现代数学基础丛书

非线性动力系统分析引论

盛昭瀚 马军海 著

科学出版社

现代数学基础丛书

非线性动力系统分析引论

盛昭瀚　马军海　著

国家自然科学基金资助项目
高校博士点基金资助项目

科学出版社
2001

内 容 简 介

本书以非线性动力系统的分析为主要目的，介绍了有关非线性动力学基本概念、混沌、分形、混沌控制等非线性科学与复杂性科学所涉及的主要内容与一些重要工具，本书可使读者在不需要很深的知识背景下能较快地掌握这些内容与工具，此外，本书还较多地介绍了相关应用.

本书可作为大专院校有关专业本科生与研究生的教材，也可供有关的科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力系统分析引论/盛昭瀚，马军海著. －北京：科学出版社，2001

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008941-3

Ⅰ.非… Ⅱ.①盛…②马… Ⅲ.非线性：动力学 Ⅳ.O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 84514 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http www sciencep com

丽源印 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2001 年 9 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

2001 年 9 月第一次印刷　　印张：11 5/8

印数：1—3 000　　字数：306 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

目　录

第一章　绪　　论

一、在数学上,线性方程与非线性方程之间有着本质性的差别,主要表现为一个线性方程的任意两个解加在一起仍然是该方程的解,这一原理就是著名的线性方程的叠加原理.它为解决“线性”问题提供了一条思路,即我们可以把整个问题分解成许多个“小”问题,再把各个“小”问题的解叠加起来而得到整个问题的解.但是,对于一个“非线性”问题,则不可如此处理,因为非线性方程不再满足“叠加原理”,因此必须整体地考虑原来的问题才行.这个简单的说明告诉我们,非线性问题包含着不可忽视的复杂性.

在人们的认识史上,首先是用相对简单的线性关系(线性模型)来刻画线性问题的定量关系,对于那些非线性因素不能完全忽略的情况,则往往采取线性近似或线性迭代的方法来处理,这样做也常常能得到较好的结果,但这种情况一般还只出现在比较“简单的”非线性问题中,或者只是研究系统的一些“常规”行为特征.随着人们对社会、自然认识的不断深化,人们越来越不敢“小看”非线性问题了.首先,就其本质而言,自然界应是非线性的.第二,许多问题中的强非线性作用与长时间尺度的系统行为都不能用线性方法(包括线性近似)来刻画.第三,即使是一些表面看上去很简单的非线性系统,也可能表现出令人惊异的复杂性(如确定性的随机性等),于是,人们越来越重视对广泛存在于社会与自然中的非线性现象的研究,并由此而诞生出非线性科学.

这里需要指出两点:

第一,这里所说的非线性现象是指在各学科中用传统的线性方法(模型)所不能说明(包括近似)的那些现象,例如孤立子与混沌就是非常典型的非线性现象.

第二,非线性科学所研究的是非线性现象的共性,这种共性的

物理背景存在于各个学科中,因此有其具体性,需要分类研究.但这种共性又超脱于各个具体学科,具有普适性是非线性问题的深刻规律性的体现,例如可积系统与孤立子理论、混沌和分形理论等,它们是非常深刻的基本自然规律的体现,因此普遍存在于多种自然现象中.

近20年来关于非线性科学的研究发展很快,这主要归结为:第一,电子计算机的进步使对非线性系统的定量仿真与实验成为可能,甚至出现了实验数学这一新学科.第二,各学科均发现大量的普适的非线性现象.第三,新的数学分析工具与方法的有效使用,在短短的时间里使非线性科学取得了一系列重要的成果与突破,在许多方面,甚至改变了人们对社会、自然的基本看法.但无论在理论上还是在实践上,非线性科学面前都有重重障碍难以逾越,例如关于多重分形的奇异点集的标度结构,图像形成系统的系列方程,复杂图形对湍流边界层的作用,确定性混沌系统的预测等等.还有,非线性科学正扩展到经济学、社会科学、管理科学,甚至国际关系研究中.

非线性科学是20世纪科学发展史上光辉的一页,它面临着最严峻的挑战,但它有战斗力,有着光明的未来.

二、在某种定义上,非线性科学是研究复杂性的科学.这句话这样理解比较贴切:非线性科学有可能使现实世界中那些杂乱无章的空间形态和似乎毫无规律的时间序列成为研究的对象,并从中发现了它们的“复杂”的规律性.

这些规律不断被发现而丰富起来,它们的要点包括:

(1) 可以用分形概念来描述复杂性的几何形态.这种形态具有确定的分数维数,它具有某种意义下的自相似结构,并且在各种不同尺度的层次上体现出来;这种复杂性居然可以通过出人意料的简单规则反映出来.

(2) 复杂性与系统各部分之间的非线性相互作用有着密切的关系.众所周知,由于非线性而造成的不稳定性和对初始条件的极度敏感依赖性是形成复杂性的根源之一.例如,一个系统往往会受

到小的扰动，非线性则会放大这些扰动，而在对初值的敏感性的反复作用下又形成了系统的复杂结构，再因为系统一方面对于初始条件敏感依赖，另一方面又在有限范围内运动，这样就使那些初始状态和速度充分接近的轨道会以指数速度分离开来. 由于轨道自己不能相交，所以这些轨道只能在有限的空间内缠绕往复而形成非常复杂的形状，这就是"混沌".

(3) 一个系统如果不能使它所有的相互作用同时得到满足，称此系统为"受挫"系统. 这个概念是研究自旋玻璃时引进的，在一定意义下，自旋玻璃是"受挫"的，同时它的磁学性质表现出前所未有的复杂性. 举一反三，"受挫"的概念可以解释诸如神经网络、早期生命进化过程等系统行为的复杂性.

三、混沌(这里姑且不谈它的科学定义)是 J. Hadamard 在 19 世纪末研究 Hamilton 系统时发现的. H. Poincaré 不仅理解了他的发现的重要性，而且也讨论过一个敏感依赖初始条件的天体系统的运动问题，虽然这些发现在一段时间内对物理学影响不大，但 Hadamard，Poincaré 以及 Kolmogorov，Smale 等学者在数学领域内继续上述研究. 随着电子计算机的发展，1963 年 Lorenz 得到一个混沌图像，而其他学者也得到一些重要的结论，例如有：

(1) Smale 指出一个动力系统的轨道在某些情况下渐近于一个复杂的称为奇异吸引子的集合；

(2) 一个动力系统的行为依赖于某一参数 μ，并随 μ 的变化而发生性质上的变化，对于这种分岔现象，Feigenbaum 发现了倍周期分岔的规律；

(3) Rull 和 Taken 认为湍流是混沌，它具有奇异吸引子与 Feigenbaum 分岔等性质；

(4) 可微动力系统的各态历经理论.

下面的例子告诉我们，混沌的概念越来越渗透到各个学科中.

研究表明，脑的活动可视为一个混沌吸引子，是一个极不稳定的混沌态，实验表明那些刻画混沌吸引子的参数在大脑活动时经常在变动中，在此基础上，脑电图的信号呈现出一些复杂的现象.

首先,脑电图是诸如神经纤维上传导着的动作电位的变化,突触的、神经细胞体的以及神经胶质细胞的电变化等信号的综合,这些变化各自有自己的时间尺度.其次,脑电图的维数是随着功能状态变化的.概括地可以认为,脑电图很可能是由多个极限环的振荡经外界扰动进入混沌状态而形成的.

在气象领域,专家通过对一维天气、气候时间序列采用相空间延拓方法,提取了相应序列的分数维指数以及熵等.虽然这些序列代表了大气运动中的不同物理过程,但它们均具有非整数维,存在着正的 Lyapunov 指数与正的 Kolmogorov 熵,从不同的侧面说明大气运动本质上是一个混沌运动.

混沌也是工程动力学的典型的组成部分.一些被认为是安全的确定的工程系统存在着平稳状态的混沌、混沌的瞬变过程及不稳定混沌的可能性.事实上,由于工程系统的瞬变运动,可能使系统运动在短时间的激励下发散.由于在许多工程动力学问题中,激励不再是规则的,因此在长时间尺度下,系统模型必须不断被修正.但是在实际中大多数工程师可能忽略了瞬变过程,而仅仅采用动力学模型,这就给系统的安全性带来隐患,诸如横梁的断裂、船舶的倾覆、大楼火灾等等都属此例,于是,混沌理论给工程师们提出了新的工程观点与技术要求.

1987 年 10 月,出现了一次世界性的股市暴跌,被人们称为“黑色星期一”.这次暴跌表现出来的突发性与奇异性,均不能用传统的经济学模型来解释,哪怕是复杂的“随机游动理论”也变得无能为力.经济现象所以是复杂的,因为它既是稳定的,又是不稳定的,严格地说,是这两种因素的相互纠缠,这正是混沌的基本特征.问题的实质是,如何描述和认识经济学中的“混乱与不和谐”,并从这种“混乱”中寻找某种意义下的规律与潜在结构.经济系统想在有序中运行,但随后可能转向混沌或不稳定,而无序中又有基本的有序,即平稳的混沌状态有某种意义的可预测的有序.简言之,非线性经济系统会展示出几种不同的行为,其中包括混沌.

在管理决策方法中,人工智能是一种有效的途径.近年来,一

种用于解决复杂问题的所谓分布式人工智能系统的概念被提出来了.事实上,在这一系统中,即使从局部来说是合理的决策,但由于整个系统中存在着模糊、延迟、不完善,乃至冲突,因此有可能从整体而言,我们得到的是全局意义上的"差劲"的决策.从机理上讲,这是不难理解的,因为信息的延迟会使系统状态与知识过时,信息的不完全、模糊或冲突会使决策单元在实际中观测到的性能指标产生偏差.如果我们把决策理解为是决策单元在某一时刻根据系统的状态用某类资源采用不同的方法对信息的外推结果,则可以构造一个性能指标来描述这一过程.实验表明,由于相关的动态方程中有延迟及非线性因素,这一过程可能收敛于一个稳定的平稳点,可能收敛到极限环,也可能出现混沌.这实际告诉我们,分布式人工智能用于管理在理论上是诱人的,但同时又隐含着"复杂性"危险.

四、B. Mandelbrot 于 1975 年由描述碎石的拉丁文 fractus 创造出分形(fractal)一词.分形作为几何外形,它与欧氏外形不同,它不仅处处无规则,而且在各种尺度上都有同样程度的不规则性,即它们具有自相似性,那种把整体中的一部分放大便能进一步揭示其深层结构且几乎是原来结构复制品的性质.

对于分形,和普通整数维(0,1,2,3,…)相对应的维数称为分形维数,值得注意的是,它们的维数值不是整数.

分形可以用来描述复杂的自然界外形,也可以用来描述复杂的动力学系统行为,但分形不能理解为是简单的线性相似性的描述,它更是随机性、混沌与非线性系统的几何描述.

分形概念与各种非线性现象的共性之间有着深刻的联系,例如,

(1) 图形的叠加性即由非线性描述的任何过程,一旦失去稳定性并出现多个奇点,就会形成具有不同尺度的同时存在的多个重复叠加的图形,并很快会表现出混沌图形.

(2) 任何分形图形都具有无限层次.

(3) 任意分形结构都是由相似或拟相似图形构成,而相似性

本身恰恰就是被表现混沌性掩盖的规律性的具体表现,即大小不同的分形图形叠加在一起就造成了表面的混乱.

(4) 空间与时间的维数都不是整数而是分数.

产生分形结构的物理机理是系统具有非线性、随机性或耗散性,人们把研究分形结构上的各种性能的演化过程以及一个复杂系统如何演化成实空间或相空间中的分形结构称为分形动力学,分形动力学所描述的系统应是非(或远离)平衡态的不可逆的演化过程,系统的随机性蕴含在分形维数之中,而非线性与耗散性则是产生分形结构的最基本的机理.

分形有着广泛的应用领域:

分子集合本质上是复杂的非线性系统,这就使化学与分形有着“天然”的联系.

分形为物理学中描述湍流、电击穿以及吸附微粒的固体表面结构提供了新的途径.

岩石破裂是复杂现象,从晶粒尺度到大地构造尺度在一个很宽的尺度范围内破裂的生长具有相似性.作为地壳岩石破裂的结果,地震群体及相应断裂系统均具有分形结构.在这方面,已开展的研究工作包括对地震时、空、强度结构分形特征的研究,对活动断层系统分形结构的研究,以及对地震过程混沌性与地震再生吸引子的研究.

天文学中关于空洞的自相似性、宇宙中物质分布的β模型、星云与变星的研究中都有效地运用了分形的概念与工具.

人体生理学的研究表明,人的许多器官系统显示出具有分形结构,分形结构在健康心脏的机械动态特性与电动态特性中起着关键作用.人体内的分形结构产生于胚胎发育与进化的缓慢动态过程中,这些过程与产生出分形结构的其他过程一样,都展示出一种确定性混沌,生理学可能被证明是研究分形、混沌和其他类型非线性动态过程的最丰富多彩的实验室之一.

学者的研究还揭示了某些乐曲的分形本质,还有人运用与分形几何学类似的数学方程创作出一批美术作品.

在社会领域,人口系统由于众多的不确定因素与非线性作用,于是出现了人口增长的混沌与分形、人口分布的多重分形,以及人口时间序列与城市化过程的分形特性等.

在经济领域,为分析经济波动的混沌现象,引入与分形布朗运动密切相关的滑动自回归非平稳模型,若干金融数据序列也都呈现出分形特征.

一句话,分形、混沌、复杂性与非线性已经紧紧地联系在一起,密不可分,混沌吸引子就是分形集,分形集就是动力学系统中那些不稳定轨迹的初始点的集合.

五、今天和明天的工程师,假如想切实分析一些有一定难度的技术问题,或者想有效解决一些有一定难度的工程问题,又想回避非线性科学、回避复杂性而仅仅囿于线性方法与“线性思维”肯定是不可能的了.因为,正如我们在上面介绍的,社会、经济、自然界、工程技术已经越来越明显地向我们显示出它们所固有的而不是臆造出来的混沌现象、分形特性等等.一个结论很明显,这就是今天和明天的工程师,有必要稍微细致而系统地学习一些关于非线性系统分析方面的基本理论与方法.

本书中部分内容总结了作者承担的国家自然科学基金项目(69874004)与高校博士点基金资助项目(97028604)的工作成果.

从本书目录看,我们较为有机地介绍了非线性科学与复杂科学所涉及到的主要内容,以及一些重要的工具.在不需要很深知识的情况下尽量让读者较严谨地掌握这些内容与工具,起码能大体上对这些领域有一个概貌性的了解,以便自己在某一方向上再作深入的探索.

注意到这些,本书的篇幅就有严格的控制,选材也须有所讲究,这都是不容易做好的,只能说,我们已尽到努力,只望本书能对读者有所帮助.不到之处敬祈读者不吝赐教.

第二章　非线性动力学与混沌基础

§2.1　动力系统和混沌

§2.1.1　动力系统与流形

动力系统(dynamics or dynamical system)源于19世纪末Poincaré的工作,它常可以看成是微分方程的化身.粗略地说,常微分方程及其差分方程可以分别看成是有限维连续和离散的动力系统,偏微分方程及其差分方程可以分别看成是无穷维连续和离散的动力系统,而拓扑和几何中微分流形上的方程可以看成是微分流形上的动力系统.本书所关心的是 R^n 上的动力系统,称之为 n 维动力系统.

流形的概念:称 $M\subset R^n$ 为一维流形是指 M 是一条曲线,且在 M 中每一点(除端点外)都有惟一的切线存在;称 M 是二维流形,若 M 是曲面,且 M 中每点(边界点除外)都有惟一的切平面存在;一般地,称 $M\subset R^n$ 为 k 维流形($k\leqslant n$),若 M 中的每一点都有惟一的 k 维切空间(边界除外)存在.

记 $\Lambda=[0,\infty)$ 或 $\Lambda=Z_+=\{0,1,\cdots\}$,称映射簇 $\boldsymbol{\varphi}^t:R^n\to R^n$,$t\in\Lambda$ 为 R^n 上的动力系统,若 $\boldsymbol{\varphi}^t$,$t\in\Lambda$ 适合下列半群条件:

$$\text{(i)}\qquad \boldsymbol{\varphi}^{t+s}=\boldsymbol{\varphi}^t\cdot\boldsymbol{\varphi}^s,\quad \forall\, t,s\in\Lambda \tag{2.1}$$

$$\text{(ii)}\qquad \boldsymbol{\varphi}^0(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in R^n \tag{2.2}$$

若 $\Lambda=[0,\infty)$,则 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 为 R^n 上连续的动力系统,$\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$,称 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0)$,$t\in\Lambda$ 为以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的轨道(orbit)或流(flow);若把连续的动力系统限制在 $\Lambda=Z_+$ 上,则为离散的动力系统.

设 R^n 上连续的动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 关于 $t\in[0,\infty)$ 连续可微,且记

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x})\big|_{t=0},\quad \boldsymbol{x}\in R^n \tag{2.3}$$

则轨道 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0)$适合下面的常微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad t \in [0, \infty), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in R^n \tag{2.4}$$

记$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$,因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}^{t+\Delta t}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\Delta t}(\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0)) - \boldsymbol{\varphi}^0(\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0))}{\Delta t} \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0))\end{aligned} \tag{2.5}$$

关于方程(2.4),我们有下列局部存在性和惟一性定理.

定理 2.1 令 $\boldsymbol{f}: R^n \to R^n$ 连续可微,则 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in R^n$,存在 $c > 0$ 使得方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 在$(-c, c)$上有惟一解 $\boldsymbol{\varphi}^t: (-c, c) \to R^n$.

由定理 2.1 可以得出这样的结论:若假设 $\boldsymbol{f}: R^n \to R^n$ 连续可微,连续的动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 总是适合方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,故称其为以 $\boldsymbol{f}$ 为切向量场的动力系统,并且若假设 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 在 $t < 0$ 也同样有定义,则称其为双边动力系统.由此可见,连续动力系统的任何两条轨道只能在 $t = \infty$时相交,关于离散的动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t, t \in Z_+$,若记 $G = \boldsymbol{\varphi}^1$,则我们称 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 是映射 $\boldsymbol{\varphi}^1 = G$ 生成的动力系统.

称 $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 为 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 的不动点或平衡点(equilibrium point),若对于 $\forall t \in \Lambda$,有 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$.称 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0), t \in [0, T] \cap \Lambda$ 为周期 T 轨道,若 $0 < T < \infty, \boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$,且 $\boldsymbol{\varphi}^t(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{x}_0, \forall t \in (0, T) \cap \Lambda$.称离散动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 的周期为 k,是指其轨道为$\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\varphi}^1(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \boldsymbol{\varphi}^{k-1}(\boldsymbol{x}_0)\}$,而不动点可视为周期为 1 的轨道.

平衡点和周期轨道都是非常简单的轨道,但它们是动力系统拓扑结构的最基本的形态,也是动力系统不变集的关键的组成部分.

§2.1.2 平衡点的局部性态

考虑以 f 为切向量场的连续的动力系统 $\boldsymbol{\varphi}^t$,令 $\overline{x}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}^t$ 的平