高等学校试用教材

# 弹性力学简明教程

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

# 弹性力学简明教程

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材
弹性力学简明教程
徐芝纶 编

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷一厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 260,000
1980年1月第1版 1983年3月第4次印刷
印数 55,501——68,500
书号 15012·0237 定价 1.10 元

# 前　言

本书是为高等学校水利、土建类专业编写的弹性力学教材。书中的内容，系摘自编者为高等学校工科力学专业编写的《弹性力学》，以及以华东水利学院的名义编写的《弹性力学问题的有限单元法》，在内容的编排上根据水利、土建类专业的需要作了一些变动。

本书全部内容所需的教学时数，可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的时数，各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。各章之后的习题，数量较多，可按照学生课外学时数的多少，布置其中的一部分。

本书承主审人清华大学龙驭球同志和太原工学院、浙江大学、成都科学技术大学、武汉建筑材料工业学院、北京工业大学、南京工学院、北京建筑工程学院、武汉水利电力学院、华北水利水电学院、西南交通大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

姜弘道和李昭银两位同志参加了本书的编写工作。

徐芝纶

一九七九年十一月

# 目　录

# 第一章　绪　　论

## §1-1　弹性力学的内容

弹性力学，又称为弹性理论，研究弹性体由于受外力作用或由于温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

弹性力学的任务，与材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度和刚度，并寻求或改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都还要引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载下的弯曲，就引用了

平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力(弯应力)按直线分布，图 1-1$a$。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的结果来校核这个假定，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者差不多是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而显然是按曲线变化的，如图 1-1$b$ 所示，并且材料力学里给出的最大正应力可能有较大的误差。

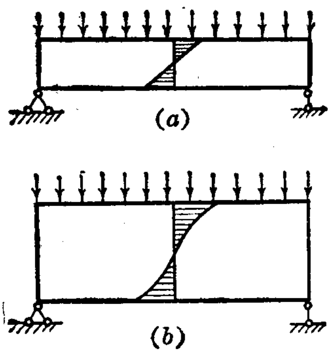

图 1-1

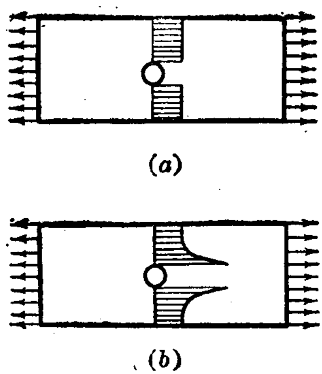

图 1-2

又例如，对于有孔的拉伸构件，用材料力学的方法计算，那就和无孔时一样，要假定拉应力在净截面上均匀分布，图 1-2$a$。在弹性力学里研究这个问题时就用不着拉应力均匀分布的假定。弹性力学的研究结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布的，而是在孔的附近发生高度的应力集中，孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出若干倍，图 1-2$b$。

虽然弹性力学里通常是不研究杆件系统的，然而近几十年来，不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定

的近似性，但应用在工程上，通常却是足够精确的。在近二十几年间发展起来的有限单元法，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对同一结构的各个构件，甚至对同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很多的工作量，而仍然得到令人满意的结果。

总之，材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当更多地发挥它们综合应用的威力，才能使它们更好地为我国的社会主义建设事业服务。

## §1-2　弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里已经用到过，但在这里仍有再加详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 $P$ 所受体力的大小与方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 $P$ 点而它的体积为 $\Delta V$，图 1-3$a$。设作用于 $\Delta V$ 的体力为 $\Delta Q$，则体力的平均集度为 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$。如果把所取的一小部分物体不断减小，即 $\Delta V$ 不断减小，则 $\Delta Q$ 及 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 都将不断改变大小、方向和作用点。现在，命 $\Delta V$ 无限减小而趋于 $P$ 点，假定体力为连续分布，则 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 将

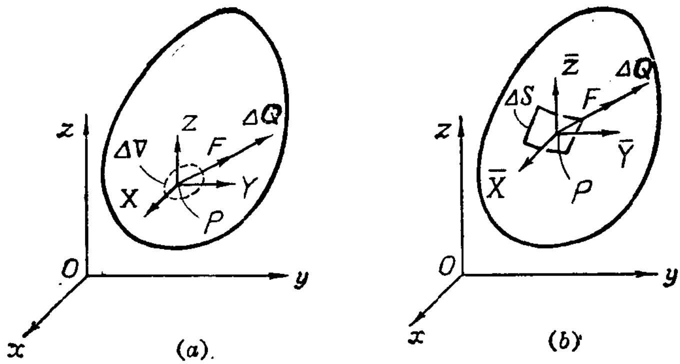


图 1-3

趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$, 即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \boldsymbol{F}.$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$, 就是该物体在 $P$ 点所受体力的集度。因为 $\Delta V$ 是标量,所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 $\Delta\boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 $x$、$y$、$z$ 上的投影 $X$、$Y$、$Z$, 称为该物体在 $P$ 点的体力分量, 以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]$^{-3}$。

所谓面力, 是分布在物体表面上的力, 例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点 $P$ 所受面力的大小与方向, 在这一点取该物体表面的一小部分, 它包含着 $P$ 点而它的面积为 $\Delta S$, 图 1-3$b$。设作用于 $\Delta S$ 的面力为 $\Delta\boldsymbol{Q}$, 则面力的平均集度为$\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S}$。与上述相似, 命 $\Delta S$ 无限减小而趋于 $P$ 点, 假定面力为连续分布, 则$\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S}$将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$, 即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S} = \boldsymbol{F}.$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$ 就是该物体在 $P$ 点所受面力的集度。因为 $\Delta S$ 是

标量，所以$F$的方向就是$\Delta Q$的极限方向。矢量$F$在坐标轴$x$、$y$、$z$上的投影$\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$，称为该物体在$P$点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]$^{-2}$。

物体受外力以后，其内部将发生内力，即物体本身不同部分之间相互作用的力。为了研究物体在其某一点$P$处的内力，假想用经过$P$点的一个截面$mn$将该物体分为$A$和$B$两部分，而将$B$部分撇开，图 1-4。撇开的部分$B$将在截面$mn$上对留下的部分$A$作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着$P$点而它的面积为$\Delta A$。设作用于$\Delta A$上的内力为$\Delta Q$，则内力的平均集度，即平均应力为$\frac{\Delta Q}{\Delta A}$。现在，命$\Delta A$无限减小而趋于$P$点，假定内力连续分布，则$\frac{\Delta Q}{\Delta A}$将趋于一定的极限$s$，即

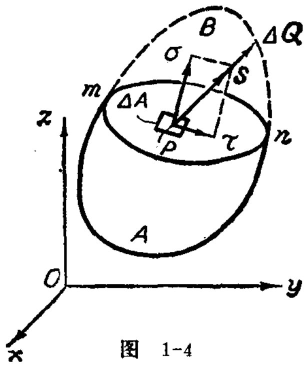

图 1-4

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta A}=s.$$

这个极限矢量$s$就是物体在截面$mn$上的、在$P$点的应力。因为$\Delta A$是标量，所以应力$s$的方向就是$\Delta Q$的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量与物体的形变或材料的强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量，也就是正应力$\sigma$及剪应力$\tau$，如图 1-4 所示。应力及其分量的因次是[力][长度]$^{-2}$。

显然可见，在物体内的同一点$P$，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方

向，在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA=\Delta x, PB=\Delta y, PC=\Delta z$，图 1-5。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 $\sigma$ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码。例如，正应力 $\sigma_x$ 是作用在垂直于 $x$ 轴的面上，同时也是沿着 $x$ 轴的方向作用的。剪应力用 $\tau$ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，剪应力 $\tau_{xy}$ 是作用在垂直于 $x$ 轴的面上而沿着 $y$ 轴方向作用的。

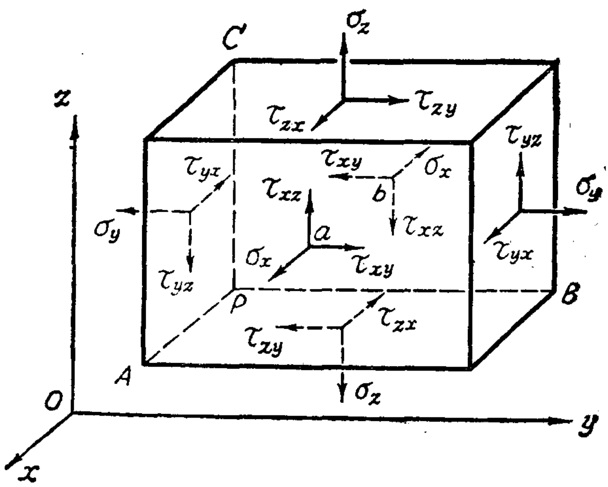


图 1-5

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力分量全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应

力说来，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于剪应力说来，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个剪应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 $ab$ 为矩轴，立出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2}=0.$$

同样可以立出其余两个相似的方程，简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}. \tag{1-1}$$

这就证明了剪应力的互等性：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。

在这里，我们没有考虑应力由于位置不同而产生的改变（也就是把六面体中的应力当作均匀应力），而且也没有考虑体力的作用。以后可见，即使考虑到应力的变化和体力的作用，仍然可以推导出剪应力的互等性。

附带指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则剪应力的互等性将表示成为 $\tau_{yz}=-\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=-\tau_{xz}$, $\tau_{xy}=-\tau_{yx}$，显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆（应力圆）时，就必须采用材料力学中的规定。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\sigma_z$、$\tau_{yz}$、$\tau_{zx}$、$\tau_{xy}$ 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 $P$ 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 $x$、$y$、$z$ 的正方向取三个微小的线段 $PA$、$PB$、$PC$，图 1-5。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为正应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为剪应变。正应变用字母 $\varepsilon$ 表示：$\varepsilon_x$ 表示 $x$ 方向的线段 $PA$ 的正应变，余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。剪应变用字母 $\gamma$ 表示：$\gamma_{yz}$ 表示 $y$ 与 $z$ 两方向的线段(即 $PB$ 与 $PC$)之间的直角的改变，余类推。剪应变以直角变小时为正，变大时为负，与剪应力的正负号规定相适应。正应变和剪应变都是无因次的数量。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 $\varepsilon_x$、$\varepsilon_y$、$\varepsilon_z$、$\gamma_{yz}$、$\gamma_{zx}$、$\gamma_{xy}$ 这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 $x$、$y$、$z$ 三轴上的投影 $u$、$v$、$w$ 来表示，以沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小(即已知物体的边界)，物体的弹性常数，物体所受的体力，物体边界上的约束情况或面力，而应力分量、形变分量和位移分量则是需要求解的未知量。

## §1-3 弹性力学中的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在导出方程时，可以从三方面来进行分析。一方面是静力学方面，由此建立应力、体力、面力之间的关系。另一方面是几何学方面，由此建立形变、位移和边界位移之间的关系。再一个方面是物理学方面，由此建立形变与应力之间的关系。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照所研究的物体的性质，以及求解问题的范围，作出若干基本假定，略去一些可以暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。本教程中采用的基本假定如下：

（1）假定物体是连续的，也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上，一切物体都是微粒组成的，严格来说，都不符合上述假定。但是，可以想见，只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多，那么，关于物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

（2）假定物体是完全弹性的。所谓弹性，指的是“物体在引起形变的外力被除去以后能恢复原形”这一性质。所谓完全弹性，指的是物体能完全恢复原形而没有任何剩余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关。由材料力学已知：韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在