线性代数学习指导

李绍宽 编著

中国纺织大学出版社

线性代数学习指导

编 著 李绍宽

中国纺织大学出版社

内 容 提 要

本书是大学工科线性代数的学习指导书。主要内容有行列式理论、矩阵理论、线性方程组、矩阵与线性变换。所含内容涉及到线性代数的各个方面，主要讲解了各种概念和它们之间的联系，更主要的是讲解了各种类型问题的求解方法与思路和解题的技巧。

本书适宜为工科各专业大学生学习线性代数时的参考书，亦可供教学与自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/李绍宽编著. —上海：中国纺织大学出版社，2001.1

ISBN 7-81038-328-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 李… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 81291 号

责任编辑 邵 静
封面设计 严坚莉
责任校对 苏 俞

线性代数学习指导
李绍宽 编著
中国纺织大学出版社出版
(上海市延安西路 1882 号 邮政编码：200051)
南京展望照排印刷有限公司排版 中国纺织大学印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
开本：787×1092 1/16 印张：6.25 字数：150 千字
2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷
印数：0001—5100
ISBN 7-81038-328-0/O·14
定价：9.80 元

序　言

线性代数是工科大学生的一门重要的公共课。由于线性代数中概念比较多，又比较抽象，同学在学习时往往遇到很大的困难。如何帮助大学生学好线性代数，提高线性代数的教学质量一直是我们考虑的问题。在学习与教学过程中，自己注意积累这方面的材料，写成这样一本小册子，供大家参考。

本书的目的是为了帮助同学克服学习线性代数的困难，因此编写时着重说明线性代数的基本概念，它们之间的联系，它们的意义、性质和作用。例如我们一直把线性方程组的求解问题作为线性代数的中心，各种概念都围绕着这个中心展开，这样使同学能够更好地掌握这些概念和意义。另外本书针对各个环节配备各种常见的例子，以帮助同学更好地提高线性代数的解题能力。每章还配有一定数量的习题，在最后给出了全部答案。

本书写好后，先用讲义的形式在东华大学用了两年，实践下来，对同学的学习与教师的教学都有一定的帮助。

由于自己的水平和经验有限，本书中肯定还存在不少错误和不足之处，本书的审稿与编辑同志已帮助改正了不少问题，这里对他们的工作表示感谢，但难免还有遗漏之处，恳请指正。

编者　李绍宽

2001 年 2 月

目　　录

第 1 章　行列式的理论

1.1　行列式的定义与性质

1.1.1　行列式的定义

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式，它可以借于归纳法定义如下

$$n=1 \qquad \boldsymbol{D}=|a_{11}|=a_{11}$$

$$n\geqslant 2 \qquad \boldsymbol{D}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\boldsymbol{M}_{1j}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也可以借于置换 $\sigma:\{1,\cdots,n\}\to\{i_1,\cdots,i_n\}$ 来定义。对置换 σ，$|\sigma|$ 表示 $\{i_1,\cdots,i_n\}$ 的逆序数，当逆序数为奇数，称 σ 为奇置换；而逆序数为偶数时，称为偶置换。若将 $\{i_1,\cdots,i_n\}$ 中对换两个数 i_s,i_k，即改变它的奇偶性，这时

$$\boldsymbol{D}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

行列式 $\boldsymbol{D}$ 也可视为一个函数，将 $\boldsymbol{D}$ 中 n 行（列）记为 $(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，而 $\boldsymbol{D}=f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，它具有：

(1) 交错性，$f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=-f(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$；

(2) 多线性性，$f(\lambda\boldsymbol{a}_1'+\mu\boldsymbol{a}_1'',\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\lambda f(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\mu f(\boldsymbol{a}_1'',\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$；

(3) 正规性，$f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1$。

——$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)$（第 i 个元为 1），

——(1)、(2)是行列式的基本性质。

1.1.2　行列式的性质

行列式的基本性质蕴含在行列式定义中，主要有：

(1) $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 称为 $\boldsymbol{D}$ 的转置，$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 是由 $\boldsymbol{D}$ 中的行与列对换即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 对换行列式中两行(列),所得的行列式正好为原行列式的相反数,这称为行列式的交错性质。

(3) 行列式中某行(列)的公因子可以提到行列式记号外面来。

(4) 行列式中某行(列)可表示为两行(列)之和时,则这个行列式等于两个行列式的和,即将这行(列)分裂为两个行列式对应的行(列),其它行(列)的元素不变。

性质(3)、(4)是行列式的多线性性质。

由这些性质可推出下列常用性质:

(1) 行列式中,两行(列)成比例,行列式等于零。

(2) 行列式中,将某行(列)的常数倍加到行列式的另一行(列)上去,行列式的值不变。

(3) 降阶公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{D}_1 \\ 0 & \end{vmatrix}=a_{11}|\boldsymbol{D}_1|$$

(4) Lapalace 展开

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

其中 A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式,$A_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$,$\boldsymbol{M}_{ij}$为 $\boldsymbol{D}$ 中将 a_{ij}所在的行与列划去留下的行列式,称为 a_{ij}的余子式。一般地,还有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\delta_{ik}\boldsymbol{D} \qquad \delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k \\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\delta_{ik}\boldsymbol{D}$$

1.1.3 行列式与矩阵的关系

对 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中 n^2 个数构成的方阵,而对 n 阶方阵有一个重要运算是乘法

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

另外
$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

而 A 的行列式记为 $|A|$，则有

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$
$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

——见矩阵的有关章节。

1.2 行列式的计算

行列式的计算是行列式的基本问题，下面介绍一些常用的方法。

1.2.1 降阶法

计算行列式的基本方法是降阶法，主要依据是行列式通过行(列)的初等变换，可以变为阶梯形，所谓初等变换主要为某行(列)乘一个不为零的常数，对换两行(列)，将某行(列)的常数倍加到另一行(列)。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * \\ 0 & D_1 \end{vmatrix} = a_{11} D_1 \quad \text{—— 降阶公式}$$

例 1 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 201 & 102 & -99 & 98 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$。

解
$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -197 & 98 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -197 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -200 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$-200\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -200\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1\,800$$

例 2 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$。

解
$$D_4 = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3ab & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)\,(a-b)^3$$

例 2 中将所有列(行)加到第 1 列(行)上去，得到这列(行)的元相同，便于把这列(行)中

其它元变为零，而方便于达到降阶的目的。

例 3 计算 n 阶行列式 $\Delta_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$。

解
$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ \sum_{i=0}^{2}a_{n-i}x^i & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ \sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x^i & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x^i\cdot(-1)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$$

例 4 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$。

解
$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=\left(a_1-\sum_{n=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)\cdot a_2\cdots a_n$$

注：这是一个常见的行列式类型，它可以作为一个公式或定式记住，对计算 n 阶行列式是很有帮助的。

例 5 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$ $(b_i\neq 0)$。

解
$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2}-\dfrac{c_{n-1}}{b_{n-1}}a_{n-1} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$b_{n-1}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}-\dfrac{c_{n-1}}{b_{n-1}}a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & b_{n-2} \end{vmatrix}=\cdots=$$

$$b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1\left(a_0-\frac{c_1}{b_1}a_1+\frac{c_1c_2}{b_1b_2}a_2\cdots+(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2\cdots c_{n-1}}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}a_{n-1}\right)$$

注：这也是一个常见的行列式类型。

例 6 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$。

解
$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}=$$

$$(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i(a_1-x_1)}{(x_i-a_i)}\right)=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)$$

例 7 计算 Vandermonde 行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}。$$

解 $$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & (x_1-x_n) & x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & (x_2-x_n) & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=$$

$$(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}\cdot(-1)^{n+1}=$$

$$(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})V_{n-1}=$$

$$\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

注：V_n 是一个重要的行列式，在许多方面有着它的应用，而且 V_n 的结果也很容易记忆。

1.2.2 递推公式

要计算 n 阶行列式，可以利用 D_n 的递推公式来计算，而 D_n 的递推公式可以用 Laplace 展开，也可用降阶方法得到。

例 1 计算 $$\Delta_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1\end{vmatrix}。$$

解 对第一列展开

$$\Delta_n=x\cdot\Delta_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0\\ x & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}=$$

$$a_n+x\Delta_{n-1}=$$

$$a_n+x(a_{n-1}+x\Delta_{n-2})=a_n+a_{n-1}x+x^2\Delta_{n-2}=\cdots=$$

$$a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x_{n-1}$$

例 2 计算 n 阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}。$$

解 按第一列展开

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

这是一个差分方程，它的特征方程为

$$r^2 - ar + bc = 0$$

当 $\Delta = a^2 - 4bc \neq 0$， $r_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$

$$D_n = c_1\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}\right)^n$$

而 $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc$，求出 c_1, c_2，即有

$$D_n = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$$

当 $\Delta = a^2 - 4bc = 0$ 时

$$D_n = (c_1 + c_2 n) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

而 $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc$ 求出

$$D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

例 3 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$。

解 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x+0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+(a_n - x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x \end{vmatrix} + (a_n - x)D_{n-1} =$

$$\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \cdots & x \\ 0 & a_2-x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} + (a_n-x)D_{n-1} =$$

$$x(a_1-x)\cdots(a_{n-1}-x)+(a_n-x)D_{n-1}=$$

$$x(a_1-x)\cdots x(a_{n-1}-x)+(a_n-x)[x(a_1-x)\cdots(a_{n-2}-x)+(a_{n-1}-x)D_{n-2}]=$$

$$x(a_1-x)\cdots x(a_2-x)\cdots(a_n-x)\left[\frac{1}{a_n-x}+\frac{1}{a_{n-1}-x}+\cdots+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{x}\right]$$

注：这个行列式为 1.2.1 中例 6 的特例，变为

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right)$$

例 4 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \therefore & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \therefore & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$。

解 按第一行展开

$$D_{2n}=a^2D_{2n-2}+(-1)^{2n+1}b(-1)^{2n}bD_{2n-2}=$$
$$(a^2-b^2)D_{2n-2}=(a^2-b^2)^n$$

1.2.3 特殊行列式的计算

计算行列式的方法除了上面的基本方法以外，还有一些特殊的方法，这主要利用行列式的性质来进行计算。

例 1 计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$。

解 D_{n+1}记为 $D_{n+1}(x)$，它应为 x 的 n 次多项式，且 x^n 的系数为 1，而由行列式的性质得

$$D_{n+1}(a_1)=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

从而

$$D_{n+1}=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

例 2 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$。

解 $D_n = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \cdots y_n) \right|$，而由于 $r\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \cdots y_n) \right) \leqslant 1 < n$，

从而

$$D_n = 0$$

——这里 $r(A)$ 表示 A 的秩——见矩阵有关章节，当然直接计算。

$$D_n = x_1 \cdots x_n \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix} = 0$$

例 3 A 为 n 阶方阵，$A^{\mathrm{T}}A = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，$|A| = -1$，求证 $|A+E| = 0$。

证 $|A+E| = |A+AA^{\mathrm{T}}| = |A(E+A^{\mathrm{T}})| = |A| \cdot |E+A^{\mathrm{T}}| =$
$-1\,|(E+A)^{\mathrm{T}}| = -\,|E+A|$

从而 $|A+E| = 0$。

例 4 计算 n 阶循环行列式

$$D_n(c_1,\cdots,c_n) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_n & c_1 \end{vmatrix}$$

解 设 $x^n = 1$ 的 n 个根为 $x_1 = 1, x_2 = \omega, \cdots。x_n = \omega^{n-1}$，其中 ω 为 1 的 n 次原根，对应 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 Vandermonde 行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

则

$$\Delta_n D_n = \begin{vmatrix} c_1 + c_n + \cdots + c_2 & c_2 + c_1 + \cdots + c_3 & \cdots & c_n + c_{n-1} + \cdots + c_1 \\ c_1 + \omega c_n + \cdots + \omega^{n-1}c_2 & c_2 + \omega c_1 + \cdots + \omega^{n-1}c_3 & \cdots & c_n + \omega c_{n-1} + \cdots + \omega^{n-1}c_1 \\ \cdots & & & \\ c_1 + \omega^{n-1}c_n + \cdots + \omega^{(n-1)^2}c_2 & c_2 + \omega^{n-1}c_1 + \cdots + \omega^{(n-1)^2}c_3 & \cdots & c_n + \omega^{n-1}c_{n-1} + \cdots + \omega^{(n-1)^2}c_1 \end{vmatrix} =$$

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)(c_1 + \omega c_n + \cdots + \omega^{n-1} c_2)\cdots(c_1 + \omega^{n-1} c_n + \cdots + \omega^{(n-1)^2} c_2)\Delta_n$$

从而

$$D_n = (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)(c_1 + \omega c_n + \cdots + \omega^{n-1} c_2)\cdots(c_1 + \omega^{n-1} c_n + \cdots + \omega^{(n-1)^2} c_2)$$

1.3 行列式的应用

1.3.1 克莱姆法则

行列式是由解线性方程组而产生的。利用行列式的 Laplace 展开方式,可知对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,它有唯一解

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

其中 D_i 是 D 中第 i 列换为 $b_1, \cdots, b_n$ 所得到的行列式,证明如下

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{D_i}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_k b_k A_{kj} =$$
$$\frac{1}{D}\sum_k b_k \cdot \sum_j a_{ij} A_{kj} = \frac{1}{D}\sum_k b_k \cdot D\delta_{ki} = b_i$$

若有两个解:$x_1, \cdots, x_n$ 与 $x_1', \cdots, x_n'$,这导出存在 $x_1'' = x_1 - x_1', \cdots, x_n'' = x_n - x_n'$ 不全为零,而

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j'' = 0 \qquad (i = j, \cdots, n)$$

这时若 $x_n'' \neq 0$,导出

$$x_n'' D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'' a_{nn} & \cdots & x_n'' a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i'' & \cdots & \sum a_{ni} x_i'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即导出 $D = 0$ 的矛盾。

推论 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件为 $\boldsymbol{D} = 0$。

事实上,当 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 时,方程只有唯一解为 $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$,而当 $\boldsymbol{D} = 0$ 时,由行列式的降阶计算方法,可将方程经消元法化为

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots \\ b_{mm}x_m + \cdots + b_{mm}x_n = 0 \end{cases}$$

而 $m < n$。这样,不难可知方程有非零解。

这是一个重要的事实,它有许多应用,例如这推论也可叙述为:

$\boldsymbol{D} = 0$ 的充要条件为 $\boldsymbol{D}$ 的列(行)向量线性相关,它在向量理论中有重要的应用(见向量的有关章节)。另外它是用来消去未知数的常用方法。

例 1 求三次曲线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$,它通过四个不同点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)。

解 将 (x_i, y_i) $(i = 1,2,3,4)$,代入方程

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 - y_1 = 0 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 - y_2 = 0 \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 - y_3 = 0 \\ a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 - y_4 = 0 \end{cases}$$

与 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - y = 0$ 联列,视为五元线性方程组,它有解 $(a_0, a_1, a_2, a_3, -1)$,从而必有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & y \end{vmatrix} = 0$$

而这就是要求的方程。

1.3.2 伴随矩阵

作为行列式的应用,是对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 的伴随矩阵

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式。

由 Laplace 展开

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}|A|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = \delta_{ik}|A|$$

可推出

$$\mathrm{adj}(A)\cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

这是一个重要的公式。

习 题 一

1\. 计算 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$。

2\. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$。

3\. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$。

4\. 计算 $\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$