

高等學校教學用書

物理實驗指南

第一冊

Т. Н. БОГДНОВА, Е. П. СУББОТИНА 著
劉立本 徐培光 張季達 宋承宗 譯

高等教育出版社

13.3
高等學校教學用書



物理實驗指南

第一冊

力學物性學

T. H. 勃格達諾伐, E. II. 蘇勃梯那著
劉立本 徐培光 張季達 宋承宗譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯“蘇聯科學”出版社 (“Советская наука”) 出版的勃格達諾伐 (Т. Н. Богданова) 和蘇勃梯那 (Е. П. Сублитина) 合著, 拔烏姆伽囉忒 (К. К. Баумгарт) 教授校的“物理實驗指南” (Руководство к практическим занятиям по физике) 譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為高等學校教學參考書。

原書分兩冊出版: 上册是1949年增訂第三版(譯本第一、二冊)。下册是1950年版(譯本第三冊)。

譯本第一冊內容為緒論及力學、聲學、物性學方面的實驗。第二冊內容為熱學、電學及幾何光學方面的實驗。第三冊內容為電磁學及物理光學方面的實驗。

第一冊由劉立本 (VII及附表)、徐培光 (II, III)、張季達 (序及 I)、宋承宗 (IV, V, VI) 譯, 劉立本校。

物 理 實 驗 指 南

第 一 冊

書號193(課184)

勃 格 達 諾 伐 等 著

劉 立 本 等 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 琉 璃 廠 一 七 〇 號

[北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號]

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上 海 天 通 菴 路 一 九 〇 號

開本787×1092 1/25 印張9 4.5/12.5 字數 182,000

一九五五年一月上海第一版

印數 1—5,000

一九五五年一月上海第一次印刷

定價 羊 12,000

第三版原序

這次出版的“物理實驗指南”上册是經過修訂並大量增補的第三版,因而實際上可以認為是一本新的,適應於現時大綱要求的教學參考書。

在科學教育的體系中,物理實驗對物理學的作用和意義,每個人都是清楚的,因而就不需要再加以說明。

這本“指南”和前兩版一樣,是以榮膺列寧勳章的、以 A. A. 士達諾夫命名的、國立列寧格勒大學物理系第一物理實驗室的實驗和設備為基礎的。除交變電流和波動光學各部門將在下冊中敘述外,本“指南”包括了物理學的所有部門。

“指南”中所描述的全部實驗,在許多年中,曾由普通物理教研組的領導人和本大學中第一物理實驗室的工作同志們系統地審查並補充過,因此所描述的實驗的方法和技術才逐漸趨於完善。

同時也應該注意到,所描述的全部實驗都是可以用祖國[⊖]工廠製造的或實驗室中工作同志們設計的儀器來做的,其中有些地方曾經得到物理系學生的幫助。

本“指南”不僅可以作為本大學中的教師和學生的必要參考書,而且可以作為其他高等學校中的教師和學生的必要參考書。本指南對於可以採用本大學第一物理實驗室的實驗的那些重新裝備或擴大實驗室,更具有特殊的價值。

本“指南”是現在的和過去的實驗室中工作同志們的集體創作。在過去的工作同志們當中,應當特別提出的有:列寧格勒大學的物理實驗室的有才幹的組織者 Н. А. Нарышкин,以及在列寧格勒封鎖期間

[⊖] 指蘇聯——譯者註。

逝世的 **В. А. Шапошников** 同志，他在編寫這本教學參考書的前兩版上曾經出了很大的力量。

同樣也必須指出第一物理實驗室的下列同志們的工作：В. В. Сокольский, И. К. Зубрицкий 和 В. Э. Аронова, 他(她)們在 1935—1941 年間曾對實驗室的發展作了很多貢獻。

由於“蘇聯科學”出版社對本書的關心，才能使本書有了很好的排印和裝訂。

如蒙指出刊誤和缺點，作者將非常感激。意見請投：Ленинград, Вас. Остр., Средний проспект, Д. 41/43, 1-Я Физическая лаборатория。

編 者

目 錄

第三版原序

緒論	1
1. 關於量度的誤差	1
2. 結果的圖解表示法	15
I 基本的量度儀器和它們的用途	17
1. 刻度尺和游標	17
2. 游標尺	18
3. 測微計	19
4. 高差計	20
5. 球徑計	22
6. 分析天平	23
用分析天平稱衡	25
砝碼組的校正	29
7. 具有補償標尺的氣象候站用杯式氣壓計	34
8. 水準儀和微小角度的量度	39
水準儀的靈敏度及其管子曲率半徑的測定	45
9. 光槓桿	49
II 密度的測定	53
導論	53
1. 用流體靜力稱衡法測定固體密度	53
2. 用容積計測定固體密度	57
3. 用比重瓶測定液體密度	60
4. 用比重瓶測定固體密度	63
5. 用衛斯特發爾秤測定液體密度	65
6. 用懸浮法測定固體密度	67
7. 空氣密度的測定	69
8. 用梅逸法測定蒸氣密度、分子量的測定	72
III 力學	77
1. 運動定律的研究	77

2. 擺的運動的研究	80
3. 用衝擊擺測定子彈的飛行速度	83
4. 衝擊測力計	86
IV 振動和它的應用	94
1. 用單擺測定重力加速度	94
方法 I	94
方法 II	97
2. 用凱特可倒擺測定重力加速度	98
3. 物理擺轉動慣量的測定	103
4. 物理擺振動週期的變化與旋轉軸離重心距離的關係。重力加速度的測定	107
5. 物體轉動慣量的測定	111
6. 用動力法測定轉動慣量	115
7. 用滾動小球法測定凹面的曲率半徑	117
V 聲學	121
1. 由量度駐波在彈性弦上的傳播速度和波長來測定音叉的振動數	121
2. 用孔脫法測定聲速。由棒中聲速測定楊氏模量	123
3. 弦的振動定律的驗證。振動的合成。利薩如圖形的獲得	126
4. 用共振法測定聲音在空氣中的波長和速度	129
5. 用駐波法測定空氣中的聲速	133
VI 固體的彈性	136
1. 連在彈簧一端的天平盤下降時所消耗的功	136
2. 由金屬線的伸長測定楊氏模量	139
3. 由棒的彎曲測定楊氏模量	142
4. 用扭轉法測定切變模量	147
5. 用振動法測定扭轉模量	149
6. 用振動法測定楊氏模量	150
VII 表面張力和黏滯性	157
1. 用拉脫平板法測定液體的表面張力係數	157
2. 用拉脫圓環法測定液體的表面張力係數	162
3. 用毛細管中液體上升法測定表面張力係數	163
方法 I	163
方法 II	169
4. 用液體表面層壓力差的補償法測定表面張力係數	170

5. 用在液體內部使氣泡脫離的方法測定表面張力係數·····	174
6. 肥皂液表面張力的測定·····	178
方法 I ·····	178
方法 II ·····	181
7. 用數液體滴數的方法測定表面張力係數·····	183
8. 用扭秤拉脫法測定液體表面張力係數·····	185
9. 用味列伊法測定水的表面張力係數·····	188
10. 用斯托克斯法測定液體的內摩擦係數(黏滯度)·····	195
方法 I ·····	195
方法 II ·····	199
11. 用泊謨葉法測定液體的內摩擦係數·····	202
12. 用旋轉圓筒法測定絕對黏滯係數·····	206
13. 用盤振動法測定液體的相對黏滯度·····	211
14. 用喔斯忒伐爾德黏滯計測定液體的內摩擦係數·····	214
物理量表·····	217
表 I. 固體和液體的密度 ·····	218
表 II. 各種溫度時水的密度 ·····	219
表 III. 液體的表面張力係數 ·····	219
表 IV. 各種溫度時水的表面張力 ·····	219
表 V. 水的黏滯度 ·····	220
表 VI. 固體的彈性 ·····	220
參考書·····	221
中蘇人名對照表·····	222

物理實驗指南

緒論

1. 關於量度的誤差

在實驗室中進行實驗，通常要伴隨着許多物理量的量度，例如：溫度，物體的大小，水銀柱的高度，氣體的壓力，電流的強度，位差等。

必須承認，任何的量度都不可能進行得完全準確。任何的量度都有某種錯誤或誤差。

由於這種原因，僅僅提出實驗的結果是不夠的。常常必須指出所生錯誤或誤差的大小。例如，這樣的答覆：棒長等於 127 厘米，不應認為是正確的。這樣的答覆：棒長等於 127 ± 2 厘米，才是正確的。這就表明，注意到了可能產生的誤差為 ± 2 厘米，在任何情形下，棒長不大於 129 厘米，也不小於 125 厘米。

量度的誤差可由兩種原因產生，因此可分為兩類：系統誤差和偶然誤差。

系統誤差是由於量度儀器的可能缺點（溫度計的零刻度可能有一點變動，氣壓計的托里拆利真空可能含有極少量的空氣，測微螺旋的螺紋或刻度尺的標度可能不完全正確等等）而產生的。儀器的這種特點使量度的結果改變，不是增大就是減小。

如果實驗的理論探討得不夠充分，也未考慮到影響所求結果的準確度的全部原因，例如：(a) 測定物體的重量時，沒有考慮到在空氣中稱衡時的重量損失的校正。(b) 測定被物體排出的水的重量時，沒有考慮到水的密度隨溫度的變化而改變。(B) 測定沸騰的溫度時，沒有考慮到

大氣壓力對沸點的影響，則在實驗的過程中，這種系統誤差就要產生。

研究實驗中所用的儀器，儘可能充分探討實驗的理論並將校正項引入到量度的結果中，系統誤差是可以避免的。例如，利用流體靜力稱衡法測定物體密度的 d 公式：

$$d = \frac{M}{M - m},$$

式中 M 是物體在空氣中的重量， m 是在水中的重量，上列公式應由下式代替：

$$d = \frac{M}{M - m} (\Delta_t - \delta) + \delta,$$

式中 Δ_t 是在實驗溫度 t 時的水的密度， δ 是在同一條件下的空氣的密度。

偶然誤差是由於讀數不準確而引起的，這種不準確是任何實驗者都可能無意地引入的。偶然誤差是由視覺、聽覺或其他的感覺的缺點，及許多隨着量度而來的不能預料的其他情況引起。偶然誤差可以在兩方面改變結果：有時使結果增大，有時使結果減小。要減小偶然誤差的影響，任何的量度都必須重複作若干次。在多次反復進行同一量度的情況下，沒有根據認為量度的偏差向一方面比向另一方面更為可能。無疑地，由多次個別量度結果而得到的算術平均值最接近於被測的量之真值。

由或然率的理論能夠從各次量度對其平均值的偏差計算出平均結果的近真誤差。在或然率理論的教程中能夠詳細地介紹這個問題。

我們的目的是給出一些實用上的指示，如在學校的實驗室中，在不多次的重複量度的情況下，就確定平均結果的誤差。

假設，我們要量度棒的長度 l 。量度這長度五次，得到如下的結果： $l_1 = 2.32$ 厘米； $l_2 = 2.34$ 厘米； $l_3 = 2.36$ 厘米； $l_4 = 2.33$ 厘米； $l_5 = 2.35$ 厘米。

這些結果的算術平均值 l_0 最接近於被測長度的真值：

$$l_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5} = 2.34 \text{ 厘米。}$$

我們用 Δl 表示各次量度對此平均值的偏差。那麼有：

$$\Delta l_1 = l_0 - l_1 = 0.02 \text{ 厘米； } \Delta l_2 = l_0 - l_2 = 0.00 \text{ 厘米； } \Delta l_3 = l_0 - l_3 = -0.02 \text{ 厘米； } \Delta l_4 = l_0 - l_4 = 0.01 \text{ 厘米； } \Delta l_5 = l_0 - l_5 = -0.01 \text{ 厘米。}$$

這些偏差叫做各次量度的絕對誤差(錯誤)。我們只注意它們的絕對值，並求出它們的算術平均值 Δl_0 ：

$$\begin{aligned} \Delta l_0 &= \frac{|\Delta l_1| + |\Delta l_2| + |\Delta l_3| + |\Delta l_4| + |\Delta l_5|}{5} \\ &= \frac{0.02 + 0.00 + 0.02 + 0.01 + 0.01}{5} = 0.012 \cong 0.01 \text{ 厘米。} \end{aligned}$$

Δl_0 叫做結果的平均絕對誤差。

平均絕對誤差與被測量的平均值的比，即 $\frac{\Delta l_0}{l_0}$ ，叫做結果的平均相對誤差。

通常以百分數表示相對誤差。例如：

$$\frac{\Delta l_0}{l_0} = \frac{0.01}{2.34} = 0.0043 \cong 0.4\%。$$

在計算實驗結果時，我們經常要確定結果的平均絕對誤差及平均相對誤差。

上述定義在學校實驗室中是被普遍採用的。但在研究工作中却應用其他更嚴格的方法來計算結果的近真誤差。

假定某一量 x 被測 n 次，得到 n 個值：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n。$$

x 的最近真值就是這 n 個值的算術平均值

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}。$$

將各次量度的絕對誤差列成一表：

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0,$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_0,$$

.....

.....

$$\Delta x_n = x_n - x_0,$$

又列一表：

$$(\Delta x_1)^2, (\Delta x_2)^2, (\Delta x_3)^2 \cdots (\Delta x_n)^2,$$

用 S 表示 $(\Delta x)^2$ 的和：

$$S = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2.$$

各次觀測的平均誤差等於 ε ：

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}}.$$

算術平均值 x_0 的平均誤差等於 E ：

$$E = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

近真誤差等於平均誤差的 0.674 (或 $\frac{2}{3}$) 倍。

只量度一個物理量就能得出結果，比較是不常見的。在大多數的情況，要得到結果，就必須進行許多量度，並要對所得各被測量的數值進行各種運算。知道了結果中各量在量度時的誤差，還必須確定結果本身的誤差。

現在我們來闡明一些定理，按照這些定理可以計算出結果的絕對誤差和相對誤差。

預備知識 各次量度的絕對誤差和結果的平均絕對誤差，與被測的量本身比較起來，通常是很小的量；我們把它們當作一級微量。如果按照問題的情形，這些量必須連乘或自乘多次，則所得結果可認為是高級微量。因為這樣的量是在量度準確度的範圍之外，所以可以將它略去而無重大的錯誤。例如： $\Delta\alpha = \pm 0.000004$ ，則 $(\Delta\alpha)^2 = 16 \times 10^{-12}$ 。如果 $\Delta p = \pm 0.0005$ ， $\Delta t = \pm 0.03$ ，則 $\Delta p \cdot \Delta t = 15 \times 10^{-6}$ 。注意到了這個

情形,就可以寫下下列近似的公式,準確到一級微量:

$$\begin{aligned}(1 \pm \Delta\alpha)^2 &= 1 \pm 2\Delta\alpha, \\ (1 + \Delta\alpha)(1 - \Delta\alpha) &= 1, \\ (1 + \Delta\alpha)(1 - \Delta\beta) &= 1 + \Delta\alpha - \Delta\beta, \\ \frac{1}{1 + \Delta\alpha} &= \frac{1 - \Delta\alpha}{(1 + \Delta\alpha)(1 - \Delta\alpha)} = 1 - \Delta\alpha.\end{aligned}$$

定理 1 和的絕對誤差等於各分量的絕對誤差之和。

假定

$$x = A + B, \quad (1)$$

式中 A 和 B 是被測的量的近似值。量度 A 時所產生的誤差為 $\pm \Delta A$, 量度 B 所產生的誤差為 $\pm \Delta B$ 。和的值也是近似的,並將與準確值相差一量 Δx 。那麼:

$$x \pm \Delta x = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)。$$

爲了簡寫,我們規定在這和的表示式中,在 Δx , ΔA 和 ΔB 之前只寫一個正號,而認爲 Δx , ΔA 和 ΔB 本身含有誤差的符號。應在各分量誤差的可能不利的情況下來計算誤差 Δx 。當分量誤差取同號時,就是說當它們都取正的或都取負的時候,就出現最不利的情況。考慮到上面所說的,我們可寫:

$$x + \Delta x = A + \Delta A + B + \Delta B。 \quad (2)$$

由等式(2)減去等式(1),則得:

$$\Delta x = \Delta A + \Delta B。 \quad (3)$$

這等式就證明了本定理,此定理可以推廣到任意多個分量的情況。

推論 以等式(1)等除式(3),可得:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B}。 \quad (4)$$

這個等式就是和的相對誤差的表示式。

例:

$$(1) \quad x = (9 \pm 0.1) + (6 \pm 0.05); \Delta x = \pm 0.15; x = 15 \pm 0.15;$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.15}{15} = 0.01 = 1\%。$$

(2) $x = C + B$; 此處 C 是準確的數字, 並且 $\Delta C = 0$ 。

所以 $x \pm \Delta x = C + B \pm \Delta B$, 由此得 $\Delta x = \pm \Delta B$ 及 $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta B}{C+B}$ 。

如果 $C = 3$, $B = 10 \pm 0.5$, 則 $x = 13 \pm 0.5$, $\Delta x = \pm 0.5$ 於是 $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.5}{13} = 0.037 \approx 4\%$ 。

定理 2 差的絕對誤差等於被減數和減數的絕對誤差之和。

如果

$$x = A - B, \quad (1)$$

式中 A 和 B 是不準確的, 而被測之量的近似值為 $A \pm \Delta A$ 和 $B \pm \Delta B$, 所以差的真值為:

$$x + \Delta x = (A + \Delta A) - (B + \Delta B)。 \quad (2)$$

在此等式中, 如在第一個定理中一樣, 我們在 Δx , ΔA 和 ΔB 之前只寫一個正號。 A 和 B 是兩個互不相干的量。量度 A 時產生了某一符號的誤差, 而在量度 B 時可能產生相反符號的誤差。例如, 用虹吸氣壓計測定水銀柱的高度時, 此水銀柱的高度等於上下水銀面的差, 我們可能在讀上面的水平面 A 時取了較 A 為高的值 $A + \Delta A$, 而在讀下面的水平面 B 時取了較 B 為低的值 $B - \Delta B$ 或者相反。如果預先不知道這兩個誤差的符號, 但要對最不利的情況來計算差的誤差, 我們就必須對 ΔA 和 ΔB 取不同的符號。考慮到了這個條件, 並由等式(2)減去等式(1), 則得:

$$\Delta x = \Delta A + \Delta B。 \quad (3)$$

推論 以等式(1)除等式(3), 則有:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A - B} = \frac{\Delta A}{A - B} + \frac{\Delta B}{A - B}。 \quad (4)$$

這個等式就是兩個近似量的相對誤差的表示式。

例: $x = A - B$, 此處 $A = 25.3 \pm 0.2$, $B = 9.0 \pm 0.3$ 。由此應該得出:

$$x = 16.3 \pm 0.5, \Delta x = \pm 0.5, \text{ 於是 } \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.5}{16.3} \approx 3\%。$$

定理 3 兩個乘數之積的絕對誤差等於第一乘數乘第二乘數的絕

對誤差加第二乘數乘第一乘數的絕對誤差。

設

$$x = A \cdot B. \quad (1)$$

假定符號的規定和證明前兩個定理時所採取的一樣。我們也可以看出，當二乘數的誤差取相同的符號時，即當所有的乘數都增大或都減小時，就可以得到 Δx 的最大值。

我們有：

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= (A + \Delta A)(B + \Delta B) = AB + A\Delta B + B\Delta A + \Delta A\Delta B \\ &= AB + A\Delta B + B\Delta A \end{aligned} \quad (2)$$

準確到一級微量。由等式(2)減去等式(1)，則得：

$$\Delta x = B\Delta A + A\Delta B. \quad (3)$$

這個等式就證明了本定理。

推論 以等式(1)除等式(3)，則得：

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}. \quad (4)$$

等式(4)表示兩乘數之乘積的相對誤差，並表明兩乘數之乘積的相對誤差等於這兩乘數的相對誤差之和。

可以將這個定理推廣到任意多個乘數的情形。

例：

$$(1) \quad x = IR, \text{ 此處 } I = 5 \pm 0.5, R = 2 \pm 0.2.$$

$$\Delta x = I\Delta R + R\Delta I = 5 \times 0.2 + 2 \times 0.5 = 2; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{10} = 20\%.$$

$$x = 10 \pm 2.$$

$$(2) \quad x = CB, \text{ 此處 } C \text{ 是一常數且 } \Delta C = 0.$$

$$x + \Delta x = C(B \pm \Delta B) = CB \pm C\Delta B,$$

因此

$$\Delta x = \pm C\Delta B; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{C\Delta B}{CB} = \frac{\Delta B}{B}.$$

例如，

$$C = 3, B = 25 \pm 0.2, \text{ 則 } \Delta x = \pm 0.6;$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.6}{75} = \frac{0.2}{25} = 0.8\%。$$

從這個例子可以得出：不變的乘數使乘積的絕對誤差增加，但不改變乘積的相對誤差。

$$(3) \quad x = A^2。$$

設底數 A 以 $\pm \Delta A$ 的誤差計算。那麼 $x + \Delta x = (A \pm \Delta A)^2 = A^2 \pm 2A\Delta A + (\Delta A)^2$ ，或略去最後一項，有：

$$x + \Delta x = A^2 \pm 2A\Delta A，$$

因而，

$$\Delta x = \pm 2A\Delta A；於是 \frac{\Delta x}{x} = \frac{2A\Delta A}{A^2} = \frac{2\Delta A}{A}。$$

$$(4) \quad x = A^n。$$

和上例的做法一樣，我們有：

$$\Delta x = \pm nA^{n-1}\Delta A，於是 \frac{\Delta x}{x} = \frac{n\Delta A}{A}。$$

因此冪函數的相對誤差等於冪指數乘底數的相對誤差。

$$(5) \quad x = \sqrt{A} \text{ 或 } x = A^{\frac{1}{2}}。$$

$$\Delta x = \pm \frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}}\Delta A = \pm \frac{1}{2}\frac{\Delta A}{\sqrt{A}}；\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta A}{A}。$$

定理 4 分數的絕對誤差等於分母乘分子的絕對誤差加上分子乘分母的絕對誤差，再除以分母的平方。

考慮到以前所作的符號規定，當分子和分母的誤差取相反的符號時，即當分子增加而分母減小或者相反時，則誤差 Δx 達到最大值。

設

$$x = \frac{A}{B} \quad (1)$$

則

$$x + \Delta x = \frac{A + \Delta A}{B + \Delta B} = \frac{A(1 + \frac{\Delta A}{A})}{B(1 + \frac{\Delta B}{B})} = \frac{A}{B} \frac{1 + \frac{\Delta A}{A}}{1 + \frac{\Delta B}{B}} \approx \frac{A}{B} \left(1 + \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta B}{B}\right)。$$

由此最後可得：

$$x + \Delta x = \frac{A}{B} \left(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{|\Delta B|}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{A}{B} \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)。 \quad (2)$$

由等式(2)減去等式(1),可得:

$$\Delta x = \frac{A}{B} \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right) = \frac{B\Delta A + A\Delta B}{B^2}. \quad (3)$$

推論 以等式(1)除等式(3),則得:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}.$$

按此等式,我們有:分數的相對誤差等於分子的相對誤差加上分母的相對誤差。

計算乘積和分數的相對誤差,比計算這些量的絕對誤差要簡單得多。因此,我們總是首先求出結果的相對誤差,知道了它的數值,就能很容易計算出結果的絕對誤差。

例:

$$(1) \quad Q = 0.24 I^2 R t,$$

式中,

$$I = (3 \pm 0.1) \text{ 安培}, R = (10 \pm 0.01) \text{ 歐姆}, t = (40 \pm 0.1) \text{ 秒}.$$

$$Q = 0.24 \times 3^2 \times 10 \times 40 = 864 \text{ 卡}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q \times 100}{Q} &= \left(\frac{2 \times 0.1}{3} + \frac{0.01}{10} + \frac{0.1}{40} \right) \times 100 = (0.067 + 0.001 + 0.0025) \times 100 = \\ &= 0.0705 \times 100 \approx 7\% \end{aligned}$$

$$\Delta Q = 864 \times 0.07 = 58.48 \approx 58 \text{ 卡}.$$

$$Q = (864 \pm 58) \approx (860 \pm 60) \text{ 卡}.$$

$$(2) \quad x = \frac{y z^2 t^5}{v^3 u}.$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{2\Delta z}{z} + \frac{5\Delta t}{t} + \frac{3\Delta v}{v} + \frac{\Delta u}{u}.$$

如果這些分量的和等於 C , 則 $\Delta x = \pm Cx$ 。

$$(3) \quad x = \frac{(A+B)(C-D)}{G-K}.$$

假設 $A+B=a$; $C-D=b$ 以及 $G-K=c$, 則

$$x = \frac{ab}{c}, \text{ 於是 } \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}.$$

因為

$$\Delta a = \Delta A + \Delta B, \Delta b = \Delta C + \Delta D, \Delta c = \Delta G + \Delta K,$$

所以