DAXUESHENG ZHI YOU

解析几何解题分析

江苏科学技术出版社

解析几何解题分析

丰宁欣　郭孝英
李中林　吴少华　编

江苏科学技术出版社

解析几何解题分析

丰宁欣　郭孝英
李中林　吴少华　编

出版、发行：江苏科学技术出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：南通韬奋印刷厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张20.375　字数457,000
1990年4月第1版　1990年4月第1次印刷
印数 1—3,000 册

ISBN　7-5345-0887-8

O·65　定价：5.90元

责任编辑　沈绍绪

出版说明

为了帮助广大理工科大学生（包括电视大学、职工大学、夜大学和函授大学的学生理工科），学好基础课和专业基础课，克服学习过程中遇到的各种困难，把握教材的重点、难点和应注意的地方，加深对定理、概念的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们约请了高等院校一些具有丰富教学经验的教师编撰了这套《大学生之友》丛书。

本丛书根据大纲要求，紧密结合教材内容来编写，选题大体分为“学习指导”、“解疑”和“解题分析”三个方面，以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾其他各专业课程。计划在数年内逐步出齐。

我们深信，大学生在学习中能有这样三方面的书结合教材学习参考，必会给学习带来帮助。但愿这套丛书能成为名副其实的“大学生之友”，我们恳切地欢迎读者提出宝贵的意见。

江苏科学技术出版社

前　言

本书包括平面解析几何和空间解析几何两大部分。

为了使读者能加深对基本内容的理解，并能熟练地、灵活地、综合地运用所学知识和方法，我们在选题时，除尽量注意例题的典型性、普遍性和广泛性外，随着章节的进展，概念的增多，运算公式的多样化，还选择了一些综合性的例题。在题目的编排上，力求由浅入深，由简单到复杂，由基本题到综合题。

此外，在例题的剖析过程中，我们还注意到阐述解析几何解题的基本技能，如坐标系的如何选取，参数的怎样选择，韦达定理的应用和有关向量性质的运用等等，以便为简捷地解决问题提供思考的途径。

全书在分工执笔的基础上由丰宁欣定稿。我们希望，本书不仅能成为理工科大学生的有益的“朋友”，而且还能成为自学者以及高等院校有关教师的有用的参考资料。

限于水平，书中难免有错误和不当之处，恳请读者批评指正。

最后，感谢南京师范大学涂世泽副教授为本书提出了宝贵的修改意见。

编　者

1985年1月

目　录

第一篇　平面解析几何

第一章　平面上点的坐标　曲线的方程

第一节　平面直角坐标系　两个基本公式……………………………… 1

第二节　极坐标系……………………………………………………15

第三节　曲线的方程…………………………………………………22

第二章　直线　圆　几种常见的平面曲线

第一节　直线…………………………………………………………43

第二节　圆……………………………………………………………66

第三节　几种常见的平面曲线………………………………………35

第三章　圆锥曲线及二次曲线的一般理论

第一节　圆锥曲线的定义和方程……………………………… 101

第二节　坐标变换及其应用………………………………………… 114

第三节　与二次曲线有关的几何元素……………………………… 123

第四节　不变量及其应用…………………………………………… 135

第四章　圆锥曲线的几何性质

第一节　弦 ………………………………………………………… 150

第二节　共轭方向和共轭直径……………………………………… 161

第三节　切线 ……………………………………………………… 167

第四节　法线 ……………………………………………………… 180

第二篇　空间解析几何

第五章　空间内点的坐标　曲面和曲线的方程

第一节　空间直角坐标系　两个基本公式 ………………………… 192
第二节　曲面和曲线的方程 ………………………………………… 201
第三节　球面坐标系　圆柱面坐标系 ……………………………… 220

第六章　向量代数

第一节　向量的基本概念 …………………………………………… 232
第二节　向量的线性运算 …………………………………………… 237
第三节　关于向量的一些概念——分解，线性关系，坐标表示，在轴上的射影，方向角和方向余弦 ……………………………………… 253
第四节　向量的数量积 ……………………………………………… 274
第五节　向量的向量积 ……………………………………………… 288
第六节　混合积　二重向量积 ……………………………………… 302

第七章　平面和直线

第一节　平面 ………………………………………………………… 321
第二节　直线 ………………………………………………………… 342
第三节　平面束　平面把 …………………………………………… 379

第八章　几种常见的曲面

第一节　球面 ………………………………………………………… 393
第二节　柱面 ………………………………………………………… 417
第三节　锥面 ………………………………………………………… 435
第四节　旋转曲面 …………………………………………………… 446

第九章　二次曲面的一般理论　二次曲面方程的化简及其分类

第一节　二次曲面的渐近方向　切线和切平面 …………………… 460

第二节　二次曲面有关的几何元素 …………………………………… 480
第三节　坐标变换及其应用 ………………………………………… 507
第四节　不变量及其应用 …………………………………………… 529

第十章　正常二次曲面的性质

第一节　椭圆面 ……………………………………………………… 545
第二节　双曲面 ……………………………………………………… 578
第三节　抛物面 ……………………………………………………… 610
第四节　曲面的产生 ………………………………………………… 628

·第一篇·

平面解析几何

第一章 平面上点的坐标 曲线的方程

第一节 平面直角坐标系 两个基本公式

一、内容提要

1. 直线上点的坐标 平面上点的坐标

1）有向直线和有向线段 一条直线有两个相反的方向，取其中一个方向为正向，并用箭头表示，如图 1-1 。我们将规定了正向的直线称为**有向直线**或**轴**。

图 1-1

一个线段有两个端点，规定其中一点为起点，另一点为终点，并规定从起点到终点的方向为线段的方向。我们把规定了方向的线段称为**有向线段**。以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overline{AB}$。

2）轴上有向线段的值 若选定一长度单位，则对于轴上一个有向线段 $\overline{AB}$，规定一实数，此数的绝对值为 $\overline{AB}$ 的

长度，此数的符号由以下法则确定：当$\overline{AB}$的方向与轴的正向相同时，取正号；当$\overline{AB}$的方向与轴的正向相反时，取负号。这实数称为$\overline{AB}$的**值**，用记号AB表示。$\overline{AB}$的长度用记号$|AB|$表示。显然，$|AB|=|AB|$，但$AB=-BA$。

3）**直线上点的坐标**　在一直线上取一定点O，规定直线的正方向，并选定一单位长度。这样的直线称为**数轴**，O称为**原点**，如图1-2。

设P为直线上任意一点，这时有向线段$\overline{OP}$的值$OP=x$与点P一一对应。数x称为直线上点P的**坐标**，记作$P(x)$。原点的坐标为零，即$O(0)$。点$P(x)$关于原点O的对称点P'的坐标为$-x$。

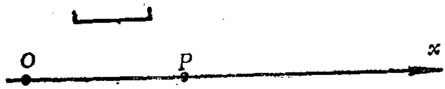

图 1-2

设$\overline{AB}$为轴上的有向线段，A、B的坐标分别为x_1、x_2，则$AB=x_2-x_1$，而$|AB|=|x_2-x_1|$。

4）**平面上点的坐标**　在平面上取定一点O，称为**原点**。过点O作两条互相垂直的轴，且规定两轴上的单位长度相等，这样就得到一个平面直角坐标系$O\text{-}xy$，如图1-3。这两条轴分别称为x轴（或**横轴**）、y轴（或**纵轴**）。通常x轴的正半轴依反时针方向旋转90°与y轴的正半轴重合，这种坐标系称为**右手系**。

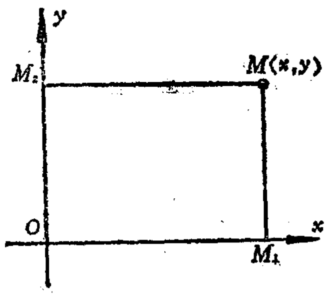

图 1-3

设 M 为平面上任意一点，由 M 引 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 M_1、M_2。(图1-3) 若 $OM_1=x, OM_2=y$，则一对有序实数 (x, y) 与点 M 一一对应。(x,y) 称为平面上点 **M 的直角坐标**，记作 $M(x,y)$。其中 x 称为点 **M 的横坐标**，y 称为点 **M 的纵坐标**。原点的坐标为 $(0,0)$。点 $M(x,y)$ 关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标分别是 $(x,-y)$、$(-x, y)$、$(-x,-y)$。

两条坐标轴将平面分成四部分，每一部分称为一个象限。四个象限的顺序按其中点的坐标符号规定如下：第一象限（Ⅰ）：$x>0$，$y>0$；第二象限（Ⅱ）：$x<0$，$y>0$；第三象限（Ⅲ）：$x<0$，$y<0$；第四象限（Ⅳ）：$x>0$，$y<0$（图 1-4）。坐标轴上的点不属于任何象限。

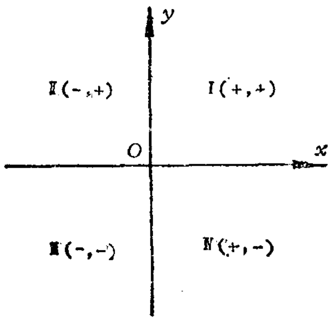

图 1-4

2．两点间的距离公式

已知平面上两点 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$，则它们之间的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。\tag{1.1}$$

特别，点 $M(x,y)$ 和原点 O 之间的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}。\tag{1.2}$$

3．线段的定比分点公式

已知两点 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$。若直线 M_1M_2 上一点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 为两部分，使它们的代数长之比等于 λ，即 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$（常数），且 $\lambda\neq-1$，则分点 M 的坐标

(x,y)是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\qquad(1.3)$$

当$\lambda>0$时，点M是$\overline{M_1M_2}$的内分点；当$\lambda<0$时，点M是$\overline{M_1M_2}$的外分点。当$\lambda=1$时，M是$\overline{M_1M_2}$的中点，它的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}。\qquad(1.4)$$

设三角形的三个顶点为$M_1(x_1,\ y_1)$、$M_2(x_2,\ y_2)$、$M_3(x_3,y_3)$，则三角形重心M（三角形$M_1M_2M_3$的三中线交点）的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\qquad(1.5)$$

二、例题分析和题解

例1 设P、A、B、C是同一直线上的任意四点，求证：

1) $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$；

2) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB$
$+BC\cdot CA\cdot AB=0$。

证明 （方法Ⅰ） 取P、A、B、C所在的直线为坐标轴。设P、A、B、C的坐标分别为p、a、b、c。根据轴上有向线段值的公式得

$PA=a-p$；　　$PB=b-p$；　　$PC=c-p$；

$BC=c-b$；　　$CA=a-c$；　　$AB=b-a$。

于是

1) $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB$

$=(a-p)(c-b)+(b-p)(a-c)+(c-p)(b-a)$

$$=ac-pc-ab+bp+ab-ap-bc+pc+cb-pb$$
$$-ac+ap$$
$$=0;$$

2) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$
$$=(a-p)^2(c-b)+(b-p)^2(a-c)$$
$$+(c-p)^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$=(a-p)^2(c-b)+(b-p)^2(a-c)$$
$$+(c-p)^2(b-a)+(c-p+p-b)(a-c)(b-a)$$
$$=(a-p)^2(c-b)+(b-p)(a-c)(b-p-b+a)$$
$$+(c-p)(b-a)(c-p+a-c)$$
$$=(a-p)[(a-p)(c-b)+(b-p)(a-c)$$
$$+(c-p)(b-a)]=0。$$

2)式中最后一个等号可直接利用 1) 得到。

（方法Ⅱ） 取 P、A、B、C 所在的直线为坐标轴，并设 P 为原点，A、B、C 的坐标分别为 a、b、c，那么

$PA=a$；　　$PB=b$；　　$PC=c$；

$BC=c-b$；　　$CA=a-c$；　　$AB=b-a$。

于是

1) $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB$
$$=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)=0;$$

2) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$
$$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$
$$+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$=a^2(c-b)+b(a-c)(b+a-b)$$
$$+c(b-a)(c+a-c)$$
$$=a^2c-a^2b+a^2b-abc+abc-a^2c=0。$$

以上两种证明，虽然思想方法相同，都是建立坐标系，

然后将有向线段的值用点的坐标表示，最后证明等式。但由于坐标系的取法不同，运用方法Ⅱ进行计算较为简便。这说明在解析几何的解题过程中，坐标系的选择是重要的一环，坐标系选得适当，就可以使计算简便。

例2 设直角三角形 ABC 的斜边 AB 的三等分点为 D、E。证明：$CD^2+CE^2+DE^2=\frac{2}{3}AB^2$。

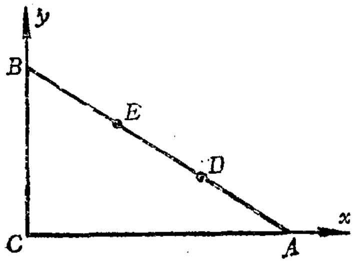

图 1-5

分析 这是平面几何的问题，要用解析几何的方法来证明，首先遇到的是选择坐标系。由于 $\triangle ABC$ 是直角三角形，我们自然想到可取直角边 CA 和 CB 所在直线分别为坐标系的 x 轴和 y 轴。这样，C 就是坐标原点。于是利用定比分点公式及两点之间的距离公式就可以证明本题。

证明 建立直角坐标系 $O\text{-}xy$，使原点 O 与顶点 C 重合，CA、CB 所在的直线分别为 x 轴、y 轴（如图 1-5）。这时 C 的坐标为(0,0)，顶点 A 在 x 轴上，所以它的坐标为 $(a,0)$；顶点 B 在 y 轴上，它的坐标为 $(0,b)$。

因为 D、E 是 AB 的三等分点，所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$，$\frac{AE}{EB}=\frac{2}{1}$。根据定比分点的公式，$D$ 的坐标 (x_1,y_1) 为

$$x_1=\frac{a}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}a,\qquad y_1=\frac{\frac{1}{2}b}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}b。$$

E 的坐标 (x_2, y_2) 为

$$x_2 = \frac{a}{1+2} = \frac{1}{3}a, \qquad y_2 = \frac{2b}{1+2} = \frac{2}{3}b。$$

由两点间距离的公式得

$$CD^2 = x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2,$$

$$CE^2 = x_2^2 + y_2^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\right)^2,$$

$$DE^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2,$$

$$AB^2 = a^2 + b^2。$$

因此

$$CD^2 + CE^2 + DE^2 = \frac{6}{9}a^2 + \frac{6}{9}b^2$$

$$= \frac{2}{3}(a^2 + b^2) = \frac{2}{3}AB^2。$$

例3 在已知正方形 $ABCD$ 的内侧，作等边三角形 ABK、BCL、CDM 和 DAN。试证：线段 KL、LM、MN 和 NK 的中点和线段 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 的中点是一个正十二边形的十二个顶点。

分析　先根据题意作图(图1-6)。从图形结构分析，整个图形关于正方形的中心 O（对角线的交点）是对称的。要证明十二条线段的中点 P_1、P_2、…、P_{12}是正十二边形的十二个顶点，只要证明 $|OP_1| = |OP_2| = |OP_3| = \cdots = |OP_{12}|$（即 P_1、P_2、…、P_{12} 分布在同一圆周上），且 $|P_1P_2| = |P_2P_3| = \cdots = |P_{12}P_1|$。坐标系的选取不妨以正方形的中心为原点，坐标轴平行于正方形的边。

证明　以正方形中心 O 为原点，建立直角坐标系 $O\text{-}xy$，

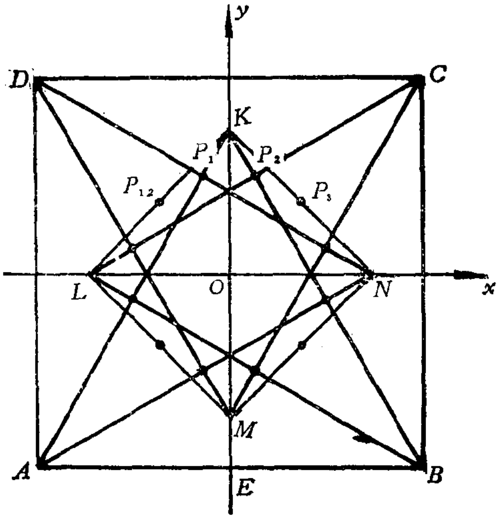

图 1-6

使 x 轴、y 轴分别平行于正方形的两邻边 AB、BC，并取正方形边长的一半为单位长度。

在上述坐标系下，正方形四顶点的坐标分别为 $A(-1,-1)$、$B(1,-1)$、$C(1,1)$、$D(-1,1)$。

因为等边三角形 ABK、DCM 关于 y 轴对称，所以顶点 K、M 在 y 轴上，且关于原点 O 对称。同理，等边三角形 DAN、BCL 的两顶点 N、L 在 x 轴上，且关于原点 O 对称。

对于 K 点，因为 $|OK|=|EK|-|OE|=\sqrt{3}-1$，所以它的坐标为 $(0,\sqrt{3}-1)$。由对称性可得 M、L、N 的坐标分别为 $(0,1-\sqrt{3})$、$(1-\sqrt{3},0)$、$(\sqrt{3}-1,0)$。

又根据中点坐标公式得 DN 的中点 P_1 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2}\right)$，$CL$ 的中点 P_2 的坐标为 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$KN$

的中点 P_3 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$。

再根据两点间距离公式可得

$$|OP_1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

$$|OP_3|=\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

$$|P_1P_2|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2+0}=2-\sqrt{3};$$

$$|P_2P_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}。$$

所以

$$|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|,\qquad |P_1P_2|=|P_2P_3|。$$

由图形的对称性可知，P_1、P_2、…、P_{12} 均与原点 O 等距离，且相邻两点间距离相等，所以它们是正十二边形的十二个顶点。

例4 求证：到三角形的三顶点的距离平方和 S 为最小的点是此三角形的重心，且 S_{min} 等于三角形三边平方和的三分之一。

分析 设 $M(x,y)$ 为平面上一点，利用两点间距离公式，可求出它到三角形三顶点的距离平方和，它是关于 x、y 的函数式。要证明本题中命题，只要求出此函数式的极值点和极值。

证明 设三角形三顶点 A、B、C 的坐标分别为(x_1,y_1)、