数理统计在道路工程中的应用

饶 鸿 雁 编著

人 民 交 通 出 版 社

数 理 统 计
在道路工程中的应用

饶鸿雁 编著

人 民 交 通 出 版 社

数理统计在道路工程中的应用

饶鸿雁 编著
人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
北京市通县曙光印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：6.875 字数：154千
1983年5月 第1版
1983年5月 第1版 第1次印刷
印数：0001—4,800册 定价：1.05元

内容提要

本书简要地介绍了常用数理统计的基本概念并较系统地介绍了应用方法。全书用众多的道路工程实例来阐明数理统计的具体应用方法，理论联系实际较紧密，是一本较实用的科技书籍。本书内容包括：实验数据精度指标；实验数据运算和处理步骤；回归分析的应用；u检验、t检验、判别分析和各方面的综合应用。

附录中还列有概率积分表、相关系数r检验表、皮尔逊III型分布、高斯误差函数表等。

本书可供公路、城市道路、林业道路、厂矿道路工程技术人员，科研工作者，有关院校师生参考。

序　　言

在道路工程实践中，总要对勘测、设计、施工和科研所获得的一系列数据进行资料整理分析，去粗取精，从而寻找内部规律，为生产上提供有用的成果，以确保道路工程的质量。在资料整理分析的过程中，无疑要碰到许多数理统计问题，比如精度表示方法、数据运算和处理、误差分析和计算、统计检验、判别分析以及数学加工等等。可见，数理统计与道路工程的关系是多么密切。但是，迄今尚未见到一本较全面的反映数理统计在道路工程中综合应用这方面的书籍，包括上面列举的内容。作者试图根据自己对数理统计的肤浅认识和体会来实现这个目的。基于这个目的，编写本书时，不是像专门数理统计书籍那样，系统地介绍数理统计方法，而是侧重在应用，只谈基本概念和基本知识，一般不作公式推导，用道路工程在勘测、设计、施工或科研中的实例，并结合一些科研新成果，较全面地说明如何掌握常用数理统计方法。

书中内容安排是基于如下想法：第一章偏重于精度表示方法，第二章谈数据处理步骤，为以后各章的应用提供依据；为照顾到系统性、内容多寡和重要性，把回归分析、t检验和判别分析各自列为一章；鉴于多元回归、逐步回归和正交多项式是道路工程中经常要用到的数学加工方法，故回归分析中增加了这几个内容；t检验在道路工程中应用颇广，分量也够，可以单独列为一章；判别分析属于应用数学，对

生产上很实用，在地质、勘察等实际工作中被广泛应用，而在道路界尚不太熟悉它；至于分量不如前三者那么重的其它内容，一并归入综合应用一章。

杨世基同志为多元回归、逐步回归和判别分析提供了宝贵的试验数据，谨表谢意。例题中引用的有关科研成果，系由交通系统科研设计部门和部分高等院校共同协作取得的，特此说明。从参考资料〔1〕引用的方法较其它参考资料多一些，特在此作总的说明，不在书中一一注明。由于作者水平所限，难免有错误之处，切盼读者批评指正。

饶 鸿 雁

1982年8月

目　　录

第一章　实验数据精度指标

通过直接或间接测量所获得的多个观测数据，最常遇到的是需要解决以下三个方面的问题：

1.根据一组观测数据求算某些量在一定统计意义下的估计值；

2.衡量上述估计值的精度；

3.衡量观测值的精度。

在讨论上面几个问题之前，先对数理统计中本书要用到的一些基本概念作简要说明，又鉴于本章及以后各章均要用到正态分布，因此也在这里用另一节加以介绍。

§1　基 本 概 念

一、通用统计术语

这里解释几个通用术语，其它统计术语在有关章节里解释。

1.随机试验

如果在同一组（包括操作程序）下进行试验时，不一定得到同一的试验结果，不过每一个可能的试验结果都有一定的出现机会，或者说有一定的可能程度，则我们说，这个试验是一个随机试验。例如，钱币出现正面或反面的抛掷试验即属于随机试验。

2.总体和个体

我们所研究的对象的全体叫做统计总体，简称总体，其中的一个单位叫做个体。当研究的对象改变时，总体和个体也随之改变。

3.样本

总体的一部分叫做样本。样本中所含个体的数目，叫做样本的大小或容量。统计方法就是解决如何从样本来研究总体的问题。

4.随机误差

在一定观测条件下进行一系列观测时，如果观测的误差从表面上可看出其数值和符号都是不定的，不存在任何确定的规律性，它具有统计性的规律，这种误差就称为随机误差。

5.偶然误差和系统误差

在一定的观测条件下进行一系列观测时，如果观测的误差是随机误差，且误差的平均值随观测次数的增加而趋于零，则称这种误差为偶然误差，即均值为零的随机误差称为偶然误差。

在一定的观测条件下进行一系列观测时，如果观测误差的数值和符号或者总保持为常数，或者按照一定的规律变化，譬如它是某些参数（如温度或时间等）的函数，这种带有系统性和方向性的误差称为系统误差。

6.精确度和准确度

精确度指测量中所测数值重复性的大小；准确度指所测数值与真值符合的程度。在一组测量中，尽管精确度很高，但准确度不一定很好；若准确度好，则精确度一定高。以打靶为例，如各射击者都射中靶眼附近，表示精确度和准确度都很好；如果只射中一边，表示精确度很好，但准确度不

高；如射击各点很分散，表示准确度和精确度都不好。在科学测量中，没有靶眼，只有设想的真值。平时进行测量，就是想测得真值。

在测量实践中，一组观测结果可以很精密，但可能极不准确（这时系统误差成分较大）。只有当观测结果中，仅包含偶然误差而不包含系统误差时，精密性和准确性两者才是统一的，这时，我们用观测结果的精度来概括精密性和准确性这两者。

二、事件的概率

关于概率论的基本知识，详见参考资料〔1〕〔2〕〔3〕〔4〕〔5〕，这里只介绍其概念。

1.概率的定义

如果在所进行的单个试验中，某一事件可以发生，也可以不发生，则称这种事件为随机事件。从另一种意义上讲，在相同条件下，对同一实验的n次观测中，可能出现的各种结果也称为随机事件(简称事件)，记作 A，B……，等。若事件 A 出现的次数是 f，f 与总试验次数 n 之比 $\frac{f}{n}$，称为在 n 次试验中事件 A 出现的相对频率，简称频率。经验证明，当试验次数很大时，随机事件重复的频率是稳定的，所稳定的常数，叫做理论频率。这个理论频率，就叫做事件 A 出现的概率，并记为 $P(A)$。

随机事件客观上可能的程度，就是其概率。概率和频率一样是无度位的量，因此，就使我们有可能去比较各种性质的随机事件的出现。

2.概率的属性和概率计算中的一些基本规则

事件 A 的概率是非负数：

$$P(A)\geqslant 0 \tag{1.1}$$

试验中不会发生的事件叫做不可能事件，其概率等于0。

事件 A 的概率不大于1：

$$P(A)\leqslant 1 \tag{1.2}$$

试验中一定发生的事件叫做必然事件，其概率等于1。

以 $\bar{A}$ 代表 A 不出现的事件，读如“非 A”，称 $\bar{A}$ 为 A 的逆事件，或叫做 A 的对立事件。对于 A 和 $\bar{A}$，恒有

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \tag{1.3}$$

而且仅当 A 不发生时，$\bar{A}$ 才发生。

在一次随机事件中，若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称 A 与 B 为互斥事件或不相容事件。二不相容事件之一出现的概率等于二者概率之和：

$$P(A\text{ 或 }B)=P(A)+P(B) \tag{1.4}$$

这就是概率的加法定理。

概率为非负数、必然事件的概率等于1和复合事件(A 或 B)的概率以概率相加规则联系于各单独（不相容的）事件 A、B 的概率，称为随机事件概率的基本属性。

在事件 A 出现的条件下，事件 B 出现的概率叫做 B 在给定 A 下的条件概率，记为 $P(B|A)$。

两事件 A 与 B 同时出现（即事件 A 兼 B）的概率等于事件 A 的概率乘以事件 B 在给定 A 下的条件概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1.5}$$

若事件 A 的出现并不影响事件 B 的出现，即$P(B|A)=P(B)$，则事件 A 与 B 是互相独立的。这时

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.6}$$

这就是概率的乘法定理。

三、随机变量及其分布

1.随机变量

表示随机试验结果的一个数量叫做随机变量。随机变量取什么值，是不能在试验前预知的，它决定于试验的结果。例如，在某一小时内，电话总机所接到的呼唤次数是一个随机变量。当我们测量金属棒的长度时，由于种种因素而产生随机误差。随机误差这个量，我们无法事先预知它该取什么数值，但我们知道，它可以按一定的概率取值于某个区间。

随机变量可分为两类，即离散型随机变量和连续型随机变量。离散型随机变量所可能取到的值是离散的，如一段时间内机器发生故障的次数，洪水持续的日数等。连续型随机变量所可能取到的值是一个区间(a, b)，如径流量、雨量、零件尺寸等。

由此可见，要确定一个随机变量，只需要知道它可能取哪些值，以及取这些值的概率。

常用大写字母X，Y，…，表示随机变量，而用小写字母x，y，…，表示可能取的值。

2.分布函数

随机变量取什么值是有一定的概率规律的，这个概率规律具有可观测或可试验的频率意义。例如，868个土样按双曲线法（公式来源见第三章§2例2）与按搓条法求得的塑限值之差如表1.1所示。

设X为随机变量，事件$X<x$的概率自然是变量x的函数，这个函数就定义为随机变量X的分布函数，记为$F(x)$，即

$$F(x)=P(X<x) \tag{1.7}$$

显然有

土按两种方法的塑限差值　　表1.1

组限 上限　下限	频数 f'	频率 $p_i^* = \frac{f'_i}{n}$
$-4 \sim -3$	12	0.014
$-3 \sim -2$	45	0.052
$-2 \sim -1$	120	0.138
$-1 \sim 0$	224	0.258
$0 \sim 1$	234	0.270
$1 \sim 2$	154	0.177
$2 \sim 3$	63	0.073
$3 \sim 4$	16	0.018
总　数	$n = 868$	1.000

$$F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$$

下面分别讨论离散型随机变量和连续型随机变量的分布情况。

（1）离散型分布

若 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$ 是离散型随机变量 X 所取的值，且对应于这些值有确定的概率 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$，即

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots n \qquad (1.8)$$

则称随机变量 X 是离散型分布的。概率 p_i 应满足下列条件：

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad (1.9)$$

离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 具有下列形式：

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \qquad (1.10)$$

离散型分布的一般图形如图1.1所示。

（2）连续型分布

设 X 为连续型随机变量，取值于区间 $(a,\ b)$，这时，随机

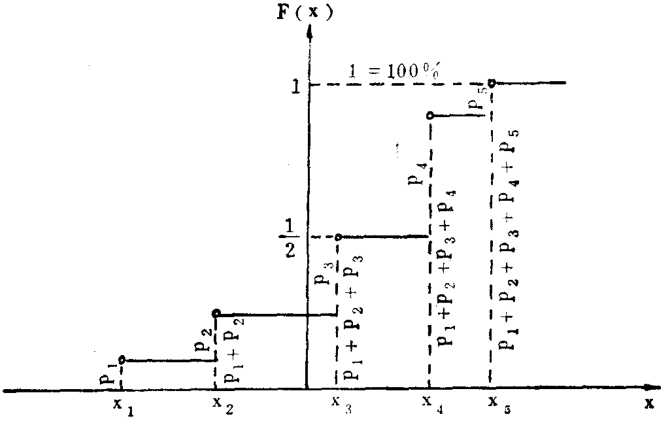

图1.1　离散型分布函数

变量 X 的分布函数 $F(x)$对于任意两实数 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，有

$$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X<x_2)>0 \tag{1.11}$$

所以，$F(x)$是单调增函数。

在实际工作中，下面的假定条件常被满足；

$F(x)$在$-\infty<x<\infty$间连续；

$F(x)$在$-\infty<x<\infty$间可微分，且导数 $F'(x)$在此区间连续。

连续型随机变量的分布密度被定义为

$$f(x)=F'(x) \tag{1.12}$$

这样，函数$F(x)$可以写成

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{1.13}$$

微分式子$f(x)dx$叫做 X 的概率元素。

分布密度具有下列性质：

$f(x)>0$；

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$；

$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1)$。

在水文学中，常把概率函数

$$P(X>x)=1-F(x) \qquad (1.14)$$

的图形叫做保证率曲线。因此，我们不妨把函数

$$F^*(x)=P(X>x)=1-F(x) \qquad (1.15)$$

叫做保证率函数。所谓保证率，是指随机变量大于某个数值的概率。

例 1 设

$$g(x)=\frac{K}{1+x^2}$$

而 K 为常数，若 $g(x)$为概率密度，K 应为何值？

由于

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K}{1+x^2}dx=K\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=K\pi$$

故得：

$$K=\frac{1}{\pi}$$

$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$叫做柯西（*Cauchy*）分布，如图 1.2 所示。它的比较一般的形式是

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-a)^2}$$

a 为参数[2]。

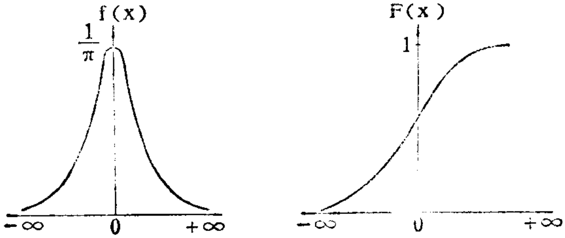

图1.2　柯西分布

四、随机变量的数学期望、方差、协方差和矩

在实际应用中，有时要确定分布函数是很困难的；而且在许多问题中，只需要知道随机变量的某些特征量就够了。随机变量的常用特征量有数学期望、方差和协方差。

1.数学期望

数学期望是研究随机变量或其概率分布性质的最重要概念之一。现分别说明两种分布类型的数学期望。采用(1.8)式中的相同符号，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称其和为离散型随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，或简记 m_x，即

$$m_x = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (1.16)$$

概率 p_i 实际上表示随机变量 X 取值 x_i 的可能程度。因此，一个随机变量的数学期望就是这个随机变量所取值的平均值。由于随机变量取什么值不是在试验前就知道的，故数学期望的概念绝不能同一个普通平均数的概念混为一谈，否