

高等学校教学用书

对策論(博奕論)講義

中国科学院数学研究所
第二室編

人民教育出版社

51.732
140
C2

高等学校教学用书



对策論(博奕論)講義

中国科学院数学研究所
第二室編

31.6.63

人民教育出版社



对策論(博奕論)是一門新兴的数学分支,是用数学方法来研究形形色色的带有斗争性质的现象,指示这些现象中的决策人如何采用最优的行动。它的发生和发展也不过是最近三十年間的事,但無論就它所考虑问题的性质而言,抑或就其现有的实际应用而言,都显示出这是一門与实际密切联系、有着广阔发展前途的学科。不过,要使对策論对我们社会主义的生产实际起更大的作用,还有待我們进一步的努力。因此,本书在給讀者展示对策論三十年概貌的同时,也力求体现它的阶级性,摒弃和批判资产阶级学者的反动观点,引导讀者注意联系我們的社会主义建設。

本书内容为二人有限零和对策,二人无限零和对策,多人对策,陣地对策等四章,叙述力求清楚明白,淺显易懂,只要讀者具有大学数学系三年級的数学修养。就不难領会本书的内容。

本书主要是作为高等院校的教材使用,也可作为实际部門人員的参考用书。

对策論(博奕論)讲义

中国科学院数学研究所
第 二 室 編

人民教育出版社出版 高等學校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺7号
(北京市書刊出版登記證出字第2号)

上海洪兴印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
各地新华书店經售

統一書号 13010·853 开本 850×1168 1/32 印張 5 7/16
字數 153,000 印數 1—30,000 定价(4) ¥0.65
1960年10月第1版 1960年10月上海第1次印刷

序

对策論这门学科，是近三十年来才发展起来的一門新兴的应用数学。它反映了实际生活中一类较为广泛的现象。近年来，也受到我国科学界和实际工作者的重视。今年春天，中国科学院数学研究所請了苏联数学家尼·尼·沃罗比約夫(Н. Н. Воробьев)教授，来华就对策論作系統的讲学。學員大都是高等院校的教师，也有实际部門的工作干部。这次讲学活动，对对策論在我国的傳播有一定的促进作用。

但是，要使对策論能發揮它的作用，也只有当它为实用部門的专业干部和更多的群众所掌握时，才有可能。让更多的人来掌握对策論和运用对策論，使之更有效地为我国的社会主义事业服务，乃是我們的迫切愿望和要求。举国一片大跃进，数学革命的浪潮席卷全国，高等院校迫切要求新的教材，实用部門越来越多地要求运用精确的数学工具。这种新的跃进形势，乃是本书迅速問世的客观背景。

本书的目的，也就在于希望为高等学校提供新的教材，同时，也向应用部門的同志介紹一种新的数学工具。

为此，我們想作到使本书尽可能浅显易懂，使之成为一本入門书。估計，讀者只要具有一般高等数学如代数、实变函数、概率論的初步知識，就可了解其內容和掌握其精神。同时，本书也給讀者较为全面的介紹現代对策論中的基本概念和面貌。我們还竭力想將我們与实际部門接触的一点体会貫穿到书中去，以表我們渴望解决实际問題的强烈愿望和要求。

特別應該提出的是，对对策論的研究，必須用馬克思列宁主义

(3)

04545

的观点，特别是应该着重批判和杜絕各种资产阶级的反动观点及謬論的影响。必須坚持理論与实践相結合的发展道路，使对策論为生产服务，为无产阶级的政治服务。这是本书竭力想达到的要求。但是，由于我們还仅仅是开始，深入实际应用部門还很少，經驗不多，学习也不够，所以，还显得不够有力。正是由于这样，我們愿意和全国各地从事对策論工作的或关心对策論发展的同志們一起，积极做好这一工作，本书就算是一个开头吧！誠懇地希望讀者提出宝贵的意見，或投入我們的行列中来，帮助我們深入彻底地进行这一“兴无灭資”的学术思想的斗争。

本书是在沃罗比約夫专家来华讲學期間由學員集体編写的。而在讲學結束后又由吳文俊、景淑良、唐述釗、王厦生、郑汉鼎、李为政、盛維廷、江嘉禾、江福湘等九人組成編审小組。在編审过程中，总的計劃，材料的选取，各章內容的安排，都經過集体的反复討論和修改。参加編审的同志大都是剛接触对策論不久，但是由于跃进形势的鼓舞，在毛澤东思想指导下，破除了迷信，鼓足了革命干劲，采取群众运动的方式在短期内写成了我国的第一本“对策論”。我們希望它的出版将会促进对策論在我国的发展。

同时，本书也是中苏友誼的結晶。在本书拟訂大綱时，就得到了尼·尼·沃罗比約夫教授的热情指导和关怀。而且，书中的取材，也大都来自沃罗比約夫教授在讲学时用的讲义。所以，我們特別應該感謝苏联同志的国际主义的崇高友誼和无私援助。

由于時間紧迫，很多同志又都是初次参加写书工作，故难免有缺点甚至是錯誤之处。請讀者多提意見，以便再版时改进。

来函請寄北京中国科学院数学研究所二室，或人民教育出版社高教用书編輯部。

編 者

1960年5月1日

目 录

緒論	1
第一章 二人有限零和对策	13
§ 1. 基本概念	13
1.1. 二人有限零和对策的定义	13
1.2. 最优纯策略	16
1.3. 混合策略与混合扩充	21
§ 2. 矩阵对策的解的存在性及其基本性质	24
2.1. 解的存在性	24
2.2. 解的性质	29
§ 3. 矩阵对策求解	36
3.1. 求全体解的矩阵法	37
3.2. 微分方程法	52
3.3. 迭代法	58
§ 4. 矩阵对策与线性规划的关系	64
4.1. 对偶规划问题	64
4.2. 对偶规划与矩阵对策的等价性	66
4.3. 解矩阵对策的线性规划法	68
第二章 二人无限零和对策	71
§ 1. 基本概念	71
§ 2. 单位正方形上连续对策的基本定理	77
2.1. 连续对策的基本定理	78
2.2. 连续对策的值和最优策略的性质	83
§ 3. 单位正方形上的凸连续对策	89
§ 4. 单位正方形上的可离对策	98
4.1. 局中人的策略与欧氏空间中的点之间建立对应关系	100
4.2. 在 U 空间与 W 空间中分别找出对应于第一和第二局中人的最优策略的点 $\bar{u}$ 和 $\bar{w}$	101
4.3. 例	108
§ 5. 对策的完全确定性	109

第三章 多人对策	119
§ 1. 不結盟对策	119
1.1. 引言	119
1.2. 平衡局势	120
1.3. 平衡局势的存在性	124
§ 2. 結盟对策	127
2.1. 引言	127
2.2. 特征函数	128
2.3. 合作对策的解	133
附录: 布劳佛 (Brouwer) 不动点定理的証明	139
第四章 障地对策	143
§ 1. 障地对策的定义	143
1.1. 引言	143
1.2. 术语和記号	145
1.3. 障地对策的定义	150
§ 2. 障地对策的正规化	152
2.1. 障地对策的正规化	152
2.2. 正规对策化为障地对策	155
§ 3. 具有完全信息的对策	156
§ 4. 具有完全记忆的对策	160
4.1. 混合策略	161
4.2. 行为策略	163
4.3. 具有完全记忆的对策	167
§ 5. 具有顺序记忆的对策	173
5.1. 顺序记忆的定义	173
5.2. 簡化策略	175
§ 6. 几乎完全信息的对策	184
§ 7. 对策和統計判央	189
7.1. 引言	189
7.2. 单式实验时的統計对策	194
7.3. 序貫对策	195

緒 論

1. 对策論研究的对象及其发展的历史

对策論是现代数学中一个新的分支。一般认为，它是属于运筹学的一个学科。虽然它的历史很短，但由于它所研究的对象与生产实际及国防建設有密切的联系，而且处理問題的方法又有明显的特色，因而日益引起广泛的注意，成为近年来数学中发展很快的一支。

对策論所研究的主要对象是帶有斗争性质的（或至少含有斗争成分的）現象的模型，这里，把“对策”理解成概型化了的斗争現象的模型。而参加到这个現象中的“局中人”具有各种不同的利益和目的，并且可以有某种办法实现其目的。这里要說明三点：

（1）这里，“局中人”除了可以理解为个人以外，也可以理解为集体（如球队），交战的各方，甚至也可以理解为在生存竞争条件下的生物种类。在資本主义社会里，也经常理解为自由竞争的公司。此外，有时把大自然和人看作一对“局中人”也是极有好处的。

（2）各个局中人利益的不同，絕不意味着这些利益都是彼此完全对抗的。因此，对策論除了研究有对抗性利益的情况外，也要研究局中人之間各种各样的协调的可能性。如部分局中人之間行动的协调一致，彼此交換情报，或共同分配总贏得等。

（3）对策論的效力不仅表现在它研究了含有斗争性质的現象上。而且只有当这現象中各方对他方行动或意图不完全了解时，才真正显示出了对策論的全部威力。因为，如果完全了解的話，就

可用其他数学工具来研究这些现象了。对策论的这个特点在某种意义上说,也是使它能成为近代数学发展的一个新方向的原因之一。我们可以按人们所研究的客观对象范围的逐步扩大来看数学的发展。最初,很自然地人们把数学用来研究已知的决定性的现象,如微分方程、复变函数等。随着社会生产及科学的发展,人们扩大了数学研究的领域来研究已知的非决定性(随机性)现象,如概率论、数理统计、信息论等。但同时,人们也看到还有些现象,限于各种条件,人们对于对方还不完全了解,暂时还不能掌握其全部规律(无论是决定性规律或随机性规律),而人们又必须不断和它打交道,于是人们就想要把数学应用领域也扩大到这类现象上来,这就使得对策论能以作为数学的一个新分支而产生。

从对策论产生、发展的历史中,我们就可以更好地看清它所研究的对象,以及这门学科的本质,从而就可以正确地来估价这门学科。

在十九世纪以及二十世纪的前半叶,绝大多数的数学工作都是直接或间接地与数学在物理、技术中的应用有关。那时,人们对有斗争性质的现象也想用老的、早已形成了的、典型的数学物理的工具或与其相近的数学分支的工具来研究。例如,郎切斯特(Lanchester)就曾应用微分方程来估计战争的结局,这种估计是以参战诸方的力量对比为转移的。但是由于所用的数学工具并不永远能够符合问题的本质,所以这种尝试也就不能够相当完全地从各方面揭露出问题的复杂性。因此,就要建立另一些数学模型,以便更适于用来研究新的一类现象。

同时,在十九世纪开始形成了研究随机现象的数学分支——概率论,以及依赖于它的数理统计。有了概率、统计的方法,就急剧地扩大了数学的应用范围,从而有可能建造和研究那些直到当时还未得到数量分析的一些现象的数学模型。“对策”的模型也就

是在这种条件下开始被研究起来的。

用数学方法来研究与斗争有关的现象的第一次尝试就是1912年策墨洛(E. Zermelo)的著作“关于集合论在象棋博弈论中的应用”。在这篇文章里,确定了,对象棋对策来说,以下三种着法必定存在一种:不依赖于对方如何行动,白方总取胜的着法,或黑方总取胜的着法,或是有一方总能保证达到和局的着法。虽然对象棋对策要指出实际上存在的究竟是哪种着法,还是极困难的。但是,上述结果已经很不錯了,而且这种结果只有在每个局中人对所有局中人的过去的行动全都了解时才可能有的。而在实际中,也常常碰到这样的斗争现象。如军事斗争中,作战双方彼此并不完全了解对方已有哪些准备和部署,以及怎样的作战计划。这时,对任何一方都不可能有某种取胜的算法(此处,即作战计划),因而,在构造和研究这种模型时,就必须借助于概率方法。

用概率方法来处理这类对策是被波雷耳(Borel)、馮·諾伊曼(von Neumann)、史坦因豪斯(Steinhaus)以及卡尔瑪(Kalmar)在其二十年代的工作中发展起来的。进一步研究对策模型的有:費歇尔(Fisher)、波賽尔(Possel)、波雷耳、維雷(Ville)等人。

但是,由于当时的研究对象主要是日常生活中的一些游戏(如象棋、扑克等),所以,此后相当一段时期内,对策论几乎处于停顿的状态。这点也与概率论的历史相仿。它们都说明:当研究的对象还仅仅是脱离生产实践的日常游戏时(没有实际任务带动时),数学的理论就不可能获得强大的生命力,因而也不会具有一个完善的理论。只有当与对策相似的特点在人们实际活动中开始特别明显地表露出来的时候,“对策现象”才可能成为科学研究的对象。直到第二次世界大战期间,军事上、生产上、运输上都迫切地提出了许多问题:象飞机如何侦察潜水艇的活动,生产如何组织得更合理,怎样的物资调运方案才是最优的,等等。这些问题都和“对策”

具有共同的特点,于是“对策现象”就开始成为许多数学家研究的对象,并开展了一系列的研究。到1944年,馮·諾伊曼和摩根司特恩(Morgenstern)合著的“博弈論和經濟行为”(Theory of Games and Economic Behavior)一书出版了。这本书在某种意义上可說是前人对对策模型研究的总结。其中叙述了对策的公理化定义,証明了有关对策的許多定理,并且指出了今后进一步发展理論的途径。因而,使得这方面的数学理論得到了某种完善化。但这本书的作者在观察和分析社会现象和經濟现象时,却处处表现了资产阶级的荒謬观点。这本书也是适应了垄断資本主义时代(帝国主义时代)垄断資本家之間的勾心斗角的特点。书中企图用对策論来作为理解和指导資本主义社会經濟生活的钥匙(也正是因此,所以后来资产阶级的經濟学家就抓住对策論大事吹嘘,企图为資本主义社会的反动本质辯护)。

如果說在战争时期,对策論的应用比較着重于軍事問題的話,那么,它的应用范围在战后大大地扩展了,它有可能帮助人类来向大自然进行“对策”(統計判決函數理論就是从这样一个观点出发的)。这点即使是在社会主义国家也是有用的。

这样,一方面从人类实践中越来越多地提出类似对策的問題来,另一方面,过去研究过的某些对策理論也得到一定程度的完善,于是从1944年以后許多数学家开始緊張地研究对策論,近代对策論的一些很重要的結果也多半是在那时以后得到的,因此我們可以認為第二次世界大战以前是对策論发展的准备时期。而第二次世界大战以后,則是对策論正式作为一門数学的新分支,迅速发展的时期。其中社会主义国家的对策論学者,例如苏联的沃罗比約夫(Воробыев),波兰的秦巴(Zieba),米歇尔斯基(Mycielski)等也作出了不少重要的贡献,而在近年来,对策論在社会主义各国更得到越来越多的重視。直到現在为止,虽然它还是处于一門学

科的初始阶段，但也已經是一門具有相当多分支和成果的数学理論了。

从上述对策論产生、发展的簡短历史中，我們再一次清楚地看到，任何理論只有在人們实践中产生了对它的需要时，才会得到发展，对策論也决不例外。同时，也可看到“对策”的实际背景应理解为概括了相当广泛的某一类現象的数学模型。这就是近年来对策論得以迅速发展的原因。

2. 对资产阶级学者荒謬观点的批判

为了使讀者从一开始就对对策論的本質及其作用能从馬列主义的哲学观点来对待，所以我們在簡略闡明对策論研究的对象及其历史之后，立刻就要求分析批判资产阶级学者对待对策論的一些荒謬观点。

首先，资产阶级政治经济学家把对策論看成是摆脱其困难处境的出路，所以当对策論刚一出現他們就馬上抓住它，想把对策論作为他們了解和認識整个經濟生活的钥匙，从而把对策論变成反动的所謂“經濟測量学”的有机組成部分。为此，他們竭力吹嘘对策論的作用，把它說成是研究政治經濟学的主要的方法論的基础，他們甚至叫嚷“我們的生活是什么？就是博奕”。对策論原名“博奕論”，这个名称也就反映了資本主义社会中一些学者对这个数学分支的看法。他們也就从这种反动的观点出发，来对資本主义社会中的自由竞争、社会上貧富两极分化等現象进行“解釋”，因而，也充分暴露了他們竭力为資本主义社会辯护的反动嘴臉。不仅如此，他們还企图用对策論为資本主义社会中两极分化現象进行“辯护”。他們說，社会上的每个人都是在参加一場“博奕”，都有可能贏或輸。最終的結果是一部分人贏了——发財致富；另一部分人就只好輸了——貧困。因此，貧富不均在这班人看来是社会的“正

常現象”，似乎資本主義制度對每個人都是一律平等的，貧富只是“博奕”的自然結果，而與社會制度無關。他們把工人与資本家間的階級鬥爭輕描淡寫地看成是一場“博奕”，而把資本家對工人的殘酷剝削完全掩蓋住了。他們這種粉飾資本主義制度，迷惑或欺騙勞動人民的反動目的是非常明顯的。就其辯護的伎倆來說也是拙劣的。因為，在資本主義社會里只有掌握着生產資料對無產階級進行殘酷剝削、掠奪的資本家才能發財致富。掌握大量生產資料的資本家和除了勞動力以外一無所有的無產階級之間是根本談不上進行什麼“平等”的“博奕”的。脫離了階級觀點，就根本不能正確地了解階級社會中任何現象的本質。

在這裡，我們再一次看出，資產階級偽科學，通常總是企圖尋找一種不要揭露社會經濟中的內在的實質——階級矛盾，而來了解經濟學的鑰匙。這種意圖是極其反動的，是為資本主義辯護的。

同時，我們還可以看出，即使他們自以為抓住對策論就可以大做其文章，成為他們的救生草，但實際上，對策論在這方面也不會對他們的反動企圖有所幫助的。因為，社會經濟中的自由競爭，人們關係中的爾虞我詐，勾心斗角只有在資本主義社會中才有。因而由此構成的“博奕”模型也就描繪出資本主義社會人吃人的一幅圖畫。而在社會主義社會中，這樣的模型根本就不可能構成。這一顯著差別的原因正是由於資本主義社會制度是以私有制和剝削為基礎的。

上述一切已足夠看出，把對策論看作是經濟行為的理論，用以作為了解社會生活的鑰匙的反動性和詭辯性。當然，這種反動的作用並不是對策論本身所引起的，而是由於資產階級辯士們陰謀替資本主義社會辯護而濫用對策論的結果。

3. 对策論導言

为了使讀者在正式学习具体、个别的对策理論之前对对策論的整个概貌有所認識，我們認為有必要作为導言在这里講述以下几个問題：

(1) 对策的一些基本要素：

首先，由上述我們已知道，“对策”是具有斗争性質的現象的数学模型，而賭博、下棋正好是对策問題中最明显、最简单、最典型的模型。尽管如此，但我們决不能把对策論簡單地了解为一种賭博、下棋的游戏理論。

为了使讀者較容易地了解对策問題的几个基本要素，我們就来講一个最简单的游戏的例子。

假設有兩個游戏者，每人都有若干根火柴，第一个人用左手或用右手握一根火柴，註第二个人猜究竟火柴在哪只手中。如果猜到了，这根火柴就給第二个人，如果猜不到，第二个人就要付給第一人一根火柴。这样就算游戏一回。显然，两人的目的都是要使自己的火柴增多。

从这个最简单的对策例子中，我們看到“局中人”这个要素是不可缺少的。关于如何理解局中人前面已講得不少了，現在要补充的一点就是：要构成一个对策，至少要有两个局中人，否則就沒有斗争了。

另外，也可看到每个局中人为达到自己的目的，在每次游戏中都可能有几种办法来行动（此处第一人有两种办法：即把火柴握在左手及把火柴握在右手。第二人同样也有两种办法：即猜左手及猜右手）。在对策論中称这种办法为“策略”，即第一、第二人分別都有两个“策略”。因而，每个局中人在一局（次）对策中都要有一个策略集合。显然，这“策略”的概念也是对策必不可少的基本要

素之一。“策略”这个術語也是从許多不同的具体对象中抽象出来的，因而，就可作极为广泛的理解：既可以是某一步的动作，也可以是事先拟定的整个行动计划。如在农业中，人們为了与干旱作斗争，可以采取播种一定数量的某种抗旱的品种，也可以是拟定一个全年內何时、何地打多少口井，修多少个水庫的計劃。又比如在軍事中，策略可以是简单地决定在一个战役中采取进攻敌人最弱一路的策略，也可以是在战略上采用某种新式武器装备起来，并制訂出一套訓練掌握这种武器的人員及举行使用这种武器的战斗演习的計劃等等。再如，在工业上，为减少廢品而斗争的产品檢查員的策略，既可以是 he 根据抽样檢查来接受或拒絕一批产品的行动，也可以是他根据抽样檢查的結果来調节控制生产的一套方法。当然，这里“策略”一詞是数学上的術語，决不能与政治上的方針、政策等概念混为一談。

在每个对策中，每个局中人至少应有两个策略，所以我們所举的游戏的例子已是最简单的博奕了。因为如果有一个局中人只有一个策略的話，那末整个对策的結局就完全听凭別人摆布，換句話說，这个人就沒有資格算作一个局中人了。

此外，“策略”虽然可以作广泛的理解，但有一点是受到限制的，即策略必須是在一局对策中貫徹始終的行动原則。換句話說，就是当各个局中人在一局对策中都选定了自己的一个策略后，这局的結果就被决定了。因此，大家所选定的一組策略总起来就叫做一个“局势”。如在我们所举的例子中，第一人用右手握火柴，第二人猜是右手，这一对策略就唯一的确定了对策的一种結局，把它們放到一起就組成了一个局势。每个对策都有一个局势集合。

当局势既定之后，对策的結果就被决定了，勝負也就立見分曉，这种結果我們可以描述如下：在每个局势下，每个局中人都从

某个来源处取得一定数量的“赢得”，可見这“赢得”实际上是全体局势集合上的函数。所以，可以说，每个局中人都有自己的一个“赢得函数”。这是对策中最后一个，也是最重要的一个要素。如我們的例子中，赢得函数是如下的：在第一人出右（左）手，第二人猜右（左）手的局势下第二人赢得一根火柴（同时也就是第一人赢得负一根火柴，或說第一人“輸掉”一根火柴）。在第一人出右（左）手，第二人猜左（右）手的局势下，第一人赢得一根火柴（同时就是第二人“輸掉”一根火柴）。这里，我們虽然采用“赢得”“輸掉”的字眼，但决不能理解为賭錢的輸贏，而应理解为定量的描述对策結局的一种自然的办法。如与干旱进行斗争的对策，其“赢得”就是农业大丰收，高额丰产的产量。

这样，“局中人”，他們的“策略”集和“赢得函数”等概念就构成了对策的三个基本的要素。

(2) 对策論中現有的各种对策类型：

对策論历史虽短，但发展到現在也有不少理論上的类型了。

它們大致如下：

整个对策論中，概括說来，有静态对策与动态对策两大类。静态对策中又有不結盟对策和結盟对策两种。不結盟对策中又依局中人是2个或多个，策略集有限或无限，各人赢得函数之和恒为零或不恒为零等各种更細的模型。如一般較多研究的有：矩陣对策（二人有限零和对策），无限对抗对策（二人无限零和对策），多人有限零和对策，多人有限非零和对策等。結盟对策中有联合对策与合作对策两种。其中有陣地对策、随机对策、微分对策、生存对策等等模型。其中，以矩陣对策被研究探討得最多，理論上也較完整。在借助于电子計算机条件下，也可用来解决一些实际問題。其他的对策模型被研究得还很不够，有的还很难研究，也就是說，理論上还不够成熟。当然离实际应用就更有段距离了。苏联从1955年

起就有人开始研究对策論了。苏联数学家尼·尼·沃罗比約夫近来根据社会主义国家的情况,对联合对策进行了一些有成效的研究。关于合作对策,現在也已有不同著者的許多文章来討論了。其中,首先應該指出的是馮·諾伊曼,也还应指出夏普萊(Shapley),留斯(Luce),伯尔基(Berge),吉利斯(Gillies)及一些其他著者的文章。近来人們对动态对策的注意也有所增加。

(3) 对策論在运筹学中的地位,对策論与数学其他学科的关系:

首先要說明对策論在运筹学中的地位及它与运筹学其他分支的联系。对策論是运筹学中較大分支之一,也是发展得較早的分支。它有其特殊的研究領域,也有較独特的研究方法。故無論在运筹学中或在整个数学中都占有特殊的地位。它与运筹学中的主要分支——数学规划論有着密切的联系。首先,矩陣对策与綫性规划是联系得非常紧密的两个理論,又动态规划中若轉而研究极小极大化問題时就是动态对策了。

对策論有其明确的研究对象;也有其自己的主要目的:即找寻局中人的最优策略。而其研究方法則可以是多种多样的。因而它也就与較多的其他数学分支发生各种各样的联系。其中,首先應該指出的就是与概率論的关系极为密切。虽然不能說对策論就是概率論的一个分支,但至少可以說:在对策論的产生和发展中,概率論是起了巨大的作用;其次,統計判決函数理論就是在对策論思想基础上发展起来的。另外,在解决各种对策問題中又常用到代数,泛函,微分方程,拓扑等工具,并要求其中某些部分理論給以发展。因而,看来对策論今后的发展,必定是和其他有关数学学科紧密相关,互相促进地发展才可。

(4) 对策論的实际应用,及其今后正确发展道路問題:

我們既然知道对策論研究的对象是概括了相当广泛一类現象