

SCHAUM'S
ouTlines

全美经典 学习指导系列

机械振动

[美] S. M. 凯利 著

贾启芬 刘习军 译

包括振动测量方法

有限元分析和本征值测定

学会使用计算机软件解决振动问题

完全解答313题

可作为教科书或供自学使用



科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

机 械 振 动

[美] S. M. 凯利 著

贾启芬 刘习军 译

科 学 出 版 社

麦格劳-希尔教育出版集团

2 0 0 2

内 容 简 介

本书是一部很好的关于机械振动理论及习题的教辅书. 全书共 11 章, 主要论述机械系统分析、单自由度系统的自由振动和谐波激励、单自由度系统对任意激励的响应、多自由度系统的自由振动和受迫振动、连续系统的振动、振动控制、有限元法、非线性系统、计算机应用等. 书末还有参考文献和附录.

本书可作为大专院校有关振动专业的教辅书, 也可供有关专业的科研人员及工程技术人员参考.

S. Graham Kelly: Mechanical Vibrations

ISBN: 0 - 07 - 034041 - 2

Copyright © 1996 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill, Inc.

All rights reserved. For sale in the People's Republic of China only.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔国际公司合作出版. 未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

版权所有, 翻印必究.

图书在版编目(CIP)数据

机械振动/[美]凯利(Kelly, S. G.)著;贾启芬等译. - 北京:科学出版社, 2002.

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7 - 03 - 009577 - 4

I. 机… II. ①凯… ②贾… III. 机械振动 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041398 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 1 月第 一 版 开本: A4(890 × 1240)

2002 年 1 月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 1—4 000 字数: 466 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

前言

研究机械振动的科技工作者必须掌握工程学领域的许多知识(静力学、动力学、材料力学、流体力学等),同时也要掌握数学方面的知识(微积分、微分方程和线性代数等),并综合运用这些知识来分析机械振动问题并形成解决该问题的方法。

在分析许多机械系统的振动之前,要求建立它们的模型,并且在包含必须的自由度个数在内的假设之后,运用基本的守恒定律来导出微分方程,应用恰当的数学方法来求解这些微分方程。通常,由模型建立的微分方程,它的解很为人熟悉,在这种情况下就可以运用现存的解。如果情况是这样的话,必须研究它的解法,并将其写成一种可以应用于分析和设计的形式。

学习机械振动的学生必须知道如何运用现有的知识来解决上述问题。本书的目的就是为学习机械振动的学生掌握有关知识提供补充,这种补充将会引导学生进行各方面的振动分析,每章都有一个关于本章理论的简短介绍,后面是大量的例题和习题,这些习题主要反映了该理论如何用在设计和分析应用中。在每章里还有一些习题,更加深入地验证了相应的理论。

本书涉及范围非常广,包括单自由度、多自由度和连续系统的自由振动和受迫振动,并考虑了无阻尼系统和黏性阻尼系统。把带有库仑阻尼和迟滞阻尼的系统考虑为单自由度系统,某些章节还有专门注释。第八章集中介绍振动控制设备的设计,例如隔振器、减振器。第九章从分析的角度介绍了有限元法,第九章习题就是取 n 个元素,应用有限元的方法来分析杆和梁的振动。第十章集中于非线性振动,主要讨论包括自激振动和混沌状态在内的非线性系统与线性系统的差异。第十一章介绍了如何把应用软件用于振动分析与设计。

本书可作为各种振动理论参考书的补充,也可以作为在振动理论发展方面的专门教辅书。总之,本书是研究振动问题解决方法的一个很好的参考资料。

本书作者衷心感谢 McGraw-Hill 的全体工作人员,尤其是约翰·埃里埃诺,感谢他为本书所作的贡献,并感谢他的妻子和儿子,在编书过程中给予的帮助和支持。

S. G. 凯利

配套的 Schaum 的电子指导性语言中的
习 题 和 例 题

在配套的 Schaum's Electronic Tutor 中,有本书中一些习题和例题部分的计算软件. 写有电子指导性语言的 Mathcad 程序,允许每个数据、公式和图形的交互和完整的运算. 在本书中印有“Mathcad”符号标记的地方,则那些习题均可以在 Electronic Tutor 软件中找到. 下面列出了有 Mathcad 软件中的题目. 对于更多的关于软件的信息及包含的屏幕采样实例见附录.

题 1.4	题 3.10	题 4.26	题 7.1	题 8.24
题 1.5	题 3.12	题 5.19	题 7.4	题 8.25
题 1.7	题 3.15	题 5.20	题 7.5	题 8.26
题 1.12	题 3.18	题 5.25	题 7.6	题 8.27
题 1.14	题 3.19	题 5.26	题 7.13	题 8.28
题 1.19	题 3.20	题 5.27	题 7.16	题 8.32
题 2.8	题 3.23	题 5.28	题 7.22	题 8.34
题 2.9	题 3.24	题 5.30	题 7.23	题 8.35
题 2.14	题 3.25	题 5.31	题 7.25	题 8.37
题 2.15	题 3.26	题 5.32	题 8.3	题 9.5
题 2.16	题 3.27	题 5.35	题 8.4	题 9.6
题 2.17	题 3.28	题 5.38	题 8.5	题 9.7
题 2.18	题 3.34	题 5.40	题 8.6	题 9.13
题 2.19	题 3.35	题 5.41	题 8.10	题 9.14
题 2.20	题 3.36	题 5.42	题 8.11	题 10.6
题 2.21	题 3.38	题 5.44	题 8.12	题 10.8
题 2.22	题 3.40	题 5.45	题 8.13	题 10.11
题 2.23	题 4.3	题 6.3	题 8.14	题 11.4
题 2.25	题 4.5	题 6.9	题 8.15	题 11.5
题 2.29	题 4.6	题 6.10	题 8.16	题 11.6
题 3.4	题 4.13	题 6.11	题 8.17	题 11.7
题 3.5	题 4.18	题 6.12	题 8.18	题 11.8
题 3.7	题 4.19	题 6.15	题 8.19	题 11.9
题 3.8	题 4.24	题 6.16		

目 录

前言	(i)
配套的 Schaum 的电子指导性语言中的习题和例题	(iii)
第一章 机械系统分析	(1)
§ 1.1 自由度和广义坐标	(1)
§ 1.2 机械系统组成	(1)
§ 1.3 等效系统分析	(1)
§ 1.4 扭转系统	(1)
§ 1.5 静平衡位置	(2)
第二章 单自由度系统的自由振动	(25)
§ 2.1 微分方程的推导	(25)
§ 2.2 微分方程的标准形式	(25)
§ 2.3 无阻尼响应	(26)
§ 2.4 阻尼响应	(26)
§ 2.5 满足库仑阻尼系统的自由振动响应	(28)
第三章 单自由度系统的谐波激励	(46)
§ 3.1 微分方程的推导	(46)
§ 3.2 谐波激励	(46)
§ 3.3 无阻尼系统的响应	(46)
§ 3.4 阻尼系统响应	(48)
§ 3.5 频率平方的激励	(49)
§ 3.6 谐波支撑激励	(50)
§ 3.7 多频激励	(51)
§ 3.8 一般循环激励, 傅里叶级数	(51)
§ 3.9 库仑阻尼	(52)
§ 3.10 迟滞阻尼	(52)
第四章 单自由度系统对任意激励的响应	(78)
§ 4.1 微分方程的一般形式	(78)
§ 4.2 卷积积分	(78)
§ 4.3 拉普拉斯变换解法	(78)
§ 4.4 单位脉冲函数和单位阶跃函数	(79)
§ 4.5 数值方法	(79)
§ 4.6 响应谱	(79)
第五章 多自由度系统的自由振动	(98)
§ 5.1 拉格朗日方程	(98)
§ 5.2 线性系统微分方程的矩阵公式	(98)
§ 5.3 刚度影响系数	(98)
§ 5.4 柔度矩阵	(99)
§ 5.5 标准模态解	(99)
§ 5.6 模态正交性	(99)
§ 5.7 矩阵迭代法	(99)

§ 5.8 阻尼系统	(100)
第六章 多自由度系统的受迫振动	(133)
§ 6.1 一般系统	(133)
§ 6.2 简谐激励	(133)
§ 6.3 拉普拉斯变换解	(133)
§ 6.4 比例阻尼系统的模态分析	(133)
§ 6.5 一般阻尼系统的模态分析法	(134)
第七章 连续系统的振动	(151)
§ 7.1 波动方程	(151)
§ 7.2 波动方程的解	(151)
§ 7.3 标准模态解	(151)
§ 7.4 梁的横向振动方程	(152)
§ 7.5 模态叠加法	(152)
§ 7.6 瑞利商	(153)
§ 7.7 瑞利-里兹法	(153)
第八章 振动控制	(174)
§ 8.1 隔振器	(174)
§ 8.2 简谐激励的隔振	(174)
§ 8.3 冲击隔振	(175)
§ 8.4 脉冲隔振	(175)
§ 8.5 减振器	(176)
§ 8.6 阻尼减振器	(176)
§ 8.7 Houdaille 阻尼减振器	(177)
§ 8.8 旋转	(178)
第九章 有限元法	(195)
§ 9.1 一般方法	(195)
§ 9.2 受迫振动	(195)
§ 9.3 杆元	(196)
§ 9.4 梁元	(196)
第十章 非线性系统	(211)
§ 10.1 与线性系统的差异	(211)
§ 10.2 定性分析	(211)
§ 10.3 达芬方程	(212)
§ 10.4 自激振动	(213)
第十一章 计算机应用	(222)
§ 11.1 振动专用应用软件	(222)
§ 11.2 电子表格程序	(222)
§ 11.3 电子记事本	(222)
§ 11.4 符号处理程序	(222)
参考文献	(245)
附录 配套的 Schaum 的电子指导性语言 (Electronic Tutor) 中的屏幕采样实例	(246)

第一章 机械系统分析

§ 1.1 自由度和广义坐标

在机械系统分析中所使用的自由度数目就是能完全描述系统的每个质点的运动所必需的独立运动坐标数目.任何这样一套坐标都称为广义坐标.广义坐标的选择是不惟一的.位移、速度、加速度等条件可作为广义坐标对时间导数的函数.有限个自由度数的系统称为离散系统,而无限个自由度数的系统称为连续系统或参数分布系统.

§ 1.2 机械系统组成

一个机械系统包括惯性成分、刚度成分和阻尼成分.当系统运动的时候,惯性成分具有动能.转动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2, \quad (1.1)$$

其中 $\bar{v}$ 为物体质心速度, ω 是关于绕垂直于运动平面的轴转动的角速度, m 是物体的质量, $\bar{I}$ 是绕平行与通过质心转轴的转动惯量.

线性刚度成分(线性弹簧)具有如下形式的力-位移关系:

$$F = kx, \quad (1.2)$$

其中 F 是施加的力, x 是从原长状态起的伸长量.刚度 k 具有的量纲为 N/m, 单位长度改变量的力.

阻尼器是对机械系统加黏性阻尼的力学装置.线性阻尼成分具有如下力-速度关系:

$$F = cv, \quad (1.3)$$

其中 c 是阻尼系数, 具有的量纲为 N·s/m.

§ 1.3 等效系统分析

所有单自由度的黏性阻尼系统都可简化为如图 1.1 所示的质量-弹簧-阻尼系统.令 x 为广义坐标, 线性系统的动能可写为

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2. \quad (1.4)$$

线性系统的势能可表示为

$$V = \frac{1}{2} k_{eq} x^2. \quad (1.5)$$

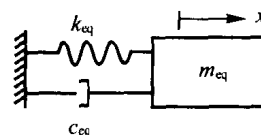


图 1.1

线性系统中任意两点 x_1 和 x_2 间由黏性阻力所作的功可表示为

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} c_{eq} \dot{x} dx. \quad (1.6)$$

§ 1.4 扭转系统

当用角坐标系作为一个线性系统的广义坐标系时, 可用如图 1.2 所示的等效扭转系统来对该系统进行模式化. 线性扭转弹簧的扭矩正比于它的角位移, 而线性扭转黏性阻尼器的扭矩则与其角速度成正比. 在所选择的广义坐标系下, 通过计算总的动能、势能和黏性阻力对初始系统所作的功来确定扭转系统的等效系统参数, 该动能、势能和黏性阻力对初始系统所作的功可表示为

$$T = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2, \quad (1.7)$$

$$V = \frac{1}{2} k_{teq} \theta^2, \quad (1.8)$$

$$W = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{teq} \dot{\theta} d\theta. \quad (1.9)$$

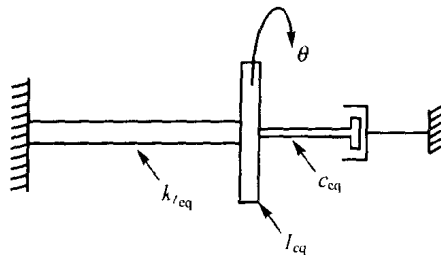


图 1.2

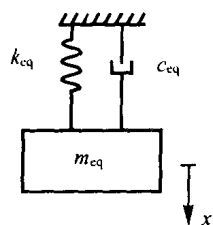


图 1.3

§ 1.5 静平衡位置

如图 1.3 所示的系统具有弹性元件,所以当该系统处于平衡状态时也受力.在弹性因素影响下所产生的变形叫做静变形,通常用 Δ_{st} 来表示.在线性系统中,弹性因素的静变形对于系统的等效刚度没有影响.

例 题

- 1.1 试求如图 1.4 所示刚性杆的振动系统中自由度的数目,并规定出该振动系统中可用的广义坐标系.

解 因为该杆是刚性的,所以该系统只有一个自由度.选择广义坐标为 θ ,即杆的角位移,此角位移从系统的平衡状态开始,顺时针为正的方向为度量.

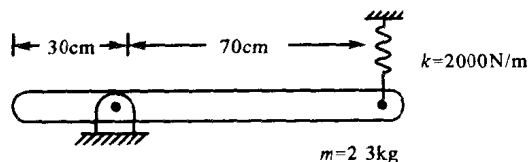


图 1.4

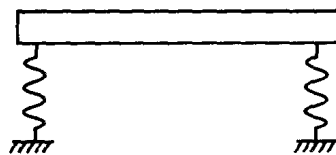


图 1.5

- 1.2 分析如图 1.5 所示的机械系统,试求所需的自由度数,并规定出在进行振动分析时可用的广义坐标系.

解 设 x 为刚性杆质心的位移,从系统平衡位置开始测量.为了确定杆上其他质点的位移,光知道 x 本身是不够的.因此,该系统不止有一个自由度.

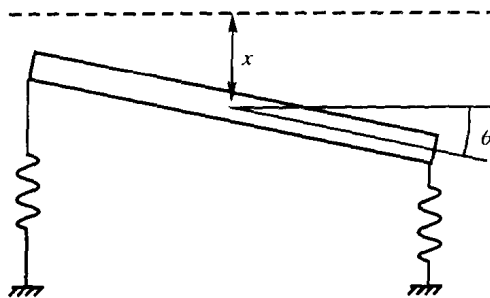


图 1.6

设 θ 为杆的顺时针角位移, 从杆在其平衡位置的轴线开始测量. 如果 θ 很小, 则杆右端的位移为 $x + (L/2)\theta$. 因此, 系统具有两个自由度, 即 x 和 θ 可作为广义坐标, 如图 1.6 所示.

- 1.3 在对如图 1.7 所示的机械系统进行分析时, 试求所用到的自由度数目. 并规定一套系统振动分析时所用到的广义坐标.

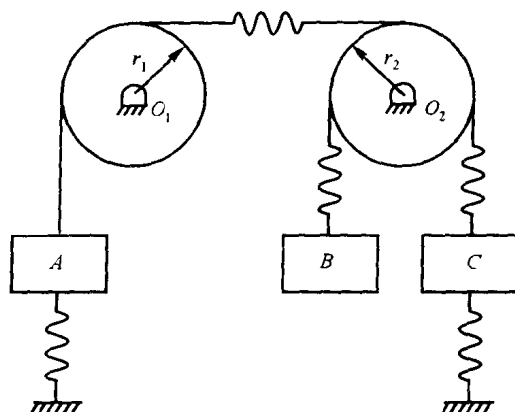


图 1.7

解 图 1.7 所示的系统有 4 个自由度. 一套可行的广义坐标为: θ_1 , 即以 O_1 为圆心的圆盘从平衡位置起顺时针角位移; θ_2 , 即以 O_2 为圆心的圆盘从平衡位置起顺时针角位移; x_1 , 物块 B 向下的位移; x_2 , 物块 C 向下的位移. 注意到物块 A 向上的位移由 $r_1\theta_1$ 给出, 因此, 从运动上来讲, 它对于该圆盘的运动是不独立的.

- 1.4 一个紧绕式螺旋线圈弹簧由一个直径为 18 mm 的杆制成, 该杆为 0.2% 的硬性钢 ($G = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) 制成. 该弹簧有 80 个线圈匝数, 每个线圈的直径为 16 cm. 当该弹簧一端固定, 另一端垂直悬挂一个 200 kg 的物块时, 弹簧的伸长为多少?

解 螺旋线圈的刚度为

$$k = \frac{GD^4}{64Nr^3},$$

其中 D 是杆的直径, r 为线圈半径, N 为线圈匝数. 将已知量代入上式可得

$$k = \frac{\left(80 \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) (0.018\text{m})^4}{64(80)(0.08\text{m})^3} = 3.20 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

运用方程(1.2), 可得弹簧的伸长为

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{(200\text{kg}) \left(3.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{3.20 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.613\text{m}.$$

- 1.5 试求如图 1.8 所示杆的纵向刚度.

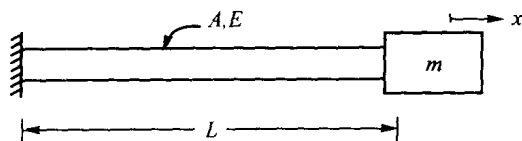


图 1.8

解 图 1.8 所示的物块的纵向运动可被模型化, 即为如图 1.1 所示的无阻尼系统. 当杆的一端有力 F 作用时, 其长度变化为

$$\delta = \frac{FL}{AE},$$

或是用方程(1.2)中的形式

$$F = \frac{AE}{L} \delta,$$

因此

$$k_{eq} = \frac{AE}{L}.$$

1.6 试求如图 1.9 所示系统中转动轴的扭转刚度.

解 如果在轴的末端加一个力矩 M , 则由材料力学可知轴端的扭转角为

$$\theta = \frac{ML}{JG},$$

其中 J 为轴的截面极惯性矩. 因此

$$M = \frac{JG}{L}\theta.$$

轴的等效扭转强度为

$$k_t = \frac{JG}{L}.$$

对如图 1.9 所示的轴来说

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}[(0.025\text{m})^4 - (0.015\text{m})^4] = 5.34 \times 10^{-7}\text{m}^4$$

因此

$$k_t = \frac{(5.34 \times 10^{-7}\text{m}^4)(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{1.4 \text{ m}} = 3.05 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

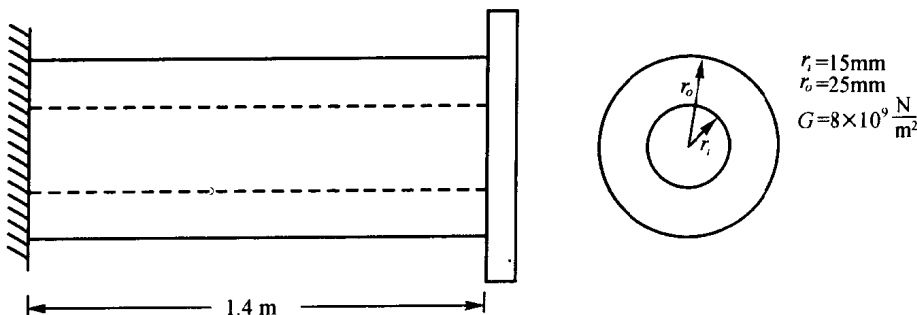


图 1.9

1.7 一个比如图 1.10 所示的梁的质量大的多的机器被置放在该梁上. 因为梁的惯性与机器的惯性相比要小的多, 所以可以用一个具有单自由度的模型来分析该机器的振动. 用如图 1.3 所示的模型来简化该系统. 当该机器置放在梁上, 求其等效弹簧刚度. 设

解 (a) $z = 1 \text{ m}$

(b) $z = 1.5 \text{ m}$

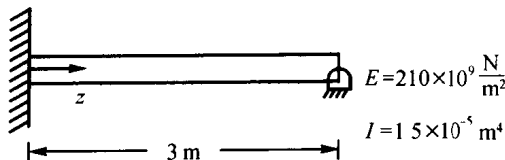


图 1.10

设函数 $w(z;a)$ 为该梁在位置 z 处由于在 $z = a$ 处施加单位载荷而产生的变形. 从材料力学可知, 该梁的变形是线性的, 因此当施加一个大小为 F 的载荷时, 变形为

$$y(z;a) = Fw(z;a).$$

如果机器置于梁上的 $z = a$ 位置, 则在该位置的变形为

$$y(a;a) = Fw(a;a)$$

该式与方程(1.2)相似, 于是

$$k = \frac{1}{w(a; a)}. \quad (1.10)$$

根据材料力学, 当梁在 $z=0$ 处固定, 在 $z=L$ 处铰接, 并在 $z=a$ 处作用一个单位载荷时, 在 $z < a$ 段的变形为

$$w(z; a) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{z^3}{12} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left[\left(\frac{a}{L} \right)^2 - 2 \frac{a}{L} - 2 \right] + \frac{z^2 a}{4} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left(2 - \frac{a}{L} \right) \right\}. \quad (1.11)$$

(a) 当 $a=1\text{ m}$, $a/L=1/3$ 时, 则由方程(1.10)和(1.11)可得

$$\begin{aligned} k_{\text{eq}} &= \frac{1}{w(a; a)} = \frac{81EI}{11a^3} \\ &= \frac{81 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{11(1\text{m})^3} = 2.32 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}; \end{aligned}$$

(b) 当 $a=1.5\text{ m}$, $a/L=1/2$ 时, 用方程(1.10)和(1.11)可得

$$\begin{aligned} k_{\text{eq}} &= \frac{1}{w(a; a)} = \frac{96EI}{7a^3} \\ &= \frac{96 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{7(1.5\text{m})^3} = 1.28 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

- 1.8 一个质量为 m 的机器挂在一个长为 L 的简支梁的中间跨上, 该梁的弹性模量为 E , 截面惯性矩为 I . 机器的质量远远大于梁的质量, 因此可用一个单自由度模型来简化该系统. 求当用中间跨变形作为广义坐标时, 该梁的等效刚度是多少?

解 当一个简支梁的中间施加一个大小为 F 的集中载荷时, 该梁在中间跨处的挠度为

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI}.$$

当在中间跨处施加一个单位集中载荷时, 等效刚度是中间跨挠度的倒数. 因此

$$k_{\text{eq}} = \frac{48EI}{L^3}.$$

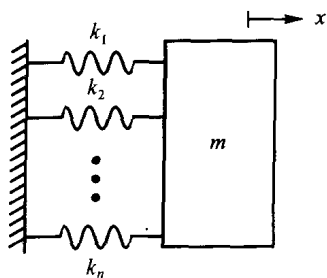


图 1.11

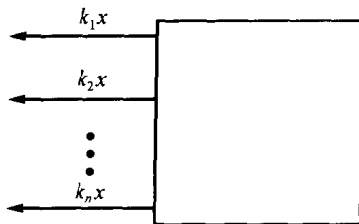


图 1.12

- 1.9 如图 1.11 所示, 弹簧是相互并联的. 如果图 1.11 的系统由图 1.1 所示的系统所等效, 试推出该并联弹簧组合的等效刚度.

解 如果物块有任意位移 x , 则在该平衡组合当中每根弹簧的长度变化为 x . 图 1.12 隔离体中画出了该物块所受到的全部作用力

$$F = k_1x + k_2x + k_3x + \cdots + k_nx = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x. \quad (1.12)$$

当图 1.1 所示系统的弹簧有位移 x , 并且受力与方程(1.12)相等时, 图 1.1 所示系统可以用来对图 1.11 所示系统进行模型化. 如果图 1.1 的弹簧有位移 x , 那么其物块的受力为

$$F = k_{\text{eq}}x. \quad (1.13)$$

如要使方程(1.12)和(1.13)相等, 则有

$$k_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

- 1.10 如图 1.13 所示系统的弹簧为串联. 如果该系统可用图 1.1 所示系统模型化, 试推导该串联弹簧组合方程.

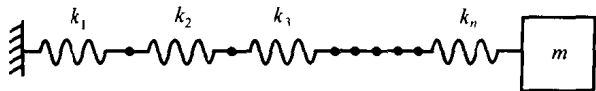


图 1.13

解 设 x 为图 1.13 所示物块在任意瞬时的位移. 设 x_i 为从固定支承端开始第 i 根弹簧的长度变化. 若假定每根弹簧是无质量的, 那么每根弹簧在其端点处受力大小相等方向相反, 如图 1.14 所示. 因此每根弹簧的受力相等,

$$k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_3 x_3 = \cdots = k_n x_n. \quad (1.14)$$

另外

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.15)$$

将方程(1.14)中得到的 x_i 值代入方程(1.15)中得到

$$F = \frac{x}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}. \quad (1.16)$$

注意到图 1.1 所示系统中物块在任意位移 x 时的受力为 $k_{eq}x$, 使其与方程(1.16)相等可得到

$$k_{eq} = \frac{x}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}.$$



图 1.14

1.11 对如图 1.15 所示的系统进行模型化, 试将其物块连接在具有等效刚度的单个弹簧上.

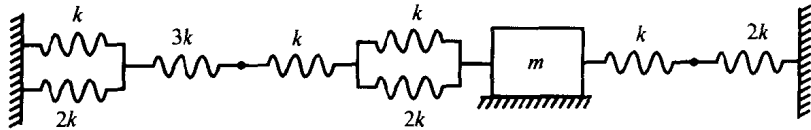


图 1.15

解 第一步先用从题 1.9 的结果中得到的弹簧等效刚度来代替图中的并联组合, 如图 1.16 (a) 所示. 在物块左边的弹簧是一个个串联在一起的. 用题 1.10 的结果, 可以由一根弹簧取代它们, 该弹簧的刚度计算如下:

$$\frac{1}{\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k}} = \frac{k}{2}.$$

连在物块右边的弹簧是串联, 它们可用一根弹簧来取代, 该弹簧的刚度为

$$\frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k}{3}.$$

如图 1.16(b)所示. 当物块有任意位移 x 时, 图 1.16(b)所示的每根弹簧的位移均相等, 作用在物块上的力为作用在每根弹簧上的力的总和. 因此这些弹簧表现出并联的特征, 故可以被单弹簧所取代, 该单弹簧的刚度为

$$\frac{k}{2} + \frac{2k}{3} = \frac{7k}{6}.$$

如图 1.16(c)所示.

1.12 对图 1.17 所示的扭转系统进行模型化, 使其圆盘连接在一个具有等效刚度的扭转弹

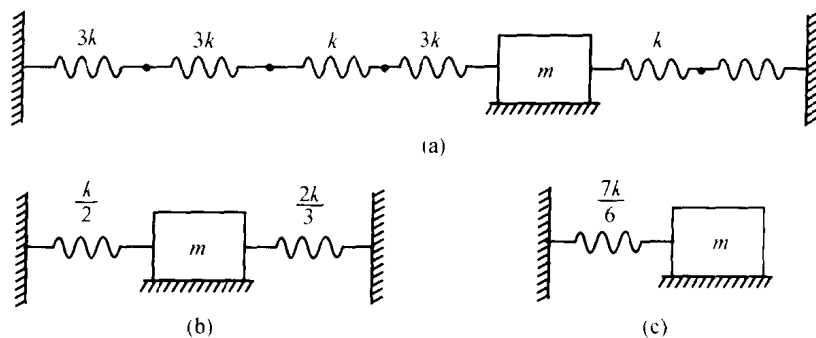


图 1.16

簧上。

解 图 1.17 中各轴的刚度计算如下：

$$\begin{aligned}
 k_{AB_{\text{铝}}} &= \frac{J_{AB_{\text{铝}}} G_{AB_{\text{铝}}}}{L_{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2} [(0.04\text{m})^4 - (0.02\text{m})^4] \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{0.6\text{m}} \\
 &= 5.03 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{AB_{\text{钢}}} &= \frac{J_{AB_{\text{钢}}} G_{AB_{\text{钢}}}}{L_{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.02\text{m})^4 \left(40 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{0.6\text{m}} = 1.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{BC} &= \frac{J_{BC} G_{BC}}{L_{BC}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.08\text{m})^4 \left(80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{0.8\text{m}} = 1.65 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}, \\
 k_{DE} &= \frac{J_{DE} G_{DE}}{L_{DE}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0.025\text{m})^4 \left(40 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{1.2\text{m}} = 2.05 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.
 \end{aligned}$$

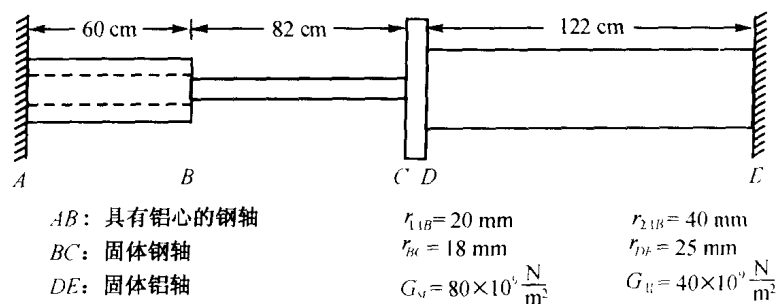


图 1.17

轴 AB 的铝心在末端的扭转角与轴 AB 的钢套在末端的扭转角是相等的。同样，轴 AB 在末端的总扭矩为铝心的抗扭矩和钢套的抗扭矩的总和。因此，轴 AB 的铝心和钢套可看作是并联的扭转弹簧，其等效刚度为，

$$\begin{aligned}
 k_{AB} &= k_{AB_{\text{铝}}} + k_{AB_{\text{钢}}} = 5.03 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} + 1.68 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \\
 &= 5.20 \times 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.
 \end{aligned}$$

轴 AB 与轴 BC 的扭矩是相等的，圆盘的角位移为 $\theta_{AB} + \theta_{BC}$ 。因此，轴 AB 与 BC 可为串联的扭转弹簧，它们的组合与轴 DE 并联。因此等效刚度为

$$k_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{BC}}} + k_{DE} = 3.65 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}.$$

1.13 用机器的位移作为广义坐标，试推导图 1.18 所示系统的等效刚度表达式。

解 设有一个向下的集中载荷 F_1 加在该简支梁的中间跨上,使其发生挠度 x .在弹簧上产生一个压缩力 kx .在梁的中间跨上向下作用的总力为 $F_1 - kx$.由问题 1.8 可知,一个简支梁由于在其中间跨处施加集中载荷而产生的挠度为

$$x = \frac{FL^3}{48EI},$$

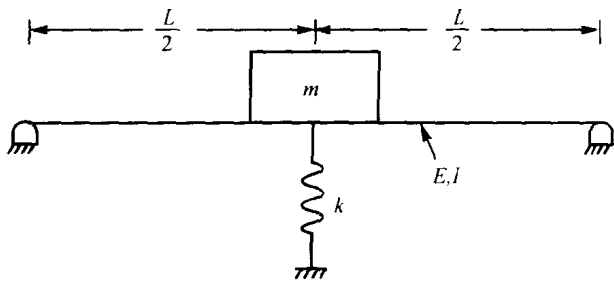


图 1.18

所以对于图 1.18 所示的梁来说,有

$$x = (F_1 - kx) \frac{L^3}{48EI}.$$

从它可推出

$$x = \frac{F_1}{k + \frac{48EI}{L^3}}.$$

通过设 $F_1 = 1$ 可得到等效刚度,即为

$$k_{eq} = k + \frac{48EI}{L^3}.$$

用题 1.9 的结果,可以证明梁和弹簧可以看作二弹簧的并联.

1.14 由图 1.19 中物块的位移作为广义坐标,求图中系统的等效刚度是多少?

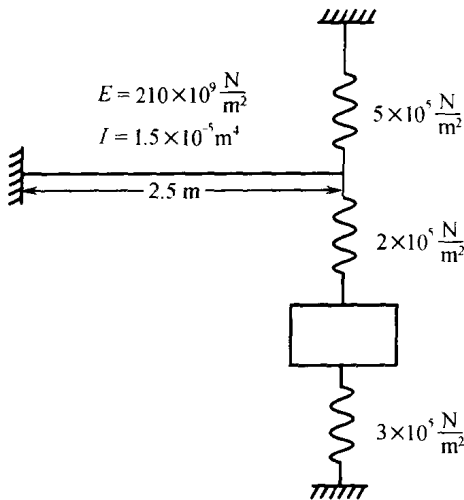


图 1.19

解 在自由端受单位集中载荷的悬臂梁在它的自由端的挠度是 $L^3/(3EI)$.因此悬臂梁的等效刚度是

$$\begin{aligned} k_b &= \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \left(210 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (1.5 \times 10^{-5} \text{m}^4)}{(2.5\text{m})^3} \\ &= 6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

对题 1.14 的分析说明了梁和上面的弹簧的运动是并联的. 然后这个并联组合又与梁和物块之间的弹簧串联, 最后此串联的组合又与物块和固定面连接的弹簧并联. 因此对系统应由并联和串联的组合公式并计算它的等效刚度为

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{6.05 \times 10^5 \frac{N}{m^2}} + \frac{1}{5 \times 10^5 \frac{N}{m^2}} + \frac{1}{2 \times 10^5 \frac{N}{m^2}}} + 3 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$$

$$= 4.69 \times 10^5 \frac{N}{m^2}.$$

- 1.15 如图 1.20 所示的阻尼器包含一个容器, 这个容器里含有阻尼系数为 μ 和深度为 h 的黏性流体. 一个平板所在接触面积为 A 的容器的表面上滑动. 求这个黏性阻尼器的阻尼系数是多少?



图 1.20

解 令 y 为流体的一个坐标, 并以容器的底部为原点. 如果 h 很小而且可忽略不稳定因素, 则流体中的速度分布 $u(y)$ 是线性的, 有 $u(0) = 0, u(h) = v$, 如图 1.21 中所示. 其中平板的速度是 v . 速度分布的数学公式是

$$u(y) = v \frac{y}{h}.$$

作用在平板上的剪切力可以用牛顿公式计算

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

推导出

$$\tau = \frac{\mu v}{h}.$$

总黏性力是由分布的剪切力合成的, 即

$$F = \tau A = \frac{\mu A}{h} v,$$

则力和平板速度之间的比例系数是阻尼系数, 为

$$c = \frac{\mu A}{h}.$$

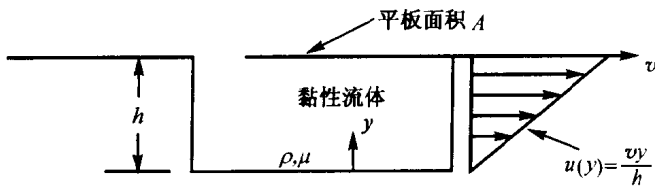


图 1.21

- 1.16 图 1.22 中的扭转阻尼器包含一个连接有转动轴的薄盘. 盘表面半径是 R , 并且在一个黏性度为 μ , 深度为 h 的容器中旋转. 求这个阻尼器的扭转黏性阻尼系数.

解 令 τ 为作用在圆盘表面上微元面积 $dA = r dr d\theta$ 的剪应力, 如图 1.23 所示. 由于受到分布的剪应力作用旋转轴的合成扭矩为

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau (r dr d\theta). \quad (1.17)$$

如果轴和盘的角速度为 ω , 那么微元的速度就为 $r\omega$. 从容器的底部以流体向上的位置为坐标 y . 并忽

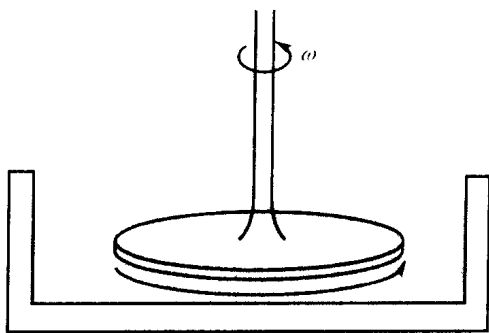


图 1.22

略不稳定因素.假定流体的深度很小,流体中的速度分布 $u(r, y)$ 可近似看成 y 的线性函数,并且有 $u(r, 0) = 0, u(r, h) = r\omega$, 可推导出

$$u(r, y) = \frac{r\omega}{h}y,$$

作用在盘上的剪应力可以用牛顿黏性定律来计算

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(r, h) = \frac{r\mu\omega}{h}.$$

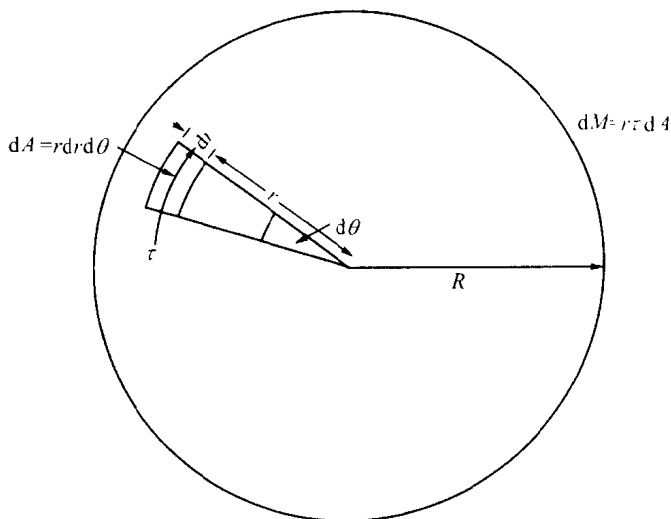


图 1.23

把上面的剪应力代到式(1.17)中, 得到

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu r^3 \omega}{h} dr d\theta = \frac{\mu \pi R^4}{2h} \omega.$$

扭转阻尼系数即为扭矩与角速度之间的比例常数

$$c_t = \frac{\mu \pi R^4}{2h}.$$

- 1.17 证明连接在固定支撑, 并有一个自由度系统的线性弹簧的惯性因素可以同具有 $1/3$ 弹簧质量的质点与该无重弹簧连接的系统所近似等效.

解 设弹簧均质并原长为 l , 由于弹簧质量不太大, 则系统仍可看成 一个自由度的系统. 而弹簧上各点的位移可近似与该点到悬挂点的距离成正比. 令 m_r 是离悬挂点距离为 $r(r)$ 的弹簧质量; 令 m_{cq} 是弹簧端点的质心的质量, 则此质点可近似表示弹簧的惯性因素, 设弹簧的动能是

$$T = \frac{1}{2} m_{cq} \dot{x}^2.$$

令 z 为沿弹簧的轴线的坐标, 并设弹簧此时没有变形, 即 $0 \leq z \leq l$, 如图 1.24 中所示. 设位移函数