第三章

有界集合與有界函數

致讀者：

爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的説明」

3.1 前言

1 在這一章的前三節裡，我們要討論的是下述的基本概念：

若 S 爲非空有限實數集合，則 S 中恒有最大數．

例如：集合 $\{-5, 0, 3, \pi, 17\}$ 的最大數是 17.

然而，若 S 爲無限實數集合，那麼這類問題就不那麼簡單了.

(A) 也許在 S 中有最大數．例如，閉區間 $[0, 1]$ 的最大數爲 1.

(B_1)也許在 S 中無最大數，但 S 似乎有一最大數。例如，就我們將要證明的開區間 $(0, 1)$ 而論，$(0, 1)$ 中並無最大數．但 1「幾乎」是最大數．

(B_2)也許在 S 中無最大數，而且也沒有可代表與最大數接近的數．例如，集合 $(0, +\infty)$ 中，既無最大數，而且，也不會有一個數，使你認爲它「幾乎」是最大數．

在這個單元中，我們將規定實數集合 S 的最小上界爲．若 S 有最大數，那麼 S 的最小上界，即爲 S 的最大數（如前兩個例題）.若 S 集合沒有最大數，而又「好像」有最大數（如 (B_1) 的例）此最小上界，就是此「好像」最大數的數．

用同樣的方法來規定實數集合的最小值及實數集合的最大下界．

然後，我們討論確保實數集合最小上界及最大下界存在的條件，以及連接集合的最小上界與最大下界的若干定理．

最後，在第四節中，我們把上述概念運用到實函數．

3.2 極大與極小

1 在研討最小上界（和最大下界）的一般概念之前，我們先討論實數集合 S 的最大值（和最小值）的簡單概念。

實數集合的最大值 **（進度 2－28）**

2 若一實數集合 S 的最大值存在，我們的意思是指有一實數 (A) 在 S 中 (B) S的任一元均小於或等於此實數。
因之規定其定義如下：

***3.2.2*定義．** 實數M爲實數集合S的最大數，若且唯若 (A)$M\in S$ 而且 (B)對於每 $x\in S$，均使 $x\leq M$成立。合於上述，則記爲$M=\max S$。

例如：max $\{-7, \pi\ 1, 0\}=$________。因
(A)________$\in\{-7, \pi, 1, 0\}$ 而且 (B)對於每
$x\in\{-7, \pi, 1, 0,\}$ $x\leq$_________。

π
(A) $\pi\in\{-7, \pi, 1, 0\}$ 且 (B) 對每 $x\in\{-7, \pi, 1, 0\}$
合於 $x\leq\pi$

3 因$[-3, 15]=\{x|$________$\}$ 又因 (A)_________ 而且 (B) ________ 故max$[-3, 15]=$_________。

$\{x|-3\leq x\leq 15\}$，(A) $15\in[-3,15]$ (B) 對每 $x\in$
$[-3,15]$ 均使 $x\leq 15$ 成立． 15

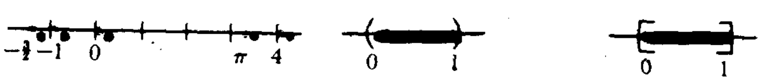
4 (a) 因_____故 $\max[a,b]=$_______________________.
(b) 因_____故 $\max(-\infty,b]=$____________________.
(c) 因_____故 $\max(a,b)\neq b$.
(d) 例如：$0.95\in S$ 且因_______故 $\max[0,1]\neq 0.9$

(a) $b\in[a,b]$ 且每 $x\in[a,b]$ 均使 $x\leq b$．成立 b．
(b) $b\in(-\infty,b]$ 且每 $x\in(-\infty,b]$ 均使 $x\leq b$．成立 b．
(c) $b\notin(a,b)$
(d) $0.95>0.9$

5 在幾何學上，若我們以實數線坐標（其正向相右）上的點，表實數集合 S 的元，又若 S 的最大值存在，則在此坐標線上表實數集合 S 最_____端的點，為 S 的最大值．

右

例：$S_1=\{-1,4,\pi,-\frac{3}{2}\}$，$S_2=(0,1)$，$S_3=[0,1]$



$\max S_1=$_____，$\max S_2=$_________，$\max S_3=$_____.

4 不存在（註 $1\notin(0,1)$） 1

6 附註：
(i) 若有實數 M，合於 $M=\max S$，則稱 S 有最大值．

(ii) 若S有最大值，則其值爲唯一。若$M_1 = \max S$，及$M_2 = \max S$，那末$M_1 \in S$，$M_1 \leq M_2$，又$M_2 \in S$，故$M_2 \leq M_1$，所以$M_1 = M_2$，於是我們可斷言S的最大值唯一。

(iii) 對於任一實數N而言，因$N \notin \varnothing$，故空集合沒有最大值。

(iv) 由數學歸納法很容易證明，任一非空有限實數集合均有最大值，讀者試自行證明本定理。其證明見進度7.

7 任一非空有限實數集合，皆有最大值。

證：（用數學歸納法）：令S爲所有正整數n的集合，對任一含n個實數的集合，有最大值。

(1) $1 \in S$。因令T_1爲恰有一個元素的任一實數集合，設此元爲x，得$T_1 = \{x\}$。因$x \in T_1$，對每$x \in T_1$。均合$x \leq x$，故$\max T_1 = x$。

(2) 設$k \in S$，令T_{k+1}爲恰含$(k+1)$個元的任一實數集合，則$T_{k+1} = \{x_i \mid i = 1, 2, \cdots, k+1\}$，令$T_k = \{x_i \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$於是$T_{k+1} = T_k \cup \{x_{k+1}\}$。因$T_k$爲含$k$個實數的集合，由假設知$k \in S$並令$\max T_k = m$，由(1) $\max \{x_{k+1}\} = x_{k+1}$ 則 (A) $x_{k+1} < m$，(B) $x_{k+1} = m$，(C) $x_{k+1} > m$三者必僅有一成立。

由(A)及(B)對$i = 1, 2, \cdots, k+1$則$x_i \leq m$，皆成立，因此$\max T_{k+1} = m$。

由(C) $m < x_{k+1}$ 對$i = 1, 2, \cdots, k$皆成立，故每$i = 1, 2, \cdots, k+1$，$x_i \leq x_{k+1}$皆成立，即$\max T_{k+1} = x_{k+1}$ 因之若$k \in S$則$k+1 \in S$

由(1)及(2)我們得到S爲正整數的集合。故任一非空有限實數集合，皆有最大值。

8 一實數N不是實數集合S之最大值，若且唯若，定義 *3.2.2 * 之二條件(A)及(B)均不成立。即此兩條件不皆爲眞，因此，N不是$\max S$，若且唯若(A′)__________或(B′)有一$x \in S$使__________成立。

(A′) $N \notin S$ 或 (B′) 有一 $x \in S$，使 $x > N$ 成立

合於上述，我們則記 $N \neq \max S$。

例如：(a)因__________故 $\max(0,1) \neq 1$.

(b)因__________故 $\max(0,1) \neq 0.999$

(a) $1 \notin (0,1)$

(b) $0.9995 \in (0,1)$ 且 $0.9995 > 0.999$（你可以任一大於 0.999 且小於 1 之實數代 0.9995）

8 形如 $(-\infty, b)$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, +\infty)$ 的區間，顯然沒有最大值。於下述進度中，我們就證明此推論是正確的。無論我們目的爲何，當先了解。

(a) $(0,1) = \{x \mid \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

(b) 因__________，故 $\max(0,1) \neq 1$。

(a) $\{x \mid 0 < x < 1\}$

(b) $1 \notin (0,1)$

對 $\max(0,1)$ 唯一可以選擇的適當實數，爲接近於 1，而永小於 1。因 $0.995 \in (0,1)$ 而且 $0.99 < 0.995$，所以 $0.99 \neq \max(0,1)$

(c) 由於__________，故 $0.999 \neq \max(0,1)$

(d) 由於__________，故 $0.9999 \neq \max(0,1)$

我們永不能由上述的步驟逐一的消去那些可爲最大數的數。因此，我們要證明，對一切的實數 $c \in (0,1)$，皆使 $c \neq \max(0,1)$ 成立。換言之，無一數 $c \in (0,1)$，使 $c = \max(0,1)$。

(c) $0.9995 \in (0,1)$，且 $0.9995 > 0.999$（或任一滿足 $0.999 < x < 1$ 的 x）。

(d) $0.9995 \in (0,1)$，且 $0.99995 > 0.9999$（或任一滿足 $0.9999 < x < 1$ 的 x）。

10 在前面所講的進度中，我們已經證明了，所有大於（0,1）間的任一數而小於1的某實數（即在任一數與1間的實數）均不爲（0,1）的最大數。

在下面的各進度中常常要用：

若有二實數，令爲 a 及 b，且 $a<b$，那麼，有一實數 x 合於 $a<x<b$，(即 x 在 a 與 b 之間)選擇 x 之最簡便的方法是取 a 及 b 的算術平均數。（即 $\frac{1}{2}(a+b)$）爲了便於以後各進度的應用，我們因此要證明：

若 a 及 b 爲二實數，且 $a<b$，則 $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$。

證：

(1) 若 $a<b$，則 $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$。

(2) 在(1)的第二不等式的兩端同加 $\frac{a}{2}$，我們就得

______________。

(3) 在(1)之第二不等式之兩端同加 $\frac{b}{2}$，我們就得

______________。

(4) 由(2)及(3)我們得 $a<$ __________ 及 __________ $<b$，所以 $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$，成立。

(2) $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{b}{2}+\frac{a}{2}$。

(3) $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{b}{2}+\frac{b}{2}$.

(4) $a<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$，$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<b$

11 這一個進度，是要求讀者自已完成下面的證明。
在解答欄中，已經給了讀者該證明各步驟的提示及答案，讀者於回答問題時，可逐條與解答欄核對。（本章自第二進度開始，就有相同形式的解答欄。）

現在我們來證明，沒有一實數能爲 (0, 1) 的最大數。爲了證明本進度，需要用進度10之結果。

證：

(1) 設$\max(0,1)=c$，則 (A)__________ 及 (B)__________。

(2) 因$c\in$__________則________$<c<$________。

(3) 由進度10的結果，很容易在 (0,1)間找到一大於c的實數，且與____________衝突。
((A)，(B))

(4) ________$<\frac{1}{2}(c+1)<$________

(5) 又因$0<c$，故________$<\frac{1}{2}(c+1)<$________

(6) 因此$\frac{1}{2}(c+1)\in$________ 及$\frac{1}{2}(c+1)>$________。

(7) 與____________衝突，故$\max(0,1)$不存在。
((A)，(B))

對(1)之提示，由最大值的定義

(1) (A) $c\in(0,1)$，及 (B) 對所有$x\in(0,1)$合於$x\leq c$。

對(2)之提示，由步驟 (1)，$c\in(0,1)$，再用開區間定義。

(2) $(0,1)$，$0 < c < 1$.

(3) (B)（或對所有 $x \in (0,1)$，合於 $x \leq c$。）

對(4)之提示。若 $a < b$，則 $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$，$c < 1$，故

______ $< \frac{1}{2}(c+1) <$ ______.

(4) $c < \frac{1}{2}(c+1) < 1$.

對(5)之提示。由(4)，$c < \frac{1}{2}(c+1) < 1$. 且 $0 < c$，因此

$0 <$ ______ $< \frac{1}{2}(c+1) <$ ______.

(5) $0 < \frac{1}{2}(c+1) < 1$.

對(6)之提示。由(5) $0 < \frac{1}{2}(c+1) < 1$，因之 $\frac{1}{2}(c+1) \in$

______。由 (4) $\frac{1}{2}(c+1) >$ ______.

(6) $\frac{1}{2}(c+1) \in (0,1)$，且 $\frac{1}{2}(c+1) > c$。

(7) (B)（或對所有 $x \in (0,1)$，皆使得 $x \leq c$ 成立）

12 同理證明對於任一開區間 (a, b)，(記着 $a < b$)，$\max(a, b)$ 不存在。（提示：參考進度 11 之證明）

(1) 若 $\max(a, b) = c$，那麼，(A) $c \in (a, b)$ 及 (B) 對所有 $x \in (a, b)$，皆使 $x \leq c$ 成立。

(2) $c \in (a, b)$，則 $a < c < b$。

(3) 因 $c < \frac{1}{2}(c+b) < b$.

(4) 又因 $a<c$，$a<c<\frac{1}{2}(c+b)<b$.

(5) 由 $\frac{1}{2}(c+b)\in(a,b)$，及 $\frac{1}{2}(c+b)>c$。

(6) 與上述的 (B) 相衝突。

倘若你已經了解了本題的證明，於仔細的讀完進度13後，並可略去其餘的進度，而逕讀進度15.

13 形如 $[a,b)$，$(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，及 $(-\infty,+\infty)$ 諸區間沒有最大值。

(a) 證：$\max[a,b)$ 不存在。

證明如下：

(1) 若 $\max[a,b)=c$，則 $c\in[a,b)$，及所有 $x\in[a,b)$，皆合於 $x\leq c$。

(2) $c\in[a,b)\Rightarrow a\leq c<b$。

(3) 由進度10知 $a\leq c<\frac{1}{2}(b+c)<b$。

(4) 故 $\frac{1}{2}(c+b)\in[a,b)$ 及 $\frac{1}{2}(c+b)>c$，與上述之(B)衝突。

∴ $[a,b)$ 沒有最大數。

若你已經了解了本定理的證明，請即略去進度 14 逕讀進度 15.

(b) 證：$\max(-\infty,b)$ 不存在.

本題的證明與上述 $[a,b)$ 的證法（除 a 換為 $-\infty$ 外）完全相同。

14 我們在證明進度11, 12, 13時，應用了進度10的結果，而找到一大於 c 的實數。但是相同的方法，並不能用來證明區間 $(a,+\infty)$ 沒有最大數。我們只要給予一數 $c\in(a,+\infty)$，在 $(a,+\infty)$ 就有一大於 c 的數。即 c 加任一正數。(令爲 $c+1$) 的數。

(a) 證明 $\max(a,+\infty)$ 不存在。

證明如下：

(1) 若 $\max(a,+\infty)=c$，則 (A) $c\in(a,+\infty)$ 及 (B) 對所有 $x\in(a,+\infty)$ 均使 $x\leq c$ 成立。

(2) $c\in(a,+\infty)\Rightarrow c>a$。

(3) 因 $c+1>c>a$，故 $c+1>a$。

(4) 又因 $c+1\in(a,+\infty)$ 及 $c+1>c$，與上述 (B)相衝突。

$\therefore (a,+\infty)$ 沒有最大數。

若你已能證明本進度，請繼續讀進度 15.

(b) 證明 $\max(-\infty,+\infty)$ 不存在。

其證明與(a)之證明除 a 換爲 $-\infty$ 外，餘皆相同。

15 在數學上有許多這樣的實例，是給我們一個命題（或陳述）後，而又要我們對它加以證明。但這些命題原先也許是基於實驗，觀察，直覺，累積的經驗，例證，類比等的推想或猜測。但此推想絕非荒唐的胡思亂想。前述的推測在數學上甚爲重要。假若可能，對於這些預測的結論都必須用命題予以驗證。（或證明此命題爲錯誤）否則它仍爲一個推想或猜測。

16 令 $S=\left\{2+\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\text{ 爲正整數}\right\}$。

例如：

(a) 對於 $n = 1$, 則 ______ $\in S$.
(b) 對於 $n = 2$, 則 ______ $\in S$.
(c) 對於 $n = 3$, 則 ______ $\in S$.
(d) 對於 $n = 10$, 則 ______ $\in S$.

(a) 3 (b) $2\frac{1}{2}$ (c) $2\frac{1}{3}$ (d) $2\frac{1}{10}$

若 $x \in S$。則有一正整數 n_1，使 $x =$ ______。

$$x = 2 + \frac{1}{n_1}$$

若 S 有最大值，猜猜看此值爲何？

不管你的答案是何值，那確實是你的猜測，對本題的答案，大多數讀者會答 3。是的，我們就來證明你的猜測爲正確。

17 令 $S = \left\{ 2 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \text{ 爲正整數} \right\}$，在上進度中，希望你的推想爲 $\max S = 3$. 爲了證明 $\max S = 3$ 先要證：
(A) ______ 及 (B) ______。

(A) $3 \in S$ 及 (B) 對所有 $x \in S$，皆使 $x \leq 3$ 成立。

18* （*的意思是讀者可以用解答欄之答案，逐一核對，以完成本進度證明的各步驟。）

若 $S = \left\{ 2 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \text{ 爲正整數} \right\}$。我們證明了 $3 = \max S$。試試看能不能自已完成此一證明。倘若不能，祇要順次參考答案每一步驟前的提示。

(1) 因 $n = 1$, $2+\frac{1}{n}=$ ________ 故 ________ $\in S$.

(2) 設 $x \in S$，則對某一正整數 n_1，使 $x =$ ________。(下述每步驟，填入適當之符號，$\leq$或$\geq$)

(3) 因 n_1 爲正整數，n_1 ________ 1, 故 $\frac{1}{n_1}$ ________ 1.

(4) $2+\frac{1}{n_1}$ ________ $2+1$, 故 $x = 2+\frac{1}{n_1}$ ________ 3.

(5) 因此，對所有 $x \in S$，均使 x ________ 3 成立。
由(1)至(5)得 $3 \in S$，及所有 x ____ S，均合于 x ________ 3，故 $3 = \max S$。

(1) 之提示，因 $n = 1$.

$$2+\frac{1}{n}=2+\frac{1}{1}= \_\_\_\_\_,\quad S=\left\{2+\frac{1}{n}\,\middle|\, n \text{ 爲正整數}\right\}.$$

(1) 3, $\quad 3 \in S$

(2) 之提示，$x \in S = \left\{2+\frac{1}{n}\,\middle|\, n \text{ 爲正整數}\right\}$.
就某一正整數 n_1 而論，x 必爲 ________。

(2) $2+\frac{1}{n_1}$

(3) 之提示，$0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

(3) $n_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n_1} \leq 1$

(4) 之提示，$x \leq y \Rightarrow a + x \leq a + y$.

(4) $2+\frac{1}{n_1} \leq 2+1 \qquad \leq$

(5) 之提示，由 (4) $2+\frac{1}{n_1}\leq 3$ 及 $x=2+\frac{1}{n_1}$

(5) 對所有 $x\in S$，均使 $x\leq 3$ 成立。
∴對所有 $x\in S$，均使 $x\leq 3$ 成立。

19 令 $S=\left\{\frac{1}{n^2+1}\middle| n \text{ 爲正整數}\right\}$，決定 S 的某些元素，並推測 S 是否有最大數？假若有？它是什麽數？

多數讀者選答是，且答爲 $\frac{1}{2}$。因當 $n=1, 2, 3, 4$ 分別爲 $\frac{1}{2}\in S$，$\frac{1}{5}\in S$，$\frac{1}{10}\in S$，$\frac{1}{17}\in S$。當 n 增大時，其分數則減少。但是數學命題之眞僞與是否，並不接受表決。下面的進度就是它的證明。

20 令 $S=\left\{\frac{1}{n^2+1}\middle| n \text{ 爲正整數}\right\}$。證明 $\max S=\frac{1}{2}$。即必須證 (A)__________ 及 (B)__________。

(A) $\frac{1}{2}\in S$ 及 (B) 對所有 $x\in S$，均使 $x\leq\frac{1}{2}$ 成立。

證：(A) $\frac{1}{2}\in S$

因當 $n=1$ 時，$\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}\in S$。

證 (B) 若 $x\in S$，則 $x\leq\frac{1}{2}$。

提示：若 $x \in S$，則有一正整數 n_1，使 $x = \dfrac{1}{n_1^2+1}$ 成立。

對於正整數 n_1，祇要證明 $\dfrac{1}{n_1^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$。

若 $x \in S$，則 $x = \dfrac{1}{n_1^2+1}$。此處 n_1 爲正整數。

n_1 爲正整數 $\Rightarrow n_1 \geq 1 \Rightarrow n_1^2 \geq 1 \Rightarrow n_1^2+1 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{n_1^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$。

所以，對所有 $x \in S$，均使 $x = \dfrac{1}{n_1^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ 成立。

已證明 $\frac{1}{2} \in S$，且對所有 $x \in S$，均使 $x \leq \frac{1}{2}$ 成立，故 $\max S =$ ______。

$\dfrac{1}{2}$

21 討論集合 $S = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \text{ 爲正整數} \right\}$。

令 $n = 1,\ n = 2,\ n = 3$ 等，求 S 的若干個元素，並推斷 S 是不是有最大值？若有？其值爲何？

多數讀者選答「不是」，下一進度就要證明 S 是沒有最大值。因 $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$. 以 $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}$ 爲元。當 n 增大時，S 的值亦增大。（此非證明。）

22* （你可以用回答欄逐一核對）我們現在的目的，是在證明集合 $S = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \text{ 爲正整數} \right\}$ 沒有最大數。用矛盾證法證明此題。

證：

(1)若$N=\max S$。則 (A)________及 (B)__________。

(2)若$N\in S$，對於某n_1，$N=$____________。我們在S中，可以找到一個大於N的元如下：

(3) 因n_1爲正整數。n_1+1是______故$1-\dfrac{1}{n_1+1}\in$______。

(4) 又因 n_1+1 ______ n_1

(5) $\dfrac{1}{n_1+1}$ ______ $\dfrac{1}{n_1}$

(6) $-\dfrac{1}{n_1+1}$ ______ $-\dfrac{1}{n_1}$

(7) $1-\dfrac{1}{n_1+1}$ ______ $1-\dfrac{1}{n_1}=N$

(8) 因之由(3)及(7)，$1-\dfrac{1}{n_1+1}\in$________及

$1-\dfrac{1}{n_1+1}$ ______ N。

(9) 與________相衝突。

因由，假設有一實數N，使$N=\max\left\{1-\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\text{ 爲正整數}\right\}$，而導致衝突，故$\left\{1-\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\text{ 爲正整數}\right\}$沒有最大值。

(1) 的提示，最大值的定義。

(1) (A) $N\in S$，及 (B) 任一$x\in S$，使x [illegible] N成立。

(2) 的提示，$S=\left\{1-\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\text{ 爲正整數}\right\}$。

因$N\in S$。對於某正整數n_1，使N之形爲$1-\dfrac{1}{n_1}$