结构工程师基础数学和力学

袁海军／编写

JIEGOU GONGCHENGSHI JICHU SHUXUE HE LIXUE

中国建材工业出版社

结构工程师

基础数学和力学

袁海军　编写

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

结构工程师基础数学和力学/袁海军编著．—北京：
中国建材工业出版社，2000.4
ISBN 7-80090-993-X

I. 结… II. 袁… III. ①数学②力学 IV. ①01
②03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07894 号

内 容 提 要

本书共分 13 个部分，即向量代数和空间解析几何、微分学、积分学、级数、微分方程、概率与数理统计、线性代数、线性规划、材料力学、结构力学、流体力学、土力学、弹性力学。每一章内容都汇编了一些与结构专业关系较为密切的例题，以便于读者进一步理解各部分的知识要点。

本书不仅可作为从事建筑工程及相关专业科技人员的参考用书，也可作为土建结构人员参加注册结构工程师基础考试的复习资料。

结构工程师基础数学和力学

袁海军 编写

*

中国建材工业出版社出版

北京海淀区三里河路 11 号 邮编：100831

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京忠信诚胶印厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：10.75 字数：275 千字

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—5000 册 定价：19.80 元

ISBN 7—80090—993—X/TV · 267

前　言

对于结构工程师来说，数学和力学是两门非常重要的基础课。随着结构工程中各种计算软件的出现，许多从事建筑工程的同志往往忽视了这两门基础课的学习或苦于找不到这方面的系统书籍。为帮助结构工程师能查阅工程实践中常用数学和力学的需要，编写这本《结构工程师基础数学和力学》。本书力争从建筑结构计算和其它从事建筑工程相关专业的实际需要出发，介绍数学和力学的主要概念和基本运算法则，尽可能地避免一系列概念的抽象描述，从结构专业的有关参考文献中汇编了一些典型例题，以便所学理论能更好地用于工程实践。本书不仅可作为从事建筑工程及相关专业科技人员的参考用书，也可作为土建结构人员参加注册结构工程师基础考试的复习资料。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，恳请广大读者批评指正。书中引用的有关书籍，在此谨表诚挚谢意。

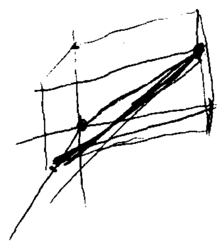
编　者

1999 年 9 月 10 日

目　　录

第一篇　数　　学

第一章　向量代数与空间解析几何



1.1　向量的概念

空间内具有一定长度和方向的线段称为向量。

$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

单位向量 $\vec{a}_0=\dfrac{a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=(\cos\alpha)\vec{i}+(\cos\beta)\vec{j}+(\cos\gamma)\vec{k}$

方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

1.2　向量的运算

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$

两向量的和：$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$

两向量的差：$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$

向量与数的乘法：$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$

两向量的数积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

两向量的矢积：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

两向量的矢积为一向量，记 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ 则

(1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})$

(2)$\vec{c}\perp\vec{a}$,$\vec{c}\perp\vec{b}$

(3)$\vec{c}$的正向按右手规则四个手指从 $\vec{a}$转向 $\vec{b}$,大拇指的指向为 $\vec{c}$的方向。

1.3 两向量垂直、平行、夹角的坐标表示

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}=\lambda\vec{b} \qquad \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}))=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

1.4 平面方程

(1)一般式

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(2)点法式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

过(x_0,y_0,z_0)点,且法线的方向数为 A,B,C.

(3)截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

a,b,c 分别为平面在三个轴上的截距。

(4)三点式

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & x-x_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0$$

(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)表示平面通过的三个点。

1.5 空间直线方程

(1)交面式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

方向数为$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

(2)点法式

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

过(x_0,y_0,z_0)点,且方向数为 m,n,p.

(3)参数式

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \qquad (t\text{ 为参数}) \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

过(x_0,y_0,z_0)点,且方向数为 m,n,p.

(4)两点式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

过(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)两个不同点。

1.6 空间曲面方程

(1)球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

球面在点(a,b,c)，半径为 R.

(2)椭圆球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

式中 a,b,c 为椭球面的半轴.

(3)椭圆抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

(4)双曲抛物面(马鞍面)

$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

(5)二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

1.7 空间曲线方程

(1)一般方式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

(2)参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=\varphi(t)\\z=\psi(t)\end{cases}$$

(3)圆柱螺线

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=(r\mathrm{tg}\alpha)\cdot\theta\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x=\gamma\cos\theta\\y=\gamma\sin\theta\\z=k\theta\end{cases}$$

1.8 点线面间相互关系

(1)点 $p(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(2)直线$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$与平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 夹角

$$\sin\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{l}}{|\vec{n}||\vec{l}|}=\frac{|m_1A_1+n_1B_1+p_1C_1\}}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

1.9 例题

〔**例 1**〕 设力 $\vec{F}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$作用在一质点上，质点由 $M_1(1,2,-1)$沿直线移动到

$M_2(3,1,2)$，求此力所作的功（力的单位为牛顿，位移的单位为米）。

〔**解**〕 位移向量 $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1)\vec{i}+(1-2)\vec{j}+(2+1)\vec{k}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

所作的功 $W=\vec{F}\cdot\vec{S}=2\times 2+(-3)(-1)+4\times 3=19(\mathrm{N\cdot m})$

〔**例 2**〕 求三点 $P(1,1,1)$，$Q(2,2,2)$，$R(4,3,5)$所成三角形面积。

〔**解**〕 $\triangle PQR$ 的面积等于以$\vec{PQ}$和$\vec{PR}$为邻边的平行四边形的面积的一半，而平行四边形的面积可用矢积求得。

$\vec{PQ}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$， $\vec{PR}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

$$\vec{PQ}\times\vec{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\triangle PQR$ 的面积$=\dfrac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

〔**例 3**〕 求过点$(3,2,4)$且与平面 $2x+y-5z+7=0$ 平行的平面方程。

〔**解**〕 因所求平面与已知平面平行，故所求平面的法线向量与已知平面的法线向量 $\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$是一样的。所求平面方程为

$2(x-3)+1(y-2)-5(z-4)=0$

即 $2x+y-5z+12=0.$

第二章 微 分 学

2.1 极限的运算

(1)函数极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$（$C$ 为常数）

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

5) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n$

(2)两个重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

(3)几个常用极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$　　4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$　　6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

(4)洛毕达法则

1)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$(或$\infty$)，而$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

2)若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$(或$\infty$)，而$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\infty$)，则$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

2.2 导数与微分

(1)导数的运算法则

若 $u=u(x)$，$v=v(x)$均为可导函数，则有

1) $(cu)'=cu'$　　(c 为常数)

2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

3) $(uv)'=u'v+uv'$

4) $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$　　$(v\neq 0)$

(2)复合函数求导法则

若　$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$

则　$y'_x=f'(u)\cdot\phi'(x)$　或　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

(3)导数基本公式

1)常数与幂函数求导

$(c)'=0$，$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

2)指数函数与对数函数求导

$(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

3)三角函数求导

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，

$(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x$，$(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2 x$，

$(\sec x)'=\sec x\cdot\mathrm{tg}x$，$(\csc x)'=-\csc x\cdot\mathrm{ctg}x$.

4)反三角函数求导

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

(4)高阶导数

1) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$　　2) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

3) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$

4)若 $y=(1+x)^m$，则 $y^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$

5)若 $y=\sin x$，则 $y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

6)若 $y=\cos x$，则 $y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

7)若 $y=arc\mathrm{tg}x$，则 $y^{(n)}=(n-1)!\ \cos^n y\sin(ny+\frac{n\pi}{2})$

8)若 $y=e^x$，则 $y^{(n)}=e^x$

9)若 $y=a^x$，则 $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

(5)函数近似值的计算

当 $|\triangle x|$ 很小时，有

$$f(x+\triangle x)\approx f(x)+f'(x)\triangle x$$

特别地，在上式中令 $x=0$，$\triangle x=x$，得

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

常用近似公式($|x|$很小时)：

$(1+x)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{1}{n}x$，　　$\sin x\approx x$，

$\mathrm{tg}x\approx x$，　　$e^x\approx 1+x$，

$\ln(1+x)\approx x$，　　$\arcsin x\approx x$，

$arc\mathrm{tg}x\approx x$

(6)可导函数极限的判定

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

1)如果 $f''(x_0)>0$，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

2)如果 $f''(x_0)<0$，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值。

(7)弧长的微分与曲率

1)弧长的微分

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx$$

2)曲率

曲率　$k=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$

曲率半径 $R=\frac{1}{|k|}=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$

2.3 多元函数的偏导数与全微分

(1)偏导数

设 $z=f(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}$$

(2)全微分

若 $z=f(x,y)$ 的各偏导数都存在且连续，则

$$dz=d_xz+d_yz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(3)复合函数微分法

1)设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$则'

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

2)设 $z=f(x,u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

3)设 $z=f(u,v)$，$u=u(x)$，$v=v(x)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

(4)二元函数近似值的计算

当二元函数 $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$连续，且$|\triangle x|$，$|\triangle y|$很小时，有

$$f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial z}{\partial y}\triangle y$$

(5)二元函数的无条件极限

1)必要条件　若函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处可微分且有极限，则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0\qquad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$$

2)充分条件　若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，将二阶偏导数记为：$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$则有下列判别法则：

①$B^2-AC<0$ 时，则 $f(x_0,y_0)$是极值，且当 $A<0(C<0)$时，为极大值；$A>0(C>0)$时，为极小值。

②$B^2-AC>0$ 时，则 $f(x_0,y_0)$不是极值。

③$B^2-AC=0$ 时，则 $f(x_0,y_0)$不能肯定是否为极值。

(6)多元函数的条件极限(拉格朗日乘数法)

1)要找函数 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可以先构成函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

其中 λ 是某一常数。求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为 0，然后与条件联立，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\[2ex]\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

由方程组解出 x，y 和 λ，则其中 x，y 就是可能极值点的坐标。

2)要找函数 $u=f(x,y,z)$在条件 $\varphi_1(x,y,z)=0$ 及 $\varphi_2(x,y,z)=0$ 下的可能极值点，可以先构成函数

$$F(x,y,z)=u(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$$

其中 λ_1、λ_2 为常数。求其对 x，y，z 的一阶偏导数，并使之为 0，然后与条件联立，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}=0 \\ \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

由方程组解出 x、y、z 和 λ_1，λ_2，则其中 x、y、z 就是可能极值点的坐标。

2.4 例题

〔**例 1**〕 求函数 $y=e^{arctg\sqrt{x}}$ 的导数

〔**解**〕 $y'=e^{arctg\sqrt{x}}(arctg\sqrt{x})'=e^{arctg\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})'$

$$=e^{arctg\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{arctg\sqrt{x}}$$

〔**例 2**〕 求函数 $y=x^{x^x}$ 的导数

〔**解**〕 对等式两边取自然对数，得

$$\ln y=x^x\ln x$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(x^x)'\ln x+x^x\cdot\frac{1}{x}$$

而 $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$

故 $y'=x^{x^x}\{x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\}$

〔**例 3**〕 设 $y=arctgx$，求 $y^{(n)}(0)$.

〔**解**〕 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 即 $(1+x^2)y'=0$

两边对 x 求 $(n-1)$ 阶导数，$n-1\geqslant 2$，得

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0$$

以 $x=0$ 代入上述等式，得递推公式

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$$

由于 $y'(0)=1$ $\quad y''(0)=-\left.\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0$

从而 $y'''(0)=-2\times1\times y'(0)=-2!$

$$y^{(4)}(0)=-3\times2\times y''(0)=0$$

……

得 $y^{(2m)}(0)=0,\ y^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!$

其中 $m=0,1,2\cdots$。

〔**例 4**〕 计算 sin30.5°的近似值(精确到 0.0001)。

〔**解**〕 设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，由公式 $f(x+\triangle x)\approx f(x)+f'(x)\triangle x$

$$\sin 30.5°=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360})\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$\approx 0.5+0.8660\times0.00872\approx0.5076$$

〔**例 5**〕 在方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=0$ （a_1、a_2 是常数）中令 $x=e^t$，证明可将方程化成如下形式：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=0$$

证明：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy/dt}{e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy/dt}{e^t}\right)=\frac{d(\frac{dy/dt}{e^t})/dt}{dx/dt}=\frac{(e^t\frac{d^2y}{dt^2}-e^t\frac{dy}{dt})/e^{2t}}{e^t}$$

$$=\frac{d^2y/dt^2-dy/dt}{e^{2t}}$$

将上述两式和 $x=e^t$ 代入原方程，得

$$e^{2t}\cdot\frac{d^2y/dt^2-dy/dt}{e^{2t}}+a_1e^t\frac{dy/dt}{e^t}+a_2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=0$$

即 $$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=0$$

〔**例 6**〕 要制造一个容积为 V 的有盖有底圆柱形容器，问容器的高和半径应为多少，才能使所用材料最省？

〔**解**〕 设容器的底半径为 r，高为 h，则容器的表面积为

$$S=2\pi rh+2\pi r^2$$

由 $\pi r^2h=V$，知 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，代入上式得：

$$S=2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2 \quad (0<r<+\infty)$$

$$S'=\frac{-2V}{r^2}+4\pi r=\frac{4\pi r^3-2V}{r^2}$$

令 $S'=0$ 得 $r=(\frac{V}{2\pi})^{1/3}$，相应地 $h=\frac{V}{\pi r^2}=(\frac{4V}{\pi})^{1/3}$

因而 $\frac{h}{r}=(\frac{4V}{\pi})^{1/3}/(\frac{V}{2\pi})^{1/3}=2$

由于在区间 $(0,+\infty)$ 内，函数 S 只有一个驻点 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，所以，当 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，函数 S 可取得最小值，即当圆柱形容器直径与高相等时，所用材料最省。

〔**例 7**〕 设隐函数 z 由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

〔**解**〕 将方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 两边关于 x 求偏导数，并注意到此处 z 是 x，y 的函数，即得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad 即\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$$

同样可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$

而 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{z})=\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}$$

〔**例 8**〕 设 $\begin{cases}xyz=a^2\\x^2+y^2-2az=0\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$

〔**解**〕 易知这个联立方程确定了 y,z 是 x 的隐函数，分别将上两式关于 x 求导数，得

$$\begin{cases} yz+xz\dfrac{dy}{dx}+xy\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}-2a\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(az+x^2)y}{(y^2+az)x}$， $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{(x^2-y^2)z}{(y^2+az)x}$

〔**例 9**〕 有一圆柱体，受压后发生变形。它的半径由 20mm 增大到 20.05mm，高度由 100mm 减少到 99mm。求此圆柱体体积改变量的近似值。

〔**解**〕 设圆柱体半径为 r，高为 h，体积为 V，则有 $V=\pi r^2h$，记 r,h,V 的增量为 $\triangle r$、$\triangle h$、$\triangle V$，有

$$\triangle V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial r}\triangle r+\frac{\partial V}{\partial h}\triangle h=2\pi rh\cdot\triangle r+\pi r^2\triangle h$$

将 $r=20,h=100,\triangle r=0.05,\triangle h=-1$ 代入，得

$$\triangle V=2\pi\times20\times100\times0.05+\pi\times20^2\times(-1)=-200\pi\text{mm}^3$$

〔**例 10**〕 由欧姆定律，电流 I、电压 V 及电阻 R 有关系

$$R=\frac{V}{I}$$

若测得 $V=110$(伏)，测量的最大绝对误差为 2(伏)；测得 $I=20$(安)，测量的最大绝对误差为 0.5(安)，问由此算得的 R 的最大绝对误差和最大相对误差是多少？

〔**解**〕 由于 $dR=\dfrac{\partial R}{\partial V}dV+\dfrac{\partial R}{\partial I}dI=\dfrac{1}{I}dV-\dfrac{V}{I^2}dI$

于是有

$$|\Delta R|\approx|dR|\leqslant\left|\frac{1}{I}dV\right|+\left|\frac{V}{I^2}dI\right|\leqslant\left|\frac{1}{I}\right|\delta_1+\left|\frac{V}{I^2}\right|\delta_2$$

这里 $V=110,\delta_1=2,I=20,\delta_2=0.5$，代入上式得

$$|dR|\leqslant\frac{1}{20}\times2+\frac{110}{20^2}\times0.5=0.2375(\text{欧})\approx0.24(\text{欧})$$

又因 $R_0=\dfrac{V_0}{I_0}=\dfrac{110}{20}=5.5$(欧)，于是有

$$\left|\frac{dR}{R_0}\right|\leqslant\frac{0.24}{5.5}=0.044=4.4\%$$

即以 5.5 欧作为 R 的值时，最大绝对误差为 0.24 欧，最大相对误差为 4.4%。

〔**例 11**〕 求函数 $z=f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

〔**解**〕 (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-9$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2+6y$

解方程组 $\begin{cases}3x^2+6x-9=0\\-3y^2+6y=0\end{cases}$

求得驻点为(1,0)、(1,2)、(−3,0)、(−3,2)

(2)求得$A=\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=6x+6$， $B=\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0$

$$C=\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-6y+6$$

在点(1,0)处：$B^2-AC=-12\times6<0$，而 $A=12>0$，所以函数在(1,0)处有极小值 $f(1,0)=-5$