

典型群

华罗庚 万哲先 著

上海科学技术出版社

51.45
235

典 型 群

华罗庚 萬哲先 著

上海科学技术出版社



內 容 提 要

本书是典型群方面作者历年来工作的系統总结性論著,也包含了作者在体論和矩陣几何方面的工作。书中不仅列举了作者在这一領域中所获得的丰富而完整的結果,也充分体现了作者所創用的方法和技巧的特点。

全书共分十二章,前六章由第一作者执笔,初稿完成于1951年,后六章由第二作者根据他所体会的前六章的精神和方法續写。书末附有一些注釋。

典 型 群

华罗庚 萬哲先 著

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海新华印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/23 印張 23 5/23 插頁 4 排版字数 462,000

1963年7月第1版 1963年7月第1次印刷

印數 1—3,860 (其中胶版紙本60册)

統一書号 13119·516 定价(十四) 3.75 元

序

2k611/21

早在1949年，本书作者之一就有了写这样一本书的轮廓，希望根据这个轮廓组织一个讨论班，和一批大学四年级及刚毕业的同学在一起，使他们边学习边搞研究，集体地较整套地来进行这一领域的研究工作，一来可以使他们在工作过程中逐步地扩充自己的知识领域，另一方面可以让他们习作一些研究，预计在计划完成之后，可以给典型群论，射影几何学，矩阵论及群表示论等数学分支以一个不同的面貌。1950年初，当他在北京清华大学执教时，组织了这样一个讨论班。讨论班进行到1951年暑假，在讨论班里他完成了本书前六章的初稿。接着，在1951年下半年和1957年上半年，他又在中国科学院数学研究所代数讨论班里两度报告了本书前六章的大部分章节，并进行了一些修改。随后，从1959年下半年起，本书后一作者又在数学研究所代数讨论班里报告了前六章的部分章节，并根据他所体会的前六章的精神与方法续写了本书的后六章。这就是本书简单的写作经过。

简要地可以这样说，体上的矩阵是一个值得注意的对象，因为它是一个不太失去普遍性的抽象事物，但同时又和成果丰富的具体的域上的矩阵论距离不远。当然，结合环，李环和柔丹环中有趣的部分又都有矩阵形式，而线性群，正交群，辛群，罗伦兹群也都是矩阵群；几何学中线几何，圆几何，格拉斯曼几何都有矩阵的表示法。更加多复变函数论的典型域也离不开矩阵的表达形式。这些形成了我们的工作背景。

仅仅找到一个值得研究的对象,而没有处理的方法那也还是空話. 本书中提供了一些方法,这些方法是初步的,犹待改进,补充和发展,只有在发展过程中才能把方法搞得更完备.

1950年本书作者之一选择这个主题的原因之一是为了易于訓練干部. 預备知識需要得少,可以从简单处着手,从具体处着手;发展前途不太小,通过这一系列的研究也可以熟悉代数学,几何学中不少分支,可以从寬广处着眼,从抽象处着眼. 换言之,开始时不受基础的限制,終了时不致偏促于太仄狹的領域之中.

匆匆已經十年,这計劃还只能說在第一阶段中完成了第一部分而已. 更重要的工作还有待于今后的努力. 这决不是一个完整的东西,而仅仅是一个开始. 这是一个阶梯中的一級,讀者必須想想前面几級——实数域,复数域,有限域及四元数体上的情况,讀者更必須看看后面几級——体上矩陣的环和群的构造,不用連續性的群表示論等等,这样才不致于为本书引入歧途. 长期局限于本书範圍内的工作将不是作者的本意,但我們认为搞清这些对象和方法对学好典型群論,射影几何学等都能有所帮助.

我們感謝王仰賢,应玫茜,徐誠浩等同志,在本书付印之前,他們分头閱讀了本书手稿的各部分,进行了核算,并提出了一系列宝贵的修改意見.

华罗庚 萬哲先

1962年8月于北京

目 录

序

第一章 体論	1
§ 1 环与体	1
§ 2 特征数及素域, 由环建体	4
§ 3 多项式环	8
§ 4 同态	10
§ 5 素域与实数域的同构	13
§ 6 线性相关与有限域	15
§ 7 代数相关与复数域的同构	20
§ 8 超越扩张的同构	24
§ 9 四元数体	25
§ 10 广义四元数体	28
§ 11 体的性质	33
第二章 一维射影几何及二级线性群	41
§ 1 射影空间及群	41
§ 2 调和点列和一维射影几何的基本定理	46
§ 3 射影对合	49
§ 4 体上的二级线性群	56
§ 5 $PSL_2(K)$ 的单性	64
§ 6 $SL_2(K)$ 的同构	69
§ 7 $GL_2(K)$ 的同构	76
§ 8 $SL_{\frac{1}{2}}(K)$ 的同构	80
§ 9 $PSL_2(K)$, $PGL_2(K)$ 及 $PSL_{\frac{1}{2}}(K)$ 的同构	81
第三章 向量空间, 矩阵和行列式	87
§ 1 矩阵的代数	87

4 目 录

§ 2 向量空間	91
§ 3 子空間的交和联	95
§ 4 子空間的矩陣表示, 矩陣的行秩	98
§ 5 基变换, 綫性映射, 矩陣的等价	100
§ 6 列空間及矩陣的秩	104
§ 7 齐次綫性方程組	107
§ 8 $GL_n(K)$ 的换位子群	108
§ 9 行列式	110
第四章 射影几何与仿射几何	119
§ 1 几何結構	119
§ 2 射影空間	122
§ 3 $P_n^1(K)$ 中点的綫性相关性	124
§ 4 綫性子空間	127
§ 5 关于射影几何的公理化处理	131
§ 6 綫性子空間的方程及对偶原理	133
§ 7 标准单纯形	137
§ 8 仿射空間	139
§ 9 仿射几何的基本定理	140
§ 10 射影几何的基本定理	146
§ 11 有限几何	148
第五章 长方陣几何学	151
§ 1 长方陣几何学	151
§ 2 方陣几何学	155
§ 3 算术距离	158
§ 4 长方陣仿射空間中秩为 1 的极大集	160
§ 5 两个秩为 1 的极大集的交集	164
§ 6 长方陣仿射空間中秩为 2 的极大集	167
§ 7 长方陣仿射几何的基本定理	174
§ 8 长方陣射影几何的基本定理	181
第六章 綫性群的构造及自同构	183
§ 1 复习	183
§ 2 在 $SL_n(K)$ 之下矩陣的相似	184
§ 3 $PSL_n(K)$ 的単性	189
§ 4 对合	193

§ 5	$SL_n(K)$, $SL_n^\pm(K)$ 和 $GL_n(K)$ 的同构 (特征数 $\neq 2$)	196
§ 6	射影对合 (特征数 $\neq 2$)	211
§ 7	$PGL_n(K)$, $PSL_n^\pm(K)$ 和 $PSL_n(K)$ 的同构 (特征数 $\neq 2$)	220
§ 8	对合 (特征数 $= 2$)	225
§ 9	$SL_n(K)$, $GL_n(K)$, $PSL_n(K)$ 和 $PGL_n(K)$ 的同构 (特征数 $= 2$)	233
第七章	H-矩阵及酉群	245
§ 1	自反矩阵及 H -矩阵	245
§ 2	H -矩阵在合同下的化简	251
§ 3	H -矩阵在合同下的化简 (续)	257
§ 4	H -矩阵在合同下的化简 (续) —— Witt 定理	264
§ 5	迷向子空间	269
§ 6	酉群	277
§ 7	当 $\nu = \frac{n}{2}$ 时酉矩阵的形式	282
§ 8	当 $0 < \nu < \frac{n}{2}$ 时酉矩阵的形式	286
§ 9	酉平延及拟对称	290
§ 10	酉群的中心及射影酉群	294
§ 11	有限域上的酉群	298
第八章	酉群的构造 ($\nu \geq 1$ 而正交群除外)	302
§ 1	引言	302
§ 2	$TU_n(K, H)$ 的中心	305
§ 3	$PTU_2(K, H)$ 的单性 ($\nu = 1$)	313
§ 4	$PTU_n(K, H)$ 的单性 ($\nu \geq 1$)	319
§ 5	群 $U'_n(K, H)$ ($n = 2\nu$)	331
§ 6	$U_n(K, H)$ 的换位子群 ($n = 2\nu$)	344
第九章	正交群的构造	353
§ 1	复习	353
§ 2	由 2 平延所演成的群	359
§ 3	由双曲旋转的平方所演成的群	366
§ 4	$O_n^+(F, S)/Q_n(F, S)$ 的构造 ($n = 2\nu$)	368
§ 5	$O_n^+(F, S)/Q_n(F, S)$ 的构造 ($n > 2\nu$)	374
§ 6	$PQ_n(F, S)$ 是单群的证明	376
§ 7	$PQ_n(F, S)$ 是单群的证明 (续)	385
第十章	特征数为 2 的域上的二次型和无亏数的正交群	397

§ 1 二次型的合同及 Witt 定理的推广	397
§ 2 奇异子空间 正则二次型的指数	406
§ 3 正交群	408
§ 4 $O_n(F, G)$ 中元素的形式	411
§ 5 正交平延	413
§ 6 由 2 平延所演成的群(与第九章 § 2 相比)	423
§ 7 由双曲旋转所演成的群(与第九章 § 3 相比)	425
§ 8 $O_n(F, G)$ 的构造 ($v \geq 1$)	426
第十一章 特征数为 2 的域上有亏数的正交群	428
§ 1 群 $O_n(F, G)$ 的一些初步性质	428
§ 2 半奇异向量	430
§ 3 $O_n(F, G)$ 中元素的形式	434
§ 4 正交平延	436
§ 5 由半奇异平延所演成的群	441
§ 6 $\Omega_n(F, G)$ 的单性	447
第十二章 辛群的同构	452
§ 1 以往结果提要	452
§ 2 辛对合 (特征数 $\neq 2$)	453
§ 3 $Sp_{2v}(K)$ 的同构 (K 的特征数 $\neq 2$)	458
§ 4 射影辛对合	466
§ 5 射影辛对合的中心化子和 $PSp_{2v}(K)$ 的同构 (K 的特征数 $\neq 2$)	471
§ 6 辛对合 (特征数 $= 2$)	474
§ 7 由一对称矩阵所定义的群 (K 的特征数 $= 2$)	481
§ 8 辛对合的中心化子 (特征数 $= 2$)	488
§ 9 1 对合的刻画 (特征数 $= 2$)	493
§ 10 $Sp_{2m}(K)$ 的同构 (K 的特征数 $= 2$)	500
附记	518
索引	523

第一章

体 論

§1 环 与 体

为了使本书尽可能地自給自足，我們先叙述一下环和体的基本性质，并且提供若干例子，通过这些例子来说明某些概念的具体涵义。

定义1 环 R 乃具有两种运算“+”及“ $\times$ ”的集合，即若 a, b 在 R 中，则 $a+b$ 及 $a \times b$ 也是 R 中唯一定义的元素；这两个运算有次之性质：

I. 对加运算“+”， R 成一交換群（或称为 Abel 群），即对 R 中的任意三元素 a, b, c 有次之关系：(i) $a+b=b+a$ ；(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ；(iii) R 有一元素 0 ，称为零元素，使对所有的 a ，常有 $0+a=a$ ，及 (iv) 对 R 中任意元素 a ， R 中一定有一个元素 b ，使得 $a+b=0$ ；

II. 对乘运算“ $\times$ ”，适合結合律，即对 R 中的任意三元素 a, b, c ，常有

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)；$$

III. 加乘之間适合分配律，即对 R 中的任意三元素 a, b, c ，常有

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c，$$

$$(b+c) \times a = b \times a + c \times a。$$

以后为方便計，将“ $\times$ ”号略去。通常习見的名詞“和”，“差”，“积”

等名詞,其义自明,不再定义。

〔例 1〕 所有的整数成一环;所有的偶数也成一环。

〔例 2〕 命 m 表一正整数,以 m 为模所得的同余类成一环。且看一个具体情形。命 $m=6$,任一整数可以唯一地归入下面六类之一:

$$\{0+6k\}, \{1+6k\}, \{2+6k\}, \{3+6k\}, \{4+6k\}, \{5+6k\}.$$

分别以 $\Gamma_0, \dots, \Gamma_5$ 表示上述的类。两类的加法定义为

$$\Gamma_i + \Gamma_j = \Gamma_k, \text{ 若 } i+j \equiv k \pmod{6},$$

而 Γ_0 为加法群中的零元素;乘法定义为

$$\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_k, \text{ 若 } ij \equiv k \pmod{6}.$$

显然,这样定义出一个环。

〔例 3〕 所有带有理系数的单变数多项式成一环。

〔例 4〕 以一多项式为模,分上例中所述的多项式为同余类,这些类也成一环。

〔例 5〕 形如 $a+bi$ ($i=\sqrt{-1}$) 的数,其中 a, b 为整数,也成一环。

〔例 6〕 所有在区间 (a, b) 内的连续函数成一环。

〔例 7〕 复变数函数論中所討論的全体整函数也成一环。

环 R 中的零元素 0 还有次之性质: 由

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a$$

可知

$$0a = 0.$$

同样,可知 $a0=0$ 。即 0 左乘或右乘任一元素恒为 0 。但从 $ab=0$ 并不能断定 a, b 中至少有一为 0 ; 例如,在例 2 中, $\Gamma_2 \Gamma_3 = \Gamma_0$, 但是 $\Gamma_2 \neq \Gamma_0$, $\Gamma_3 \neq \Gamma_0$ 。因而我們定义: 环中如有二元素 $a \neq 0, b \neq 0$ 而 $ab=0$, 則称 a 为左零因子, b 为右零因子。

显然,如果环中无左零因子,当然也无右零因子。这样的环謂之无零因子的环。

如果环 R 的一个子集合 S 对 R 的两个运算也成一环,那末, S 称为环 R 的子环。例 1 即說明子环是存在的。

定义 2 环 R 若再满足下面的条件則称为体:

II'. R 中除 0 外, 其他的元素对乘法成一群, 即有一元素 1, 称为么元素, 使 $1 \cdot a = a$, 而且对 R 中任意元素 $a \neq 0$, 有一元素 b 存在, 使 $b \cdot a = 1$.

若体中乘法满足交换律, 即 $ab = ba$, 则体称为域.

[例 1] 命 p 为一素数, 以 p 为模所得的同余类成一域.

[例 2] 所有的有理数成一域.

[例 3] 所有的形如 $a + bi$ 的数也成一域, 此处 a, b 过所有的实数.

[例 4] 所有的有理函数成一域.

[例 5] 所有的半纯函数也成一域.

以上列举的全是域的例子. 现在问: 是否有非域之体?

[例 6] 命 F 表一实域, 就是具有下述性质的域: 如果若干个元素的平方的和等于 0, 则这些元素全是 0. 命 i, j, k 为三元素, 与 F 中的元素皆可交换, 且具有以下诸性质:

$$(1) \quad \begin{aligned} ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1. \end{aligned}$$

我们考虑全体形如

$$a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in F)$$

的元素. 这种元素称为四元数, 以 Q 表所有的四元数所成的集合, 其中的加法定义为

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) + (b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k, \end{aligned}$$

其乘法由 (1) 式及分配律予以确定. 读者试自验证, Q 是一体, 称为四元数体.

易见, 在 Q 中与任一元素皆可交换的元素所成的集合, 就是 F . 这一性质引出以下概念:

一体 R 中的元素 a , 若对所有的 $x \in R$ 常满足

$$ax = xa,$$

则 a 称为 R 的中心元素. 全体中心元素所成的集合, 称为 R 的中心. 显然中心成一域.

一体的子集,如果对体的原有的两种运算仍成一体,这子集称为原体的子体,而称原体为子体的扩体. 例 6 中的 F 是 Q 的子体.

[例 7] 命 F 为一域,系数在 F 中所有的 x 的多项式成一环,以 $F[x]$ 記之. 設 $f(x)$ 为系数在 F 中的不可分解的多项式. 以 $f(x)$ 为模,分多项式为若干类,如此諸类成一域,証明如下:

对任一 $g(x)$, 如非 $f(x)$ 的倍数,由輾轉相除法可得二多项式 $a(x)$ 与 $b(x)$, 使

$$a(x)g(x) + b(x)f(x) = 1,$$

此处 $a(x)$, $b(x)$ 的系数也在 F 中. 由此立得

$$a(x)g(x) \equiv 1 \pmod{f(x)}.$$

即 $g(x)$ 所代表的同余类以 $a(x)$ 所代表的同余类为其逆. 显然可見,此域以 F 为其子域.

假定 α 是方程式 $f(x) = 0$ 的根,且 α 与 F 中的元素都可交换,則形如

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \quad (a_0, \cdots, a_{n-1} \in F)$$

之元素成一域,此处 n 为多项式 $f(x)$ 的次数. 只須重复上面的討論就可以証明这一性质. 如此所得的域称为 F 的单代数扩域,且以符号 $F(\alpha)$ 記之.

§ 2 特征数及素域,由环建体

設 R 为一无零因子的环. 对 R 中某一元素 $a \neq 0$, 若有最小正整数 p 存在,使 $pa = 0$, 即

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ 个}} = 0,$$

則 p 称为此环的特征数. 若不存在这样的 p , 則称此环为特征数为零的环,或記之以 $p = 0$. 特征数 p 有下述的性质:

- I. p 与 a 的选择无关;
- II. p 为素数.

事实上,設 $a \neq 0$, $b \neq 0$ ($a, b \in R$), 則由

$$(pa)b = a(pb)$$

可知由 $pa=0$ 推出 $pb=0$. 反之, 由 $pb=0$ 推得 $pa=0$, 故得 I.

又若 p 不是素数而 $p=p_1p_2$ ($p_1>1, p_2>1$), 则 $pa=p_1(p_2a)=0$, 若 $p_2a=0$, 此与 p 的假设不合; 若 $p_2a\neq 0$, 此与 I 相矛盾, 故得 II.

命 R 为有 ∞ 元素的环, Σ 为 R 中包含 ∞ 元素的最小子环. 若 R 为零因子环而且 R 之特征数是 p , 则 Σ 就是: $0, 1, \dots, p-1$ 所构成的集合. 若 R 之特征数为 0 , 则 Σ 就是所有的整数.

命 F 为一带, 若 F 的特征数是 p , 则 F 的最小子体就是由 $0, 1, \dots, p-1$ 这些元素所构成的域. 若特征数是 0 , 则 F 的最小子体就是由全体有理数所组成的域. 这最小子体称为体 F 的素域.

定义 1 在一环中, 如 $a=bc$, 则 b 称为 a 的左因子, c 称为 a 的右因子; a 称为 b 的右倍数, c 的左倍数. 若有一元 m 具有性质

$$m=aa_1=bb_1,$$

则 m 称为 a 及 b 的右公倍数. 显然可以类似地定义任意多个元素的右公倍数.

本节之目的在于: 从零因子而任二元素有右公倍数的环出发, 仿照由整数建立有理数的方法, 来建立体.

为了这个目的, 我们将下面的集合分类:

$$\{(a, b); a, b \in R, b \neq 0\}.$$

设有 $(a, b), (c, d)$. 若对于 d, b 的某一右公倍数 $m=bb_1=dd_1$, $ab_1=cd_1$ 成立, 则称 (a, b) 与 (c, d) 属于同类, 以 $(a, b) \sim (c, d)$ 表之.

首先证明, 此定义与 m 的选择无关. 即若 m' 为另一右公倍数, $m'=bb'_1=dd'_1$, 则我们仍有 $ab'_1=cd'_1$. 事实上, 由假定, m 与 m' 有一右公倍数 $M=m\alpha=m'\beta$, 则有 $b_1\alpha=b'_1\beta$ 及 $d_1\alpha=d'_1\beta$. 再由 $ab_1=cd_1$ 立得 $ab'_1\beta=ab_1\alpha=cd_1\alpha=cd'_1\beta$, 即 $ab'_1=cd'_1$.

其次证明: 关系“ $\sim$ ”是一等价关系, 即有以下的三种性质:

1. 反身性 $(a, b) \sim (a, b)$;
2. 对称性 若 $(a, b) \sim (c, d)$, 则 $(c, d) \sim (a, b)$;
3. 传递性 若 $(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f)$, 则 $(a, b) \sim (e, f)$.

1 及 2 是显然的事实。現在我們去証明傳遞性。易見任何三元素 b, d, f , 必有一右公倍数 m 使

$$m = bb_1 = dd_1 = ff_1,$$

由假定 $ab_1 = cd_1$, $cd_1 = ef_1$, 故得 $ab_1 = ef_1$, 即 $(a, b) \sim (e, f)$.

所有的类成一集合, 以 K 表之。今以 $\frac{a}{b}$ 表示 (a, b) 所属之类, (a, b) 称为此类的代表。今在 K 中定义加法和乘法。

对于加法, 我們作如次的定义:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1 + cd_1}{m},$$

此处 m 是 b 及 d 的一个右公倍数, 且 $m = bb_1 = dd_1$.

首先指出这定义与 m 的选择无关。盖設 $m' = bb'_1 = dd'_1$ 及 $M = mx = m'y$, 則 $b_1x = b'_1y$, $d_1x = d'_1y$, 故得

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ab_1 + cd_1}{m} = \frac{ab_1x + cd_1x}{mx} \\ &= \frac{ab'_1y + cd'_1y}{m'y} = \frac{ab'_1 + cd'_1}{m'}. \end{aligned}$$

其次指出, 此定义与 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 的代表选择无关。

設 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$; 則 $m = bb_1 = b'b'_1 = dd_1 = d'd'_1$, 由假定知 $ab_1 = a'b'_1$, $cd_1 = c'd'_1$, 故得

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1 + cd_1}{m} = \frac{a'b'_1 + c'd'_1}{m} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}.$$

对于乘法定义如下:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1}{dc_1},$$

此处 $m = bb_1 = cc_1$, 而 $c \neq 0$.

同样可証, 此定义与 m 的选择无关。設 $m' = bb'_1 = cc'_1$, $mx = m'y$, 則 $b_1x = b'_1y$, $c_1x = c'_1y$, 故得

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1}{dc_1} = \frac{ab_1x}{dc_1x} = \frac{ab'_1y}{dc'_1y} = \frac{ab'_1}{dc'_1}.$$

再证明此定义与 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 的代表选择无关. 若 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, 由此可设

$$bb_1 = b'b'_1, \quad ab_1 = a'b'_1; \quad dd_1 = d'd'_1, \quad cd_1 = c'd'_1.$$

取 $m = bb_1\alpha = b'b'_1\alpha = cd_1\beta = c'd'_1\beta$, 故

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ab_1\alpha}{dd_1\beta}, \quad \left(\frac{a'}{b'}\right)\left(\frac{c'}{d'}\right) = \frac{a'b'_1\alpha}{d'd'_1\beta}.$$

当 $c=0$ 时, 我们定义

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{0}{d}\right) = \left(\frac{0}{d}\right).$$

集合 K 经过这样定义加法和乘法之后成为一体, 称为 R 的商体. 今往证明其适合体之诸条件:

I. 对加法运算成一 Abel 群. 易见 $\frac{0}{d}$ 相当于 0 元素, 而 $-\frac{a}{b}$ 相当于 $\frac{a}{b}$ 的逆元素. 证明甚易, 读者自证之.

II. 非零元素对乘法成一群. 这一证明也略去. 其中 $\frac{d}{d}$ 相当于么元素, 而 $\frac{b}{a}$ 相当于 $\frac{a}{b}$ 的逆元素.

III. 分配律成立. 首先我们来证明左分配律:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right).$$

设 $bb_1 = cc_1$, $dc_1d_1 = fc_1f_1 = m$, 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \left(\frac{ab_1d_1}{bb_1d_1}\right)\left(\frac{cc_1d_1 + ec_1f_1}{m}\right) \\ &= \left(\frac{ab_1d_1}{bb_1d_1}\right)\left(\frac{bb_1d_1}{m} + \frac{ec_1f_1}{m}\right), \end{aligned}$$

故在证明中不妨假定 $d=f$, $c=b$, 即只须证明

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b+e}{d}\right) = \frac{a}{d} + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{d}\right)$$

即足.

设 $n = bb_1 = ee_1$, 此式的右边等于

$$\frac{a}{d} + \frac{ab_1}{de_1} = \frac{ae_1 + ab_1}{de_1},$$

而左边等于

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{(b+e)e_1}{de_1}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b(e_1+b_1)}{de_1}\right),$$

于是左右两边完全符合。

右分配律的证明比较容易。由于在证明

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$$

时,不妨假定 $b=d=e$ 。

如逕写 $\frac{ac}{c}=a$, $\frac{c}{bc}=b^{-1}$, 則 $\frac{a}{b}=ab^{-1}$ 。如欲 $(ab^{-1})(cd^{-1})=ef^{-1}$, 一个自然条件是存在两元素 b_1, c_1 , 使 $b^{-1}c=b_1c_1^{-1}$, 即 $bb_1=cc_1$, 也即 b, c 有右公倍数。由此可見,从环建体,有右公倍数这一条件是自然的。

在 $\frac{ac}{c}=a$ 的了解下,体 K 包有 R 作为其自己的子环,而在 $\frac{c}{bc}=b^{-1}$ 的了解下,体 K 是包有 R 的最小体。

在交换环中,任二元素显然有公倍数,故在无零因子的情况下,就可以利用上述的理論,从环来建体。最具体的例子是:从整数环到有理数域,从多项式环到有理函数域,从整函数环到半純函数域等等。但是除了交换环是有右公倍数的以外,是否还存在着有右公倍数的非交换环,下一节我們將回答这个問題。

§3 多项式环

命 K 为一带。形如

$$f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in K)$$

的式子称为不定子 x 的多項式。若 $a_n \neq 0$, 則 n 称为这多項式的次数,記作 $\partial^0 f$ 。

設

$$g(x)=\sum_{i=0}^m b_i x^i.$$

我們可以定义两多項式的加和乘: