 10 & -75 & 12 & 45 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④+①\cdot(10)]{\substack{②+①\cdot(15)\\③+①\cdot(20)}}-\frac{1}{31500}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -30 & 6 & 120 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$=\!=\!=\!=-\frac{1}{31500}\times 6\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④+②\cdot(-11)]{③+②\cdot(-19)}-\frac{6}{31500}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -15 & -245 \\ 0 & 0 & -9 & -145 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④+③\cdot(-\frac{9}{15})} -\frac{6}{31500}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -15 & 245 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{6}{31500}\times(-1)\times(-5)\times(-15)\times 2$$

$$=\frac{1}{35}$$

上面第一次把第一行与第四行交换的目的是把 a_{11} 变换为 -1，再利用它把第一列的其他元素消为零，以避免出现分数运算。

例 6　试证

$$\begin{vmatrix} a & b & a_1 & b_1 \\ c & d & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

证　一般地，证明都是从较繁的一边开始。本题拟从左边先证。从左边行列式内元素看到它们各不相同，但有两列(行)有两个零元素，故考虑用性质 3 展开(即用定义展开)。

$$左边 = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} d & c_1 & d_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} + c(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= ad(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + (-C)B(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= (ad - cd)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 右边$$

(证毕)

§ 1.2　矩阵的定义和代数运算

一、矩阵的定义

讨论一般的线性方程组问题，将首先遇到线性方程组的表达问题，过去我们习惯于如下的表达方式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

但无论是从数值求解还是理论推演的角度，这种较繁的形式并不是必要的。譬如我们可以省略未知数记号和运算记号，仅以下面的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

足已清晰地表达这一线性方程组。当我们要在计算机上求解这方程组时，就必须是按这种数表方式输入计算机。

其实用数表来表达一些量或关系的办法，在生活和工程技术中是常用的，如市场上的价目表，工厂中的产量统计表等等。现在我们就把这种数表称为矩阵。

定义 1　由 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列，并括以方括弧(或圆括弧)的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵。通常用大写字母记之，如记作 A。为了表明它的行数和列数，可记作 $A_{m\times n}$，有时也可记作

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素。

当 $m=n$ 时，矩阵 A 称为 n 阶矩阵(或 n 阶方阵)；当 $m=1$ 时，矩阵只有一行，即

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \vdots \quad a_{1n}]$$

称为行矩阵；当 $n=1$ 时，矩阵只有一列，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

称为列矩阵。

显然矩阵和行列式是两个完全不同的概念，行列式是一个数值，而矩阵仅是一张数表而已。

二、矩阵的代数运算

当我们用矩阵来表达某些量时，有时客观上需要将两个矩阵联系起来。譬如，某文具车间用矩阵表示三个班组每天生产铅笔与钢笔的数量，矩阵 A 表示第一天的产量