

分 层 介 质 中 的 波

Л. М. 布列霍夫斯基赫 著

楊 訓 仁 譯

科 学 出 版 社

1960

Л. М. БРЕХОВСКИХ
ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Издательство АН СССР

Москва, 1957

內 容 簡 介

随着现代科学技术的迅速发展,电磁波和弹性波在分层介质(如海水、地层、电离层等)中传播的理论对于实际工作也日益重要,本书就是系统地介绍这一理论的一本专著。

本书是作者在总结自己过去的工作的基础上写成的。书中共分六章,前三章讨论平面波的反射和折射及平面波在分层介质中的传播,后三章则专门论述球面波的类似现象。

本书采用了同时讨论弹性波和电磁波的办法,从而使各个波动领域所采用的方法融汇在一起;其次,虽然本书偏重于理论计算,但是,作者的主要努力还是用于为读者描绘出清晰的物理图景,使读者易于掌握所讨论问题的基本概念。此外,无论是作者自己的工作或他人的工作,在书中都用作者自己的观点来叙述,因此,本书保持了严格的方法论上的一贯性。

分 层 介 质 中 的 波

Л. М. 布列霍夫斯基赫著

楊 訓 仁 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街117号)

北京市书刊出版业营业登记证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总经售

*

1960年8月第 一 版

书号:2255

1960年8月第一次印刷

字数:500,000

精:1—7,000

开本:787×1092 1/18

(京) 平:1—5,500

印张:25 1/9 插页:4

定价:精装本 3.75 元
平装本 3.10 元

原 序

本书系统地叙述了弹性波和电磁波在分层介质中的传播理论。书中所述的材料大部分是我以前在一系列杂志上发表过的。其他作者的成果，我也尽可能按照我自己的概念来讲述，因而得以避免方法论上的“不一致”。此外，我首先力求为读者弄清楚所研究现象的物理图景。至于说到数学的严密性，则也许不是到处都达到了足够的程度。这是因为怕叙述变得过于累赘。

书中采用同时叙述弹性波和电磁波传播理论的讲法，由于在这两种情况下所用的数学方法的共同性，这样做是非常合适的。联合叙述的结果能使得一个领域为另一个领域所采用的方法所充实，这种情况也具有不小的意义。例如，在声学和无线电技术中探讨出来的阻抗法，目前已成功地应用于光学系统的多层增透和干涉滤光片的计算中。

书末列出的参考文献目录是比较完全的，但远非详尽无遗。

我谨向玻良斯卡娅 (В. А. Полянская) 和特雷雪金柯娃 (И. Ф. Трещетникова) 表示深切的谢意，她们在检验公式和准备手稿出版的工作中曾经给予很大的帮助。

Л. 布列霍夫斯基赫

1956年2月1日

目 录

原序.....	i
---------	---

第一章 层中的平面波

§ 1. 均匀无限介质中的平面波	1
1. 基本概念和定义.....	1
2. 不均匀平面波.....	3
§ 2. 电磁波的反射和折射	5
1. 一般关系.....	5
2. 两种介质分界面上的反射和折射.....	5
3. 关于阻抗的概念.....	9
4. 列昂托维奇近似边界条件.....	11
§ 3. 平面声波在液态或气态介质分界面上的反射	12
1. 反射系数和透射系数.....	12
2. 全内反射.....	14
3. 能量关系.....	17
4. 局部反应表面, 阻抗	19
§ 4. 波在液体同固体的分界面上的反射. 表面波	21
1. 基本方程和边界条件.....	21
2. 从液体中入射到固体上的声波的反射.....	23
3. 反射系数的分析.....	24
4. 反射的其它情形.....	27
5. 波在固体的自由界面上的反射.....	28
6. 表面波.....	30
§ 5. 从平面层和平面层系上的反射	34
1. 单层的反射系数和透射系数.....	34
2. 反射系数表式的另一种推导法.....	37
3. 几种特殊情形.....	38
4. 介质中存在吸收的情形.....	40
波穿过层的“渗透”.....	42
“千任意多层的反射系数和透射系数”.....	43
“的特殊情形下的反射系数”.....	

1. 对于任意多层的反射系数和透射系数	47
2. 在刚性薄板上的反射	53
3. 薄板中的自由波	55
4. 全透射的情形	53
5. 波在全内反射角下的入射	59
§ 7. 細密分层介质中的波	62
1. 細密分层介质的电磁性质	62
2. 細密分层介质的弹性性质	63
3. 与六角对称晶体相象的細密分层介质	73
4. 波在細密分层介质中的吸收	74
5. 固态层和液态层的相互交替	75
§ 8. 有限波束的反射	79
1. 用平面波迭加的形式来表示有限波束	79
2. 反射波束的場。波束在反射时的位移	82
3. 波束的全内反射	84
4. 声波束在固体和薄板上的反射	85
5. 反射波束截面上的能量分布	86
6. 全内反射时的能流	88
7. 在不均匀介质上的反射	91
§ 9. 脉冲的反射	95
1. 一般关系。积分脉冲守恒定律	95
2. 脉冲从两种均匀介质分界面上全内反射时的形状改变	99

第二章 平面波在分层介质中传播的理论的一些应用

§ 10. 光学增透	105
1. 单层复盖	105
2. 双层复盖	108
3. 三层复盖	111
4. 声学系统的“增透”	113
§ 11. 干涉滤光片	114
1. 一般考虑	114
2. 最简单的反射型滤光片的理论	116
3. 最简单的透射型滤光片的理论	
4. 较复杂的滤光片	
§ 12. 分层隔声结构	
1. 分层隔声结构的理论	
2. 隔声量的比较, 其物理意义	

第三章 分层不均匀介质中的平面波

§ 13. 不均匀介质中的电磁场和声场的方程	130
1. 电磁场的方程	130
2. 不均匀介质中的声场的方程	132
§ 14. 波从形状最简单的不均匀层上的反射	133
1. 问题的提出	133
2. 超几何方程	135
3. 层的反射系数和透射系数	138
4. 过渡层上的反射系数	140
5. 对称层上的反射系数	144
§ 15. 波在不均匀半空间的反射	148
1. 普遍关系	148
2. 折射率递减的情形	149
3. 折射率递增的情形	151
§ 16. 任意分层介质中的波	152
1. 在几何光学近似下分层不均匀介质中的场	152
2. 几何光学近似的另一推导	156
3. 作为精确解的一级近似的几何光学	159
4. 波在分层不均匀介质中的全反射	162
5. 波通过层的渗透	168
§ 17. 波从参数按任意规律变化着的层上的反射系数	170
1. 反射系数的方程	170
2. 确定反射系数的第一种逐次求近法	174
3. 确定反射系数的第二种逐次求近法	176
4. 精确的和近似的计算方法在具体例子上的比较	178
5. 逐次求近法的一个应用	179
6. 关于把总场划分成直达波和返回波的非单值性	181
7. 对于给定频率的波总是可以找到不反射的层	182

第四章 球面波的反射和折射

§ 18. 球面波	185
1. 电磁波元辐射体的场	185
2. 声学中的元辐射体	188
3. 把球面波分解成平面波	188
§ 19. 球面波在两种介质分界平面上的反射	191

1. 作为平面波的迭加的反射波·····	191
2. 越过法·····	193
3. 反射波场的分析·····	197
4. 一些结论、几何光学的适用范围·····	201
5. 在其他辐射体(磁偶极子和水平电偶极子)情形下的推广·····	203
6. 置于分界面上的辐射体的场与高出分界面的辐射体的场之间的联系·····	204
§ 20. 維耳-范德波耳公式·····	206
1. 表式(19.36)的适用范围, 关于数值距离的概念·····	206
2. 当越过点附近存在极点时的越过法·····	208
3. 維耳-范德波耳公式·····	210
§ 21. 側面波·····	213
1. 側面波的表式·····	213
2. 側面波的物理意义·····	216
3. 射綫在反射时的位移和側面波·····	218
4. 辐射体和接收机位于强吸收介质中的情形·····	219
§ 22. 接近全内反射角的区域内的场·····	220
1. 定性的考虑, 以上所得到的公式的应用范围·····	220
2. 场的完全的表式·····	221
3. 射綫概念, 焦散綫·····	226
§ 23. 球面波的折射·····	230
1. 在几何光学近似下折射波的场·····	230
2. 对折射波的几何光学的修正·····	232
3. 介质之一具有显著吸收时的情形·····	236
4. 置于空气中的辐射体在水中所造成的声场·····	237
§ 24. 球面波在两种介质分界面上的反射和折射·····	238
1. 固态介质中的球面波源·····	238
2. 反射波和折射波的形式上的解·····	243
3. 解的分析, 反射波和側面波·····	246
4. 球面波在反射和折射时所激发的整个波系的分析·····	250

第五章 波在层中的传播

§ 25. 具有绝对反射界面的层·····	256
1. 虚源图象·····	256
2. 反射系数为负的情形·····	259
§ 26. 具有绝对反射界面的层(續)·····	260
1. 层中的场的积分表示·····	260

2. 簡正波.....	262
3. 虛源图象与簡正波之間的关系.....	266
* § 27. 具有任意界面的层	268
1. 上节所得到的結果在任意界面情形下的推广.....	268
2. 关于虛源图象.....	271
3. 簡正波.....	273
4. 側面波.....	279
§ 28. 上述理論对电磁波在层中的传播的应用	283
1. 当层的一个界面是完全反射的而另一个界面是任意的时簡正波的場.....	283
2. 第二个界面的反射系数趋于 1 的情形.....	285
✓ § 29. 声波在液态层中的传播	287
1. 介于二弹性半空間之間的液态层.....	287
2. 声音在浅水中的传播.....	289
3. 数值計算的結果.....	295
4. 側面波.....	298
5. 关于声波在計及基础的切变弹性的浅水中传播的一些評述.....	301
§ 30. 声音在三层介質中的传播	303
1. 場的积分式.....	303
2. 三层介質中的簡正波.....	305
3. 簡正波的相速度和羣速度.....	306
✓ § 31. 声脉冲在液态层中的传播	307
1. 在脉冲声源情形下解的形式上的推广.....	308
2. 簡正波的羣速度.....	309
3. 脉冲传播的定性图象.....	310
4. 脉冲传播的完整理論.....	311
5. 艾里波.....	314
6. 各阶簡正波的激发程度.....	316
7. 能够从它們作出关于基础参数的結論的脉冲的特性.....	317
✓ § 32. 确定簡正波特性的簡化方法	319
1. 液态层中的声波.....	319
2. 固体中的簡正波.....	322
3. 确定簡正波特性的近似方法.....	326
✓ § 33. 平均下降規律	328
1. 声强随距离下降的平均規律.....	328
2. 电磁場在层中的平均下降規律.....	333
3. 从虛源图象的观点来解释所得到的結果.....	334
✓ § 34. 波在被不均匀介質所限制着的层中的传播	337

1. 場的普遍式·····	337
2. 不均匀层上的反射系数的某些性質·····	341
3. 簡正波·····	346
4. 側面波·····	348
5. 平均下降規律·····	350

第六章 分层不均匀介质中的集总辐射体的場

§ 35. 存在的解的概述·····	354
§ 36. 場的普遍式·····	360
1. 場的积分式·····	360
2. 存在分界面的情形·····	361
3. 解的分析. 分立譜和連續譜·····	364
§ 37. 不均匀介质中的波导·····	365
1. 最簡單的波导的理論·····	365
2. 波导的临界頻率·····	370
3. 連續譜·····	370
4. 一面为絕對刚性牆所限制着的波导·····	371
5. 与用“位相积分”法所得結果的比較·····	372
§ 38. 不均匀介质中波导传播的射綫理論·····	373
1. 波导中的射綫图象·····	373
2. 聚焦因子·····	377
3. 不均匀介质中波导的射綫理論作为波动理論的极限情形·····	378
4. 焦散綫附近的場·····	384
5. 計算焦散綫邻域內的場的例子·····	388
6. 焦散綫切点附近的場·····	391
§ 39. 水下声道·····	395
1. 水下声道及其形成原因·····	395
2. 超远传播的最簡單的理論·····	397
3. 理論的精确化·····	401
4. 声綫的聚焦·····	404
§ 40. 无綫电波在大气层中的超远传播·····	407
1. 大气波导形成的条件·····	407
2. 修正折射率法的基础·····	410
3. 双綫性輪廓·····	411
4. 幂律輪廓·····	416
5. 綫性指数律輪廓. 波导传播問題的近似处理法·····	417

§ 41. 波在形成影区条件下的传播	420
1. 问题的提出和所遇到的情形的概述	420
2. 普遍形式下的解	422
3. 极点的分析	425
4. 场的表式的分析	431
参考文献	434
I. 专論和手册	434
II. 原始文献	435

第一章

层中的平面波

本章将叙述波在介质分界面上和层上的反射理论。主要的注意力将放在平面波上。空间有限的波束和持续时间有限的脉冲的行径将在§8中再加以研究。在所有情况下,当波在几种介质中传播时,各个介质都被认为是均匀的,并以相互平行的平面为界。

为照顾到叙述的完整性,头几节讲一些较简单的问题,例如均匀介质中的平面波、波在介质分界面上的反射和折射等。然而,即使在这几节中,读者也可看到一些比较新问题的叙述,诸如各种不均匀平面波的理论、它们的反射和折射、出现在所谓“局部反应”表面等情况下的列昂托维奇近似边界条件的分析。

对于声波和电磁波的研究将同时进行。

§1. 均匀无限介质中的平面波

1. 基本概念和定义 平面波是波动的最简单形式。函数

$$F\left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t\right) \quad (1.1)$$

是它的最普遍的分析表式,其中 n_x, n_y, n_z 是满足条件

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

的三个数,并且是波阵面(即波动位相在其上保持常值的平面)法线的单位矢量在坐标轴上的投影。

函数(1.1)是波动方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

的解。

它描述在介质中以速度 c 传播着的某一扰动。由函数 F 的形式所确定的波形在传播过程中保持不变。

在物理学和技术科学中极为广泛地应用所谓频谱法来研究波和振动现象,这种方法我们以后也将采用。这一方法使得在迭加原理成立的情况下,对任意形式的波的行为的分析归结为对最简单的“谐”波行为的分析。

在表式(1.1)中令

$$\xi = \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t,$$

并把函数 $F(\xi)$ 表为某一傅里叶积分的实数部分:

$$F(\xi) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega, \quad (1.3)$$

其中符号 Re 表示相应表式中的实数部分.

因为任一复数 a 的实数部分都可写成 $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$ 的形式, 所以上式就可写成

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi^*(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega. \quad (1.3a)$$

将此式乘 $e^{-i\omega'\xi} d\xi$, 并对 ξ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 取积分. 这时不难得到频谱密度函数¹⁾

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1.4)$$

(1.3)中对应于一定 ω 值的被积函数

$$f(\omega, x, y, z, t) = \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} = \Phi(\omega) e^{i\omega \left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t \right)} \quad (1.5)$$

是一个平面谐波.

在这里, 象对傅里叶积分一样, 我们用复数形式来记一个单独的谐波. 前面已经指出过, 在各相应表式中只有实数部分才有物理意义. 因此平面谐波最后必须写成表式(1.5)的实数部分的形式, 即

$$A(\omega) \cos \left[\omega \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - \omega t + \varphi(\omega) \right], \quad (1.6)$$

在从(1.5)过渡到(1.6)时, 我们假定了(1.5)中的函数 $\Phi(\omega)$ (在一般情形下是复数)具有下面形式:

$$\Phi(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}.$$

通常令

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k_{n_x} = k_x, \quad k_{n_y} = k_y, \quad k_{n_z} = k_z,$$

其中 k, k_x, k_y, k_z 分别是波矢的模和它沿坐标轴的分量, λ 是波长. 这时表式(1.5)可写成

1) 如果利用狄拉克函数 $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi$, 并考虑到它的基本性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\delta(x)dx = \Phi(0)$ [其中 $\Phi(x)$ 是在零点连续的函数], 公式(1.4)的推导就变得特别简单.

$$f = \Phi(\omega) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = \Phi(\omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.7)$$

因为这种形式的函数对 t 的微分简单地归结为乘以 $-i\omega$, 所以 f 的波动方程可写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0. \quad (1.8)$$

对波动现象的频谱处理法具有下列特点, 因而它得到了广泛的应用:

1. 对每一个谐波行为的分析比较简单.
2. 当迭加原理成立时, 任意波动过程都可以分解为谐波.
3. 许多实际上采用的辐射器的单色性非常高, 因此它们所辐射的波接近于谐波.

把复杂的波动过程分解为谐波、从而把问题归结为方程(1.8) (其中的频率被看作是已知的), 是在有频散存在时的最方便的分析方法. 在这种情形下, 方程(1.2)简直就没有意义, 因为这时 c 这个量的意义不明确.

以后我们几乎只讨论谐波(1.7), 而在必要时再用它们组成形式更为复杂的波扰动.

2. 不均匀平面波 平面谐波的表式(1.7)有一个对以后的叙述很重要的有趣推广. 上面已经指出过, k_x, k_y, k_z 是波矢沿坐标轴的分量. 同时曾假定这些量可取任意三个实数, 它们满足关系

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (1.9)$$

我们现在不去深究这些数的意义, 而假定 k_x, k_y, k_z 的组合是下列复数的三元组:

$$k_x = k'_x + ik''_x, \quad k_y = k'_y + ik''_y, \quad k_z = k'_z + ik''_z. \quad (1.10)$$

同时我们重新要求当 $k = \frac{\omega}{c}$ 取实数值时等式(1.9)成立. 因此表式(1.7)仍然满足波动方程(1.8).

我们来看一看, 由具有复数值的 k_x, k_y, k_z 的表式(1.7)所描写的波到底是什么. 把(1.10)代入(1.7), 我们得到

$$f = \Phi(\omega) e^{i(k'_x x + k'_y y + k'_z z - \omega t) - (k''_x x + k''_y y + k''_z z)}. \quad (1.11)$$

这一表式描写一个具有可变振幅的波. 很容易看出, 这个波的等振幅面由方程

$$k''_x x + k''_y y + k''_z z = c_1 \quad (1.12)$$

给出, 而等位相面由方程

$$k'_x x + k'_y y + k'_z z = c_2 \quad (1.13)$$

给出; 其中 c_1 和 c_2 是恒量. 可以证明, 等位相面与等振幅面正交. 实际上, 把(1.10)代入(1.9), 并令等式两端的虚数部分相等, 就得到

$$k'_x k''_x + k'_y k''_y + k'_z k''_z = 0.$$

这一等式正好表示出平面族(1.12)与平面族(1.13)正交的条件.

(1.11)型的波通常称为不均匀平面波. 这个波沿着由矢量 $\mathbf{k}'(k'_x, k'_y, k'_z)$ 所給定的方向传播, 其振幅沿垂直方向衰减.

适当地选择坐标系总是可以使 $k'_y = k''_y = 0$. 这时, 如同对于寻常的平面波一样, 可引入某一角度 ϑ , 并設

$$k_x = k \sin \vartheta, \quad k_z = k \cos \vartheta. \quad (1.14)$$

按照(1.10), 由于 k_x 和 k_z 是复数, 因而 ϑ 也是复角.

作为例子, 我們来討論 $\vartheta = \frac{\pi}{2} - i\alpha$ 的情形, 其中 α 是一实数. 从(1.14)我們得到

$k_x = k \operatorname{ch} \alpha$, $k_z = ik \operatorname{sh} \alpha$, 因而平面波的表式(1.7)可写成

$$f = \Phi(\omega) e^{ik \operatorname{ch} \alpha \cdot x - k \operatorname{sh} \alpha \cdot z - i\omega t}. \quad (1.15)$$

由此可見, 我們所得到的波沿着 x 軸方向传播, 并具有在 z 軸方向指数地减小着的振幅. 从(1.15)得到波的传播速度等于

$$\frac{\omega}{k \operatorname{ch} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{ch} \alpha},$$

即总是小于寻常平面波的传播速度 c . 相应的波长等于 $\frac{2\pi}{k \operatorname{ch} \alpha} = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \alpha}$, 即小于同一頻率下的寻常平面波的波长. α 越大, 則波长越短, 而波沿 z 軸方向的衰减系数越大.

以上所講的都是就波在介质中不被吸收的情形而言 (k 是实数). 当吸收存在时, 引入不均匀波这一概念也不会引起原則性的困难. 当然, 这时的等位相面和等振幅面已不再彼此垂直了.

讓我們稍微提前一些指出, 当平面波在介质分界面上折射时, 不均匀平面波可轉化为寻常的均匀波, 反过来也一样. 这一点可从折射定律

$$n \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta \quad (1.16)$$

直接看出, 其中 n 是折射率, ϑ 是入射角, ϑ_1 是折射角.

如果 $n < 1$, 而 $\sin \vartheta > n$, 那么从(1.16)得出 $\sin \vartheta_1 > 1$, 即 ϑ_1 是复角, 因而折射波是不均匀的. 这个人所共知的情形在波全内反射时实现.

与此相反, 如果 $\sin \vartheta > 1$, 即入射波是不均匀的, 但 $\sin \vartheta < n$ (自然, 在这种情形下 $n > 1$), 那么, 就得到 $\sin \vartheta_1 < 1$, 即折射波是寻常的均匀波. 这两种情形当我們在 § 23 中研究球面波的折射时还会遇到. 球面波可以分解成包括不均匀平面波在内的平面波的組合, 因此也发生关于不均匀平面波的折射的問題.

§ 2. 电磁波的反射和折射

1. 一般关系 在研究电磁波的反射和折射时, 我們将从各向同性均匀介质中的麦克斯韦方程出发, 后者用高斯单位制来写就是:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

在矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 对时间的依赖关系是谐和的情形下, 对时间的微分归结为乘以 $-i\omega$. 因此方程(2.1)可写成下面形式:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{i\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{i\omega}{c} \mu \mathbf{H},\end{aligned}\quad (2.2)$$

其中用

$$\epsilon' = \epsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega} i \quad (2.3)$$

来表示介质的复介电常数. 对方程组(2.2)中的第二个方程作 rot 的运算, 并在方程组中消去 $\operatorname{rot} \mathbf{H}$, 再考虑到关系式 $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$ (其中已考虑到 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$), 我們便得到波动方程

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.4)$$

其中

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu}. \quad (2.5)$$

平面谐波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.6)$$

是这个方程最简单的解, 其中 $\mathbf{E}_0$ 是常矢量.

$\mathbf{H}$ 的相应表式可从(2.2)中的第二个方程

$$\mathbf{H} = -\frac{ic}{\mu\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

得到, 把式(2.6)代入上式后, 得

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}]. \quad (2.7)$$

2. 两种介质分界面上的反射和折射 我們这样来选择直角坐标系, 使得 xy 平面同介质分界面重合, 而 xz 平面同波的入射面重合 (这时 $k_y = 0$), 大家知道, 任一平面电

磁波可以設想成两个波的迭加,两个波之一的矢量 $\mathbf{E}$ 垂直于入射面,而另一波的矢量 $\mathbf{E}$ 在此平面之内.

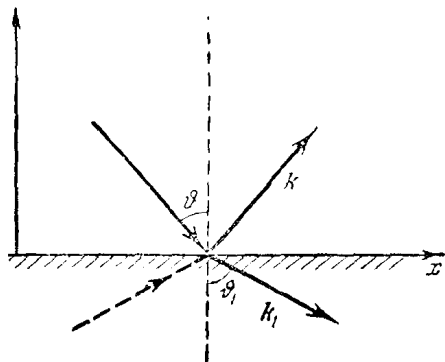


图1 电磁波在分界面上的反射和折射

我們首先來討論第一种波的反射和折射. 我們用 ϵ' , μ 和 ϵ_1' , μ_1 分别代表上介质和下介质的介电常数和磁导率. ϑ 代表波的入射角, ϑ_1 代表折射角(图1).

上介质中的电场可以写成

$$E_y = E_0 e^{i(k_x x - k_z z)} + V_{\perp} E_0 e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (2.8)$$

其中第一项是入射波,第二项是反射波. 入射波的振幅用 E_0 代表,而反射系数用 $V_{\perp}$ 代表.

k_x 和 k_z 代表以关系式(1.14)与入射角 ϑ 相联系

的波矢 $\mathbf{k}$ 的分量. 把(2.8)代入(2.7)中,我們就得到上介质中的 H_x 为

$$H_x = \frac{c k_z E_0}{\mu \omega} [e^{i(k_x x - k_z z)} - V_{\perp} e^{i(k_x x + k_z z)}]. \quad (2.9)$$

用类似方法可得到 H_z 的表式.

下介质中的电场可以写成

$$E_{1y} = W_{\perp} E_0 e^{i(k_{1x} x - k_{1z} z)}, \quad (2.10)$$

其中 $W_{\perp}$ 是分界面的透射系数,而

$$k_{1x} = k_1 \sin \vartheta_1, \quad k_{1z} = k_1 \cos \vartheta_1, \quad k_1 = k \sqrt{\frac{\epsilon_1' \mu_1}{\epsilon' \mu}}. \quad (2.11)$$

此外,利用公式(2.7),我們得到

$$H_{1x} = \frac{c W_{\perp} k_{1z}}{\mu_1 \omega} E_0 e^{i(k_{1x} x - k_{1z} z)}. \quad (2.12)$$

常数 $V_{\perp}$, $W_{\perp}$ 及角度 ϑ 都由边界条件确定,大家知道,这些边界条件要求 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在分界面两侧的切向分量相等,在我們的情形下就是

$$E_y = E_{1y}, \quad H_x = H_{1x}. \quad (2.13)$$

将表式(2.8), (2.9), (2.10)和(2.12)代入这两个等式,我們就得到熟知的折射定律的表式:

$$k_{1x} = k_x \quad \text{或} \quad n \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta, \quad (2.14)$$

其中

$$n = \frac{k_1}{k} = \sqrt{\frac{\epsilon_1' \mu_1}{\epsilon' \mu}} \quad (2.15)$$

是分界面的折射率;同时,我們也得到反射系数和透射系数的表式;

$$V_{\perp} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta - n \cos \vartheta_1}{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta + n \cos \vartheta_1} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}, \quad (2.16)$$

$$W_{\perp} = 1 + V_{\perp}. \quad (2.17)$$

在波在入射平面内偏振的情形下, 电场在上介质和下介质中沿 x 轴的分量由类似于(2.8)和(2.10)的公式表出. 我们用 $V_{\parallel}$ 和 $W_{\parallel}$ 来代表这种情形下的反射系数和透射系数, 这反映出电矢量平行于入射平面.

同上面完全一样, 对于这种情形, 我们得到

$$V_{\parallel} = \frac{n \cos \vartheta_1 - \frac{\epsilon_1'}{\epsilon'} \cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1 + \frac{\epsilon_1'}{\epsilon'} \cos \vartheta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} - \frac{\mu}{\mu_1} n^2 \cos \vartheta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} + \frac{\mu}{\mu_1} n^2 \cos \vartheta}, \quad (2.18)$$

$$W_{\parallel} = 1 + V_{\parallel}, \quad (2.19)$$

而关系式(2.14)在这一情形下仍然有效¹⁾. 顺便说说, 假如我们把反射系数定义为反射波中与入射波中的分量 H_y (而不是 E_x) 的比值, 那么就得到与(2.18)符号相反的表式.

我们还要提起在推导波的反射和折射的基本公式时常常被忽略的一个细节. 为确定起见, 我们重新来研究垂直于入射平面偏振的情形.

我们令下介质中的场具有(2.10)的形式. 其实假如令场具有下面形式:

$$E_{1y} = W_{\perp} E_0 e^{i(k_{1x}x - k_{1z}z)} + W'_{\perp} E_0 e^{i(k_{1x}x + k_{1z}z)},$$

那么分界面上的所有条件就都被满足.

这时, 若取系数 $W_{\perp}$ 和 $W'_{\perp}$ 可能值的无限总体, 边界条件就都被满足. 可是在这里补充包含系数 $W'_{\perp}$ 的后面一项这种可能性为辐射原理(关于它我们现在还未讲到)的要求所排斥. 这一原理在所给情形下要求: 下介质中的场对应于在 $z \rightarrow -\infty$ 处离开分界面的波, 虽然上面所写出的补充项是对应于来自无穷远的波(它的传播方向在图 1 中由虚线箭头所表示)²⁾.

- 1) 在反射系数的表式(2.16)和(2.18)中出现根 $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$, 当 n 为复数时必须从这个根的两个可能的符号中选取满足条件 $\text{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} > 0$ 的那一个. 事实上, 既然 $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = n \cos \vartheta_1 = \frac{k_1}{k} \cos \vartheta_1 = \frac{k_{1x}}{k}$, 那么在相反的假设下我们就会得到 $\text{Im} k_{1z} < 0$, 而按照(2.10), 这就给出: 当 $z \rightarrow -\infty$ 时(在下介质中)场的振幅无限地增大.
- 2) 就这些讨论看来, 在介质中的群速度与相速度异号的情形下(在晶体点阵中存在着具有这种性质的波, 这是曼捷尔什塔姆(Л. И. Мандельштам)所指出的), 当波折射时发生一有趣的局面. 这时, 在上述两种可能性中只有那种使能量从分界面向回流的波才可以在下介质中存在. 与此相反, 这时相速度却指向分界面. 这恰恰就是我们直到现在撇开未谈而用虚线描绘在图 1 上的波.