目　　录

绪　论

振动现象可区分为两大类。一类称为确定性振动，另一类称为随机振动。

所谓确定性振动是指那些运动时间历程可以用确定性函数来描述的振动。最简单的例子是单自由度无阻尼线性系统的自由振动，它可以用简谐函数描述为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

其中 A、ω、φ 都是确定性常数。只要知道了这些常数，那么对应于任一时刻 t 的 x 值都是确定的。比这稍复杂一些的周期振动可以展开成一系列简谐振动之和。再如单自由度线性阻尼系统对单位脉冲激励的响应可表示为

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_d t \quad t > 0$$

其中 m、ζ、ω_0、ω_d 均为确定性常数。该系统对激励 $f(t)$ 的响应可借 Duhamel 积分表示为

$$x = \int_{-\infty}^{t} f(t)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

可见，不管 $f(t)$ 多么复杂，只要它是确定性的，那么响应 x 也是确定性的。人们最早探讨的振动就是这类确定性振动，从 18 世下叶建立的微振动理论算起，至今已有二百余年的历史了。

随机振动则与之不同。例如固定航线远洋客轮在海上备受颠簸，历次航行记录下来的振动时间历程显得各相径庭，复杂多样。从单个记录来看似乎变幻莫测；但从大量记录来看却存在一定的统计规律性。因此随机振动得借助统计特性来描述。用数学术语来说，无论是随机激励还是随机响应都必须描述为随机过程。人们

对随机振动的探讨开始得比较晚，特别是机械系统随机振动的研究基本上是本世纪 50 年代才开始的，主要是由于航空工程发展的需要引起的。早期飞机的振源主要是活塞式发动机与螺桨。它们一般是在常速下运转，再说那时的飞行高度内大气波动也不大，因而出现的振动大多是稳态周期振动。对于喷气飞机与火箭来说，情况就完全不同了。这时，振源主要来自喷气噪声、大气湍流、附面层压力波动等等，而这些激励往往带有随机性。因此，关于随机激振源的调研，在随机激励下结构的振动计算、隔振设计、可靠性与疲劳寿命估计，以及随机振动试验等一系列问题就提出来了。这就为机械振动开拓了一个新的研究领域——随机振动。由于路面、波浪、阵风、地震等激励也具有随机性，因而随机振动的研究随后也遍及车辆工程、船舶与海洋工程、桥梁与建筑工程、核反应堆工程等领域。

工程中大量的随机振动问题属于确定性系统在随机激励下的响应问题。工程随机振动分析通常是指这类随机响应分析。本书将局限于这一范畴。

振动研究总是在模型化的基础上进行的。确定性振动问题通常归结为求解常微分方程或偏微分方程问题。在随机振动问题中待求量是随机的，因而问题归结为随机微分方程的求解。本书第一章至第六章将阐述常参数线性系统在随机外扰作用下的平稳与非平稳随机响应问题。对于这一部分内容，我们采用建立在均方微积分基础上的随机微分方程理论。因为它们比较容易为工程科技人员所接受，而且对于这类随机响应问题，均方理论基本上已经够用了。不仅如此，这类随机响应问题的均方解还可以借助确定性常(偏)微分方程的解法来构造。这一结论即使对于白噪声激励情形也仍然适用，尽管白噪声过程的均方导数并不存在。这有点像确定性常微分方程中以 Dirac δ 函数作为非齐次项的情形，尽管 δ 函数并非解析函数。

现有关于常参数线性系统的随机振动分析正是充分利用了确定性分析的结果。这类系统的动态特性通常可用脉冲响应函数或

频率响应函数来描述。系统的响应则可以通过 Duhamel 积分得到。因此，若已知激励的二阶矩，即可推出响应的二阶矩。这种分析通常称为相关分析。由于 Duhamel 积分可以看作对激励的线性运算，而 Gauss 过程在线性变换下仍保持 Gauss 性质，所以当激励是 Gauss 过程时，响应也是 Gauss 过程。这时，借助相关分析就可以确定响应的全部统计特性。

随机过程可模型化为平稳与非平稳两大类。简单说来，平稳过程的统计特性都不随时间轴原点的不同选取而改变；而非平稳过程则反之。相对而言，平稳情形下的激励-响应关系比较简单。如果在平稳假设的基础上再加上遍历假设，就可以用时间平均来替代集合平均，从而有可能从单个、充分长的样本来汲取所需的统计信息。这会给实际工程问题的信息处理带来极大的方便。所以工程上一般都采用这两个假设，除非已明显觉察到上述假设的不合理性。

平稳随机过程 X 的统计特性中最重要的是相关函数 $R_x(\tau)$ 与功率谱密度 $S_x(\omega)$，二者之间存在 Fourier 变换对关系，即有

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

常系数线性系统的随机分析方法可以按着眼于先求响应的相关函数还是先求其功率谱密度区分为时域法与频域法两大类。频域法的突出优点是响应功率谱与激励功率谱之间有比较简单的代数关系式，例如在单输入/单输出情形，有

$$S_x(\omega)=|H(\omega)|^2S_f(\omega)$$

其中 $H(\omega)$ 代表系统的频率特性。此外，功率谱密度有明确的物理意义，而且在谱分析中可以利用快速 Fourier 变换(FFT)这一有力工具。正因为如此，在平稳随机振动分析中频域法经久不衰地占有主导地位。不过借频域法求得功率谱后，尚需通过(有时是相当繁复的)积分运算才能求得系统的均方响应

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\mathrm{d}\omega = R_x(0)$$

与此相反，时域法首先求响应相关函数 $R_x(\tau)$的解析式，令该式中 $\tau=0$，即得响应的均方值。这是时域法的一个优点。注意到功率谱的概念是建立在过程平稳性的基础上的，当过程失去平稳性时，功率谱也就失去意义。所以对于非平稳随机响应分析，时域法显得更为直捷。

不论对于确定性分析，还是随机分析，模态分析法都是求解多自由度系统振动问题的一个十分有力的工具。随机振动的模态分析既可在频域内实现，也可在时域内实现。一般说来，频域分析与时域分析两者各有所长，相辅相成。虽然两者异曲同工，但往往从不同的角度揭露事物的内在规律，使人们对振动的认识有所深化。本书重点阐述随机振动的模态分析法，包括它的最新进展。

振动系统划分为线性与非线性两大类，这也是模型化的结果。实际的工程系统或多或少带有某些非线性因素。尽管线性随机振动的研究已经相当成熟，并已在工程问题中取得十分成功的应用，但有些振动现象还得求助于非线性模型才能说明。所以非线性随机振动的研究从 60 年代开始一直是一个经久不衰的热门课题。非线性系统与参激系统中随机振动问题的严格分析需要用到 Wiener 过程、Itô 随机积分、以及 Markov 扩散过程理论等更为深入的数学知识。这些数学工具以往常使工程科技人员望之生畏，其实，只要不被那些表面上看来令人眼花缭乱的数学符号与术语所迷惑，其实质还是不难理解的。本书在第七章讲述非线性系统的随机振动分析时，将深入浅出地介绍这一方面的基本内容，目的是为工程科技人员进入这一领域架桥引路。

本书的内容是这样安排的：

第一章简要阐明用均方理论研究随机振动问题所必需的概率与随机过程的基本知识。

第二章摘要引述在随机振动分析中必须具备的有关确定性振动的基本知识，特别是模态分析法。

第三章与第四章分别讲述时不变线性离散系统随机振动的频域分析法与时域分析法。

第五章讲述线性连续系统与杂交系统的随机响应分析。

第六章讲述线性系统的非平稳随机响应分析，包括双频谱法、演变谱法以及复模态分析法。

第七章讲述非线性系统的随机振动分析，包括 Markov 扩散过程理论、矩法、随机平均法、以及统计线性化法。

本书取材不求全、但求精而新，并且力图将随机振动的基本理论与方法讲得简单明了，具有理工科大学数学力学基础的读者，在阅读本书时一般不会遇到困难，即使对于那些通常认为难读的部分，也不难理解所讨论问题的精神实质。

第一章 随机振动的数学描述

与确定性振动不同，随机振动是一种集合现象。从集合中单个历程来看似乎是杂乱的，但从总体来看却存在一定的统计规律性。因而随机振动必须用概率论的方法来描述。本章简要地回顾有关随机变量与随机过程的基本概念及特征。

1.1 随 机 变 量

对随机事件赋值的结果产生了随机变量的概念。例如，南京长江大桥上每天通过的车辆数，首都国际机场每天到达与离开的乘客数，西安地区每天的最高与最低气温等等都属于随机变量。下面给出它的定义与概率描述。

1.1.1 定义

直观地说，随机变量 X 是这样一个实变量，对于每个确定的实数 x，X 取值于集合 $(-\infty,x]$ 的概率存在。因而 X 是一个随机地取值的实变量。用稍微数学一点的语言来说，定义于某样本空间 Ω 上的实变量 $X(\omega)$，$\omega\in\Omega$，如果对于每个实数 x，存在着 $\mathrm{Prob}\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$，那么就称 $X(\omega)$ 为**随机变量**。本书主要考虑 $X(\omega)$ 在整个实轴 $R^1=(-\infty,\infty)$ 上取值的情形。为了行文方便，通常 $X(\omega)$ 就记为 X。

以实随机变量 X 与 Y 作为实部与虚部，可定义一个复随机变量 $Z(\omega)$

$$Z(\omega)=X(\omega)+jY(\omega),\quad j=\sqrt{-1}$$

1.1.2 概率分布函数与概率密度函数

对一个随机变量作完整的概率描述是给出它的概率分布。随机变量 $X(\omega)$的**概率分布函数** $F(x)$定义为

$$F(x)=P(X\leqslant x)^{[1]} \quad -\infty<x<\infty \tag{1.1-1}$$

显然,$F(x)$是 x 的单调增函数,见图 1-1。且有

$$F(-\infty)=0$$

$$F(\infty)=1$$

注意到,连续型随机变量取任一特定值 x 的概率为零,即

$$P(X=x)=0$$

故随机变量在区间$[x_1,x_2]$内取值的概率为

$$P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)=P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

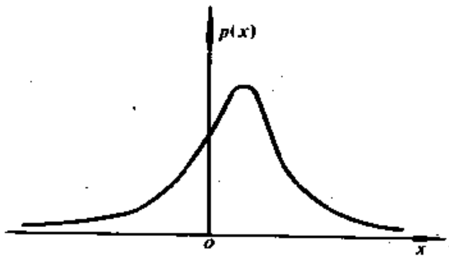

图 1-1 随机变量的概率分布函数

当 $F(x)$连续可导时,可定义如下**概率密度函数** $p(x)$

$$p(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{F(x+\mathrm{d}x)-F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1-2}$$

按定义,显然有

$$F(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}p(u)\mathrm{d}u=1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)\mathrm{d}u$$

---

[1] $P(X\leqslant x)$是 $\mathrm{Prob}\{\omega : X(\omega)\leqslant x\}$的简写

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(u)\mathrm{d}u$$

精确到二阶小量，有

$$F(x + \mathrm{d}x) - F(x) = P(x < X < x + \mathrm{d}x) \approx p(x)\mathrm{d}x$$

此外，概率密度函数有下列性质：

$$p(x) \geqslant 0$$

$$p(-\infty) = 0$$

$$p(\infty) = 0$$

与图 1-1 概率分布函数相对应的概率密度函数如图 1-2 所示。

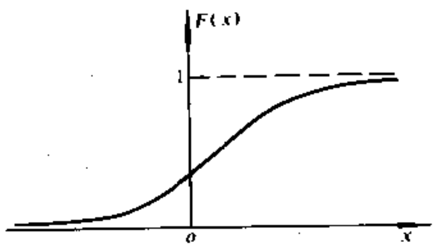

图 1-2　随机变量的概率密度函数

1.1.3　多维随机变量(随机矢量)

多维随机变量的特征可以用联合概率分布来描述。以二维实随机矢量 $\boldsymbol{X}=[X_1\ X_2]^T$ 为例，它的两个分量的取值偶(x_1,x_2)对应于平面直角坐标系中的一个点。$\boldsymbol{X}$ 的**二维联合概率分布函数**定义为

$$F(x_1,x_2) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2) \qquad (1.1\text{-}3)$$

二维联合概率分布函数有下列性质：

$$F(-\infty,x_2) = F(x_1,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$$

$$F(\infty,\infty) = 1$$

$$F(x_1,\infty) = F(x_1)$$

$$F(\infty,x_2) = F(x_2)$$

上列最后两式给出相应的一维概率分布函数。

当二维概率分布函数 $F(x_1,x_2)$ 具有二阶偏导数时，可导出 X 的联合概率密度函数。事实上，由

$$F(x_1,x_2)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}p(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$$

可得二维联合概率密度函数

$$p(x_1,x_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F(x_1,x_2) \tag{1.1-4}$$

$p(x_1,x_2)$ 具有下列性质：

$$p(x_1,x_2)\geqslant 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=1$$

并且 X_1 取值于 (a_1,b_1) 同时 X_2 取值于 (a_2,b_2) 的概率为

$$P(a_1<X_1<b_1,a_2<X_2<b_2)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}p(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

它等于图 1-3 中阴影面积下的体积。

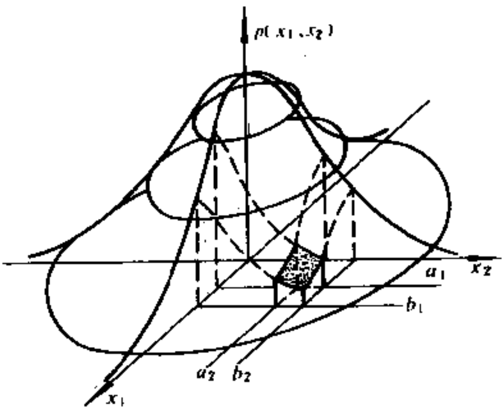

图 1-3　二维随机变量的联合概率密度函数

同时注意到

$$F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\{\int_{-\infty}^{\infty}p(u_1,u_2)\mathrm{d}u_2\}\mathrm{d}u_1=\int_{-\infty}^{x_1}p(u_1)\mathrm{d}u_1$$

$$\therefore\ p(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2$$

同理有

$$p(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1$$

因此，一维概率密度函数可以从二维联合概率密度函数导出。

现在来看**条件概率密度函数**，它定义为

$$p(x_1|x_2) = p(x_1, x_2)/p(x_2) \tag{1.1-5}$$

$$p(x_2|x_1) = p(x_1, x_2)/p(x_1) \tag{1.1-6}$$

或写为

$$p(x_1, x_2) = p(x_2|x_1)p(x_1) = p(x_1|x_2)p(x_2)$$

若 X_1 与 X_2 是**统计独立**的，则有

$$p(x_1|x_2) = p(x_1)$$

故有

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2) \tag{1.1-7}$$

以上关于二维随机变量的讨论不难推广到多于二维的情形。

1.1.4 随机变量的函数

先考虑两个随机变量的函数

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ Y_2 &= f_2(X_1, X_2) \end{aligned} \tag{1.1-8}$$

这时，Y_1 与 Y_2 的联合概率分布为

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2) &= P(Y_1 \leqslant y_1, Y_2 \leqslant y_2) \\ &= \iint_{\substack{f_1 \leqslant y_1 \\ f_2 \leqslant y_2}} p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned} \tag{1.1-9}$$

上式是在积分号下的二个不等式都满足的区域上进行积分的。现设变换(1.1-8)是一一对应的，因而存在逆变换

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 &= g_2(Y_1, Y_2) \end{aligned} \tag{1.1-10}$$

这时，式(1.1-9)中的二重积分可改写为

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} p(g_1, g_2)\,|J_2|\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{1.1-11}$$

式中　$|J_2|$——变换(1.1-10)的 Jacobi 行列式。

$$|J_2| = \det\left[\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right] = \det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}$$

Y_1 与 Y_2 的联合概率密度函数可得为

$$p(y_1,y_2) = \frac{\partial^2 F(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = p(g_1,g_2)|J_2| \qquad (1.1\text{-}12)$$

上述结果可直接推广到 n 个随机变量的函数。将 n 维一一对应的变换写成矢量形式

$$\boldsymbol{Y} = f\boldsymbol{X} \qquad (1.1\text{-}13)$$

其逆变换表示为

$$\boldsymbol{X} = f^{-1}\boldsymbol{Y} \qquad (1.1\text{-}14)$$

这时,$\boldsymbol{Y}$ 的联合概率密度函数可表示为

$$p(\boldsymbol{y}) = p(f^{-1}\boldsymbol{y})|J_n| \qquad (1.1\text{-}15)$$

式中　$|J_n|$——变换式(1.1-14)的 Jacobi 行列式。

$$|J_n| = \det\left[\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right] \qquad (1.1\text{-}16)$$

特别当这一变换为线性变换时,有

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \qquad (1.1\text{-}17)$$

式中　$\boldsymbol{A}$——满秩矩阵。这时,逆变换为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y} \qquad (1.1\text{-}18)$$

这一变换的 Jacobi 行列式为 $|\boldsymbol{A}^{-1}|$,从而 $\boldsymbol{Y}$ 的联合概率密度函数可表示为

$$p(\boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})|\boldsymbol{A}^{-1}| \qquad (1.1\text{-}19)$$

1.1.5　数字特征——矩

虽然随机变量的统计特性可以用概率分布函数或概率密度函数作完整描述,但要确定这些函数一般不太容易,也并非总有必要。实际问题中往往只需要知道随机变量的某些主要统计特征,它们可以用“矩”来描述。矩也称为数字特征。它们既可以直接从集合平均得到,也可以从概率密度函数导出。

实随机变量 X 的 n 阶矩定义为 X^n 的集合平均，通过概率密度函数可表示为

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) \mathrm{d}x \qquad (1.1\text{-}20)$$

实际上最常用到的是一阶矩与二阶矩。

一阶矩

随机变量 X 的一阶矩

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) \mathrm{d}x$$

给出 X 的均值，也称数学期望，常记为 μ_x。它具有下列性质：

(1) 设 c 为确定性常数，有

$$E[cX] = cE[X]$$

(2) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是任意 n 个随机变量，有

$$E\left[\sum X_i\right] = \sum E[X_i]$$

(3) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 n 个独立的随机变量，有

$$E\left[\prod X_i\right] = \prod E[X_i]$$

二阶矩

随机变量 X 的二阶矩

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \mathrm{d}x$$

给出 X 的均方值(ms 值)，常记为 ψ_x^2。均方值的平方根称为均方根值(rms 值)。ms 值或 rms 值通常用来表示随机变量的能量水平。

中心矩

以上讨论的矩都是**原点矩**，即相对于坐标原点的矩。另一种常用的矩是中心矩，即相对于均值的矩。**n 阶中心矩**可定义为

$$E[(X - \mu_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n p(x) \mathrm{d}x \qquad (1.1\text{-}21)$$

一阶中心矩恒等于零。二阶中心矩为

$$D(X) = E[(X - \mu_x)^2]$$

它也称为 X 的**方差**，常记为 σ_x^2，其平方根 σ_x 称为**标准差**。方差与均