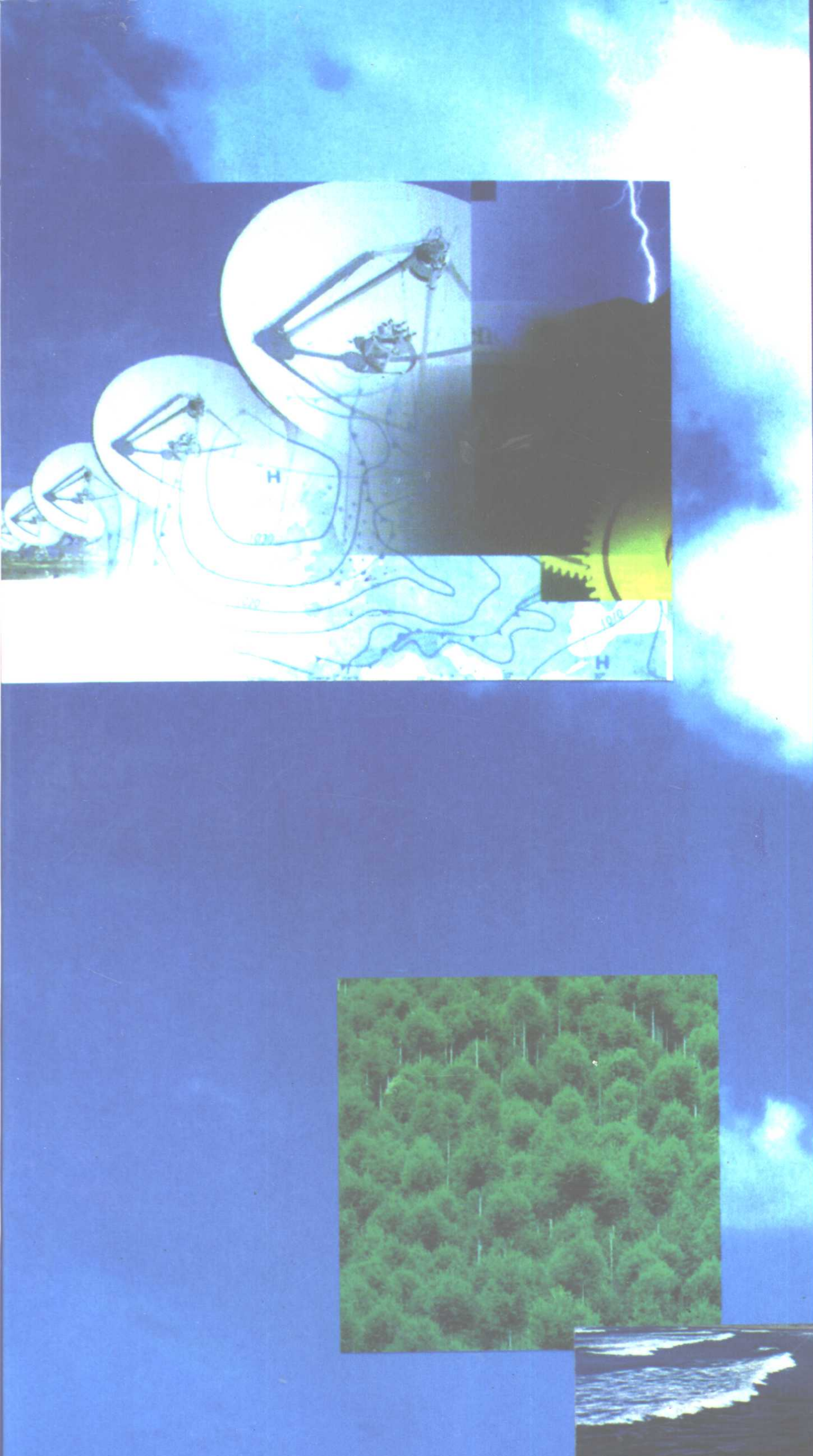

气候模式的基本原理和技术方法

董敏 等编著

气象出版社

气候模式的基本原理和技术方法

董　敏　耿全震　梁益国
罗　勇　叶正青　王　标　　等　编著

气象出版社

内容简介

本书较系统地介绍了当前气候模式的动力学框架和模式中使用的主要计算方法，包括气候模式中最常用的混合坐标系中的大气方程组，求解大气方程组的谱方法和半拉格朗日方法。介绍了气候模式中各种物理过程的表示方法，如辐射过程、陆面过程、边界层过程及对流和降水过程等。书中详尽地介绍了各种动力过程和物理过程的有关公式和推导过程。内容深入浅出，易于理解和应用。本书适合气象、气候、环境等专业的大学高年级学生及研究生阅读，也可供从事天气、气候预测的专业人员及从事大气科学、水文学、海洋学等专业的研究人员和业务工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

气候模式的基本原理和技术方法/董敏 等 编著. —北京：气象出版社，1997.4

ISBN 7—5029—2267—9

Ⅰ.气… Ⅱ.董… Ⅲ.气候-模式-研究 Ⅳ.P46

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 00080 号

气候模式的基本原理和技术方法

董 敏 等编著

责任编辑：李太宇 终审：周诗健

封面设计：徐雁生 责任技编：胡志敏 等 责任校对：王祥国

* * *

气象出版社 出版

（北京海淀区白石桥路 46 号 邮政编码 100081）

北京市怀柔新华印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

* * *

开本：787×1092 1/16 印张：11.625 字数：300 千字

1997 年 8 月第一版 1997 年 8 月第一次印刷

印数：1～1500 定价：18.00 元

ISBN 7-5029-2267-9/P・0837

序　　言

国家气候中心在成立之初，对于气候模式的发展和研制就十分重视，当时就确定了六条原则：

1. 以研制为业务预报应用的气候模式系统为主要目的；

2. 以预报我国汛期降水，提高旱涝的预报准确率为主要对象，尤其是考虑季风区气候的基本特征；

3. 国家气候中心集中一切人力、财力和物力搞一套模式，并逐步形成序列化模式系统；

4. 模式的发展要兼顾和适应我局计算机条件的发展和改进，以得到计算机能力的最大支持；

5. 模式动力框架的选取要考虑与中期数值预报模式相一致，便于利用已有的前处理与后处理条件；

6. 加强在模式的物理过程参数化方面的研究，结合中国地区预报的需求，在引进、消化和改进其它模式先进方案的基础上，发展新的物理参数化与计算方案，使国家气候中心的模式不但具有自己明显的特色，并且从科学上逐步达到国际先进水平。

国家气候中心的模式研究人员，正是按这些原则开展气候模式研究工作的。随着工作的进展，特别是国家“九五”重中之重科技项目的实施，给国家气候中心气候模式的研制提供了良好的条件和保障。但是国家气候中心的模式研究人员是一支年轻的科技队伍，与中国科学院、高校和其它兄弟单位相比，知识和经验均感不足，他们抱着虚心学习的态度阅读了大量国内外文献，并结合自己的工作消化、理解和吸收。这本书就是他们结合工作，学习各种基础性和先进气候模式知识的结果。虽为集体所写，但从整体上是有机相互关联的。该书可以作为广大气象工作者学习气候模式的一本入门书，也可为将来使用气候模式产品作好技术上的准备。

丁一汇

于国家气候中心

1997 年 3 月

前　言

气候变化与人类社会发展、国民经济建设及人民的日常生活密切相关。气候模式是研究气候变化、各种气候变率、了解各种气候灾害(如干旱、洪涝等)成因的重要工具,也是进行气候预测的极具发展潜力的工具。目前世界上各主要国家的气象研究和业务部门都在努力发展气候模式,用它来对气候自然变化及人类活动引起的气候变化进行研究,并进行短期气候变化(月、季时间尺度的变化)的预报。例如,欧洲中期数值预报中心(ECMWF),美国国家环境预报中心(NCEP),美国国家大气研究中心(NCAR),美国普林斯顿大学地球物理流体动力学实验室(GFDL),德国马克斯-普朗克研究所(MPI),英国气象局等业务和研究机构都有了自己的气候模式。我国也正在发展各种类型的气候模式,例如中国科学院大气物理所发展的二层格点模式和九层谱模式等。

正是由于气候模式和短期气候预测的重要性,“九五”期间,国家科委将“我国短期气候预测系统的研制”列为国家“重中之重”科技项目。国家气候中心气候研究开放实验室参加这一攻关项目的同志在广泛调研的基础上,综合国内外在气候模式、数值预报、动力气象等方面的多种著作和研究成果,再结合和溶入自己的研究工作,编写了本书。参加编著的同志和写作分工是:

第一至第三章　　耿全震;
第四章　　叶正青;
第五章　　董　敏;
第六章　　王　标　石广玉;
第七章　　罗　勇　梁益国;
第八章　　罗　勇　董　敏;
第九章　　田宇红　朱　彤;
第十章　　梁益国。

由于本书的编著人员大都为年轻的科技工作者,工作经验和知识尚显不足,书中难免有疏漏、错误和不足之处,敬请专家和广大读者批评指正。

本书的编写和出版主要得到了国家科委“九五”重中之重科技项目“我国短期气候预测系统的研制”的 02 课题中 02 和 07 专题的资助。

在本书的编写过程中,国家气候中心主任丁一汇教授一直给予了作者大力支持和鼓励。胡志敏、韩燕革、陈颖等同志协助进行了全部校稿的打印,在此一并表示感谢。

董　敏

1997 年 2 月 10 日

目　　录

序言

前言

第一章　大气运动的基本方程组 ……（1）

1.1　球面 z 坐标系下的大气运动方程组 ……（1）

1.2　垂直坐标变换 ……（4）

1.3　混合坐标系下的基本方程组 ……（5）

1.4　通量形式的方程组 ……（10）

1.5　其它一些重要的方程组变形 ……（12）

1.6　扣除参考大气的模式方程组 ……（15）

第二章　时间积分方案 ……（21）

2.1　CFL 稳定性判据及时间滤波与平滑 ……（21）

2.2　半隐式差分格式 ……（24）

2.3　模式的时间积分方案 ……（26）

2.4　时间分离方法 ……（29）

第三章　垂直差分方案 ……（32）

3.1　大气运动的整体性质 ……（32）

3.2　垂直输送项的差分算子 ……（33）

3.3　非输送项垂直差分的约束关系 ……（36）

3.4　有限差分方程 ……（38）

第四章　谱方法在大气模式求解中的应用 ……（42）

4.1　谱方法基本概念 ……（42）

4.2　勒让德变换 ……（47）

4.3　快速傅里叶变换 ……（49）

4.4　高斯积分 ……（53）

4.5　大气模式方程的谱截断形式 ……（56）

第五章　半拉格朗日方法 ……（66）

5.1　半拉格朗日方法的基本原理 ……（66）

5.2　插值方法 ……（70）

5.3　无插值的半拉格朗日方法 ……（75）

5.4　半拉格朗日方法的主要优、缺点及发展前景 ……（81）

第六章　辐射传输过程 ……（85）

6.1　大气辐射问题的数学表述 ……（85）

6.2　大气辐射方程的参数化解——简化方程 ……（86）

6.3　大气辐射性质参数化 ……（89）

6.4　辐射边界条件的参数化 ……（95）

第七章　气候模式中的陆面进程 ……（97）

7.1　地表面的能量交换 ……（97）

7.2　土壤(海冰)中热量的传输………………………………………………………………（104）
7.3　生物圈——大气传输过程………………………………………………………………（110）
第八章　垂直扩散及重力波拖曳作用的参数化……………………………………………（124）
8.1　垂直扩散和大气边界层过程的参数化…………………………………………………（124）
8.2　重力波拖曳作用的参数化………………………………………………………………（132）
第九章　积云对流参数化方案…………………………………………………………（139）
9.1　对流参数化的基本方法…………………………………………………………………（140）
9.2　CCM2 中 Hack 方案 ……………………………………………………………………（142）
9.3　UKMO/Unified 模式中的 Gregory 方案………………………………………………（150）
9.4　东亚季风区积云参数化的问题…………………………………………………………（153）
9.5　小结…………………………………………………………………………………………（158）
第十章　气候模式的初始资料和后处理…………………………………………………（160）
10.1　初始资料 …………………………………………………………………………………（160）
10.2　边界条件 …………………………………………………………………………………（168）
10.3　模式输出结果的处理 ……………………………………………………………………（168）
10.4　气候模式输出的检验方法 ………………………………………………………………（175）

第一章 大气运动的基本方程组

大气运动遵循三个最基本的物理定律，即动量守恒定律（牛顿第二定律）、质量守恒定律和能量守恒定律（热力学第一定律）以及描述平衡的均匀系统热力学状态参量之间关系的状态方程。

描述这些物理定律的大气运动学和热力学方程称为大气运动的基本方程组。大气环流模式的目的就是在给定的初始和边界条件下求解这一方程组，在实际的模式设计和求解过程中，为了提高计算精度、使边界条件等的处理尽可能方便，以及在模式所采用的时空差分格式下使方程组求解更方便、简洁且高效等模式整体上的考虑，一般需要把大气运动方程组做一些处理，包括(1)将方程组做一些简化和理想化的假定；(2)将方程组写在不同的垂直坐标系下；(3)将方程组做某些形式上的变形。本章介绍如何通过简化、坐标变换及方程变形把大气运动方程组的一般形式变换成适于数值求解的大气环流模式方程组的形式。

1.1 球面 z 坐标系下的大气运动方程组

大气运动方程组在做了大气“薄层”近似（大气厚度远小于地球半径）、静力平衡近似（对大气的大尺度运动，大气的垂直加速度与 Coriolis 力的垂直方向的分量可以同时略去）以及理想气体近似（将大气看作理想气体）之后，可得在球面 z（高度）坐标系下干空气运动的控制方程组为（这一方程组的推导在大多数的动力气象学[1~2]、数值预报[3~4]及气候模拟[5]的书中都可找到，因而在此不再多述）：

运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f \times \vec{V} + \vec{F} \tag{1.1}$$

静力平衡方程

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.2}$$

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{1.3}$$

热流量方程

$$c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = Q \tag{1.4}$$

状态方程

$$p = \rho RT \tag{1.5}$$

其中(1.1)～(1.5)式中的符号定义为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}$；$\nabla = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{i} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{j}$；$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$：水平风速；$w$：垂直速度；$\rho$：空气密度；$p$：气压；$T$：温度；$f$：科氏参数；

g:重 力加速度;c_p:干空气定压比热①;R:干空气气体常数;$\vec{F}$:水平动量源和汇;Q:热量源和汇。

上述方程组包含了六个方程和六个未知数(u,v,w,ρ,p,T),如果给定 $\vec{F}$ 和 Q 以及一些常数的数值,则上述方程组是闭合的。

大气是由多种成分组成的,但由于水汽是大气能量的一个重要来源,且水汽含量随时间和空间有显著变化,因此,需要把水汽含量作为一个独立的状态参数即湿度参量加到大气运动的方程组中[2]。干空气有了水汽之后,其气压、密度、气体常数以及定压比热都要发生变化,因而,上述(1.1)~(1.5)式的方程组中与这些量和常数有关的项均需换成湿空气相应的量。下面就讨论如何将干空气的方程组变换为湿空气的方程组。

首先讨论湿空气的状态方程。已知干空气和水汽的状态方程分别为

$$p_d = \rho_d R_d T \tag{1.6}$$

$$e = \rho_v R_v T \tag{1.7}$$

其中 p_d 和 e 分别为干空气的气压和水汽压,ρ_d 和 ρ_v 分别为干空气密度和水汽密度,而 R_d 和 R_v 分别为干空气和水汽的比气体常数,T 为空气温度。(1.6)和(1.7)式相加可得湿空气的状态方程为

$$p = \rho R T \tag{1.8}$$

其中

$$p = p_d + e \tag{1.9}$$

$$\rho R = \rho_d R_d + \rho_v R_v \tag{1.10}$$

而 p 为湿空气的气压,ρ 和 R 分别为湿空气的密度和比气体常数。这样,湿空气的状态方程就和干空气的状态方程具有同样的形式了。

由(1.10)式,湿空气的比气体常数是与水汽在大气中的密度有关的,即与水汽的含量有关。由于水汽含量随时间和空间变化很大,所以湿空气的比气体常数 R 就不是一个常数,而是一个变量,但下面将谈到,R、ρ_d 和 ρ_v 都不是预报变量,这在方程的求解过程中就会造成不方便,下面就将湿空气的气体常数用干空气的比气体常数(是一个常数)与空气的比湿(在湿空气方程组里是一个预报变量)来表示。若考虑到湿空气的密度 $\rho = \rho_d + \rho_v$,比湿 $q = \rho_v/\rho$,则经过简单的运算,由(1.10)式就可以得到湿空气比气体常数的表达式

$$R = R_d[1 + (\frac{R_v}{R_d} - 1)q] \tag{1.11}$$

这样,湿空气和状态方程若用干空气气体常数来表示的话,则可表示为

$$p = \rho R_d[1 + (\frac{R_v}{R_d} - 1)q]T \tag{1.12}$$

若令

$$T_v = [1 + (\frac{R_v}{R_d} - 1)q]T \tag{1.13}$$

则(1.12)式变为

$$p = \rho R_d T_v \tag{1.14}$$

这样,在湿空气的状态方程中,原是由于水汽的存在而对气体常数的修正,现已转嫁为对

① 按 GB3102"定压比热"应改称"比定压热容"。

绝对温度的修正。因此，在湿空气的状态方程中仍用干空气的气体常数。订正后的温度 T_v 称为绝对虚温，绝对虚温可被理解为"干空气具有湿空气的气压 p，使此干空气的密度等于湿空气密度 ρ 时，所对应的绝对温度。"[2]

下面讨论湿空气的定压比热。设湿空气中包含 1 克的干空气和 w 克的水汽，又单位质量的湿空气在等压加热或冷却 δT 时从四周得到的热量为 δQ，并假定在此过程中没有相变发生，因

$$(1 + w)\delta Q = c_{pd}\delta T + wc_{pv}\,\delta T \tag{1.15}$$

若考虑到比湿 $q = w/(1 + w)$，湿空气的定压比热 $c_p = (\dfrac{\delta Q}{\delta T})_p$，则由(1.15)式得湿空气的定压比热为

$$c_p = [1 + (\frac{c_{pv}}{c_{pd}} - 1)q]c_{pd} \tag{1.16}$$

下面为了统一符号，将干空气的气体常数仍记为 R，定压比热记为 c_p，水汽的比气体常数和定压比热记为 R_v 和 c_{pv}，而将湿空气的定压比热记为 c_p^*，其它变量和常数都是对应湿空气的，则由干空气的方程组(1.1)～(1.5)得湿空气的方程组为

运动方程

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f \times \vec{V} + \vec{F} \tag{1.17}$$

静力平衡方程

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.18}$$

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{1.19}$$

热流量方程

$$c_p^*\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = Q \tag{1.20}$$

水汽方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q + w\frac{\partial q}{\partial z} = S \tag{1.21}$$

状态方程

$$p = \rho R T_v \tag{1.22}$$

其中

$$T_v = [1 + (\frac{R_v}{R} - 1)q]T \tag{1.23}$$

$$c_p^* = [1 + (\frac{c_{pv}}{C_p} - 1)q]c_p \tag{1.24}$$

上述方程组包含了七个方程与七个未知数 (u,v,w,ρ,T,p,q)，若假定源汇项 $\vec{F}$、Q 和 S 是已知的，则(1.17)～(1.24)式构成了一个闭合的方程组。为了求解上述闭合方程组，还必须知道方程组的初始条件和边界条件。初始条件就是大气在某一初始时刻 $t = t_0$ 时的状态，它可以写为

$t = t_0$ 时

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V}(\lambda,\varphi,z,t_0) \\ w = w(\lambda,\varphi,z,t_0) \\ p = p(\lambda,\varphi,z,t_0) \\ T = T(\lambda,\varphi,z,t_0) \\ q = q(\lambda,\varphi,z,t_0) \end{cases}$$

大气是存在于地球表面($z = z_s$,z_s 为地表起伏)和无穷高度($z = \infty$)之间的一层气体,因而大气的下边界就是地球表面,上边界是无穷高度。所以下边界条件即是

$$z = z_s(\lambda,\varphi) \text{ 时}, w = \frac{u_s}{a\cos\varphi}\frac{\partial z_s}{\partial\lambda} + \frac{v_s}{a}\frac{\partial z_s}{\partial\varphi}$$

曾庆存[6]认为,迄今为止国外上边界条件的提法比较混乱,有多种提法,何况大气并没有真正的上边界。他提出了数学上严谨、哲学和物理学上都合理的上边界条件。实际上,大气环流模式中所设计的模式大气上边界与实际自然界中大气的上边界并不一样,一般模式大气都取某一高度为上边界,在这种情况下,上边界条件则是

$$z = z_T \text{ 时}, w = 0$$

另外,大气环流模式模拟的是围绕着地球的整个大气圈的运动,因而没有侧边界条件。

1.2 垂直坐标变换

垂直高度 z 坐标虽然直观,但这种坐标对许多理论研究和大气环流模式的建立并不是最方便的。建立全球大气环流模式做垂直坐标变换的主要原因是,若采用普通的高度 z 坐标和气压 p 坐标,在考虑地形时会产生很大的计算上的困难,使下边界条件的处理变得非常复杂。首先,若采用 z 坐标或 p 坐标,大地形可能和几个模式层相交,因而需要在山脉附近的格点上处理水平边界条件;再者,因地面气压是随时间和空间变化的,或者说地表面(下边界)相对于坐标面的位置是不断变化的,因此模式积分过程中需要不断确定地形的位置。因而,人们就利用其它的垂直坐标来代替 z 坐标和 p 坐标。但这些垂直坐标均以静力平衡方程的成立为前提,最常用的垂直坐标有 σ 坐标及混合坐标(η 坐标)等,本节就介绍关于垂直坐标变换的一般知识[4]。

考虑一个一般化的垂直坐标 ζ,假定它是一个随 z 变化的单调单值函数,即

$$\zeta = \zeta(\lambda,\varphi,z,t) \tag{1.25}$$

另一方面,若将 ζ 看成垂直坐标,则 z 变为一个因变函数,即

$$z = z(\lambda,\varphi,\zeta,t) \tag{1.26}$$

任何一个变量(无论是标量还是矢量)A 都可用两种坐标来表示,即

$$A(\lambda,\varphi,z,t) = A(\lambda,\varphi,\zeta,t) \tag{1.27}$$

当 z 或 ζ 用另外一个的函数形式表达时,则这两个函数就变成了一样的

$$A(\lambda,\varphi,\zeta,t) = A(\lambda,\varphi,z(\lambda,\varphi,\zeta,t),t) \tag{1.28}$$

现在如果取对 s($s = \lambda,\varphi$ 或 t)的偏微商,结果为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_\zeta = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_\zeta \tag{1.29}$$

下标 ζ 和 z 表示特定的垂直坐标。同理,垂直偏微分则有如下关系

$$\frac{\partial A}{\partial\zeta} = \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\zeta} \quad \text{或} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z} \tag{1.30}$$

将(1.30)式代入(1.29)式有

$$(\frac{\partial A}{\partial s})_\zeta = (\frac{\partial A}{\partial s})_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial s})_\zeta \tag{1.31}$$

根据(1.31)式，对标量 A 或矢量 $\vec{B}$ 则有

$$\nabla_\zeta A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\nabla_\zeta z \tag{1.32}$$

$$\nabla_\zeta \cdot \vec{B} = \nabla_z \cdot \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\cdot \nabla_\zeta z \tag{1.33}$$

$$(\frac{\partial A}{\partial t})_\zeta = (\frac{\partial A}{\partial t})_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial t})_\zeta \tag{1.34}$$

在 ζ 坐标下的全微商为

$$(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t})_\zeta = (\frac{\partial A}{\partial t})_\zeta + \vec{V}\cdot \nabla_\zeta A + \dot{\zeta}\frac{\partial A}{\partial \zeta} \tag{1.35}$$

这里 $\vec{V}$ 为水平风速，而 $\dot{\zeta} = \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$ 为 ζ 坐标系中的垂直速度（A 为标量或矢量）。

下面推导 z 坐标与 ζ 坐标系中的全微商之间的关系，由(1.32)和(1.34)式得

$$\begin{aligned}(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t})_z &= (\frac{\partial A}{\partial t})_z + \vec{V}\cdot \nabla_z A + \dot{z}\frac{\partial A}{\partial z} \\ &= (\frac{\partial A}{\partial t})_\zeta - \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial t})_\zeta + \vec{V}\cdot(\nabla_\zeta A - \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\nabla_\zeta z) + \dot{z}\frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= (\frac{\partial A}{\partial t})_\zeta + \vec{V}\cdot \nabla_\zeta A + \dot{\zeta}\frac{\partial A}{\partial \zeta} + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}(\dot{z} - [(\frac{\partial z}{\partial t})_\zeta + \vec{V}\cdot \nabla_\zeta z + \dot{\zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}]) \\ &= (\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t})_\zeta\end{aligned}$$

其中用到了 $\dot{z} = (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})_\zeta = (\frac{\partial z}{\partial t})_\zeta + \vec{V}\cdot \nabla_\zeta z + \dot{\zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}$，所以有

$$(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t})_z = (\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t})_\zeta \tag{1.36}$$

根据(1.29)～(1.36)式，只要定义了 ζ 坐标，就会很容易将 z 坐标系下的方程组化为所需要的垂直坐标系下的方程组。

边界条件也需做相应的变换。上边界取某一坐标面 $\zeta = \zeta_T =$ 常数（通常称为模式顶），则有

$$\zeta = \zeta_T \text{ 时}, \dot{\zeta} = 0$$

而模式的下边界为 $\zeta = \zeta_s(\lambda, \varphi, t)$，则有下边界条件为

$$\zeta = \zeta_s \text{ 时}, \dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + \frac{u_s}{a\cos\varphi}\frac{\partial \zeta_s}{\partial \lambda} + \frac{v_s}{a}\frac{\partial \zeta_s}{\partial \varphi}$$

式中 ζ_s、u_s 和 v_s 表示在下边界上的值。

1.3 混合坐标系下的基本方程组

目前全球大气环流模式中常用的垂直坐标有两种，即 σ 坐标和 η 坐标（混合坐标）。σ 坐标的定义为

$$\sigma = \frac{p - p_t}{p_s - p_t} \tag{1.37}$$

其中 p 为气压，而 p_s 为地面气压，p_t 为模式顶层的气压。由上式可知，在 σ 坐标系中，上下边界

条件为

$$p = p_s \text{时} \qquad \sigma = 1, \dot{\sigma} = 0 \tag{1.38}$$

$$p = p_t \text{时} \qquad \sigma = 0, \dot{\sigma} = 0 \tag{1.39}$$

即在σ坐标系中，无论地形多么复杂，下边界始终为$\sigma=1$的坐标面，因而下边界条件变得非常简单，这是σ坐标的主要优点。因而，许多大气环流模式都曾经或还在使用σ坐标系。

采用σ坐标系虽然使下边界条件变得非常简单，但它并没有完全解决处理地形问题时所存在的困难，而是把垂直边界条件计算上的困难转化为其它困难。首先是气压梯度力的计算精度问题。σ坐标的气压梯度力为两项之和，即

$$-g\nabla_\sigma z - \frac{1}{\rho}\nabla_\sigma p \tag{1.40}$$

当地形坡度很大时，两项中的任一项都比它们的和大很多，这意味着两项中都包含着一个很大的、可以相互抵消的部分。从水平等压面的特殊情况很容易看出这一点[3]。图1.1为地形附近的垂直剖面图，细线为等压面，粗线为σ面。因等压面是水平的，所以水平气压梯度力(1.40)式为零。以纬圈方向为例，(1.40)式中两项的差分近似为

$$-\frac{g}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_\sigma = -\frac{g(z_2-z_0)}{a\cos\varphi\triangle\lambda} = -\frac{g(z_2-z_1)}{a\cos\varphi\triangle\lambda}$$

$$-\frac{1}{\rho a\cos\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right)_\sigma = -\frac{p_2-p_0}{\rho a\cos\varphi\triangle\lambda} = -\frac{p_2-p_1}{\rho a\cos\varphi\triangle\lambda}$$

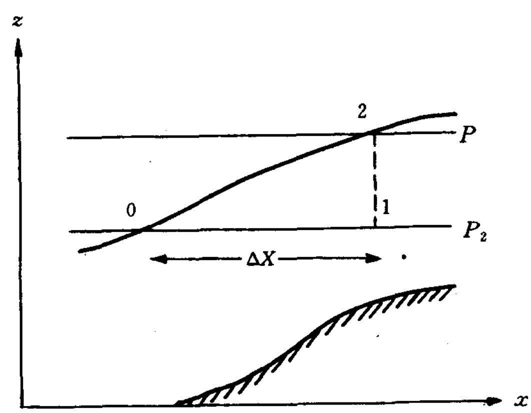

图1.1 地形附近的垂直剖面示意图[3]

$\triangle\lambda$为(0,1)间的经度差。两项都不为零，同时其绝对值随着地形坡度的增加而增加。第一项表示σ面的坡度，第二项是为了抵消σ面坡度大于等压面坡度部分而作的静力订正。对于水平等压面的情况，这两项恰好满足静力平衡关系而相互抵消。但在实际计算中，两项都有计算误差，其结果造成气压梯度力计算值的很大的相对误差。这些误差不仅来自两项的差分近似，也来自静力平衡方程的截断误差。直接计算这两项所产生的误差不仅在低层很明显，还会影响到整个模式大气。对这一问题，已经研究了各种方法克服这种困难，但目前较为常用的有两种方法，即(1)采用混合垂直坐标，这种混合坐标低层为σ坐标系，在某一等压面之上改为p坐标系，以减小高层的计算误差。(2)采用"静力扣除"法，即从两项中扣除静力平衡部分。本节将介绍混合坐标系，"静力扣除"法将在本章的第6节介绍。再者，水平扩散算子在用到地形坐标时，在山脉上空会产生虚假的扩散，即将水平扩散用到气压面上比用到地形坐标面上好，而混合坐标可以

减少高层的计算误差。另外，由于一般模式输出结果要在等压面上输出，这样必须将地形坐标面上的值插值到等压面上，混合坐标会减小高层的插值误差。同样，在准备模式的初始场时存在由等压面上的值向地形坐标面插值的问题。

混合坐标由 Simmons 和 Strufing[7]及 Simmons 和 Burridge[8]提出，目的是为在地表使坐标面与地表面相重合，而在地表以上某个高度变为气压坐标的垂直坐标提供一个一般的框架。混合坐标系集中了 σ 坐标和 p 坐标的某些优点，而在某种程度上避免了它们的缺点，因而近年来被广泛使用(欧洲中心中期数值预报模式[9]，NCAR CCM2[10]，日本气象厅全球大气环流谱模式等[11])。图 1.2 给出了混合坐标的垂直分层结构。如果地表气压设为 π，则混合坐标 η 定义如下：

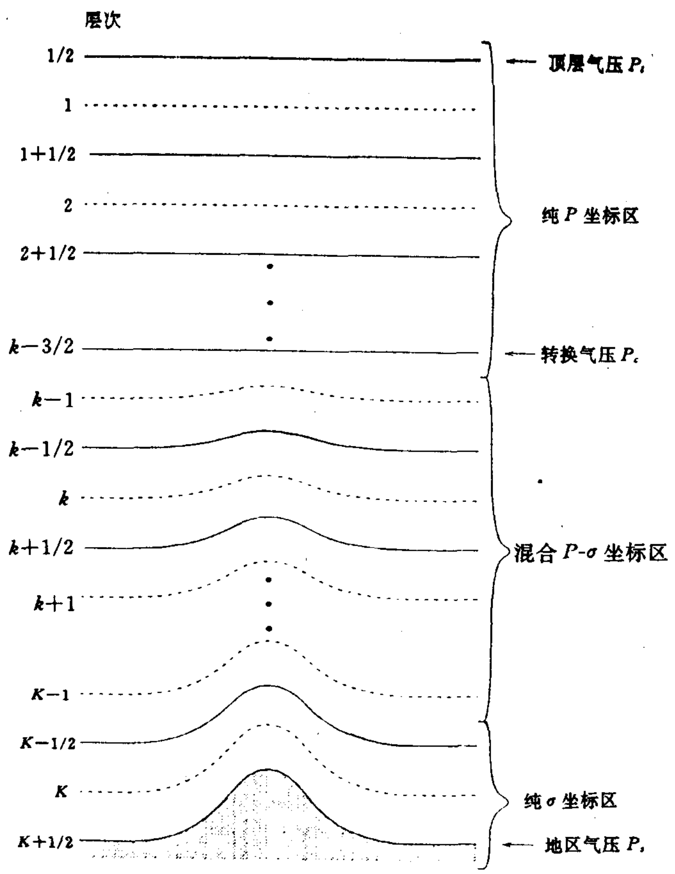

图 1.2　混合坐标系的垂直结构[10]

(1) $\eta = \eta(p,\pi)$，　　是 p 的单调函数；

(2) $\eta(\pi,\pi) = 1$；

(3) $\eta(0,\pi) = 0$；

(4) $\eta(p_t,\pi) = \eta_t$，　　p_t 为模式顶层的气压。

最后一个要求假定了模式的顶层为一气压面，简化了边界条件的描述。当 $p_t = 0$ 时，上述

最后两个要求完全一致且变成了与 Simmons 和 Strufing[7]描述的坐标完全一致的坐标。另外，使系统闭合所要求的边界条件为

$$\dot{\eta}(\pi,\pi) = 0 \tag{1.41}$$

$$\dot{\eta}(p_t,\pi) = \omega(p_t) = 0 \tag{1.42}$$

下面就利用上节关于垂直坐标变换的一些知识将 z 坐标系下的大气运动基本方程组(1.17)～(1.22)变换到混合坐标系下的方程组。

根据(1.32)式，再由静力平衡方程(1.18)和状态方程(1.22)式，则运动方程(1.17)式中的气压梯度力变为

$$\frac{1}{\rho}\nabla_z p = -\nabla_\eta \Phi - \frac{RT_v}{p}\nabla_\eta p$$

其中 $\Phi = gz$ 。再考虑到(1.36)式，则 η 坐标系下的运动方程为(将下标 η 去掉)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V} + \dot{\eta}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \eta} = -\nabla\Phi - \frac{RT_v}{p}\nabla p - f\vec{k}\times\vec{V} + \vec{F} \tag{1.43}$$

利用状态方程(1.22)式，则静力平衡方程(1.18)式可化为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT_v}{p} \tag{1.44}$$

下面讨论连续方程的变换，将(1.19)式除以 ρ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\rho + \nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.45}$$

由(1.33)式得

$$\nabla_z\cdot\vec{V} = \nabla_\eta\cdot\vec{V} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\nabla_\eta z\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial \eta}$$

又

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

且考虑到

$$w = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\eta + \vec{V}\cdot\nabla_\eta z + \dot{\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\Big|_\eta$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\eta + \vec{V}\cdot\nabla_\eta z + \dot{\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)_\eta\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)_\eta + \vec{V}\cdot\nabla_\eta\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \eta}\cdot\nabla_\eta z + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\Big|_\eta + \dot{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\Big|_\eta\end{aligned}$$

所以

$$\nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\eta\cdot\vec{V} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla_\eta + \dot{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$$

因 $\frac{\partial \eta}{\partial z} = 1/(\partial z/\partial \eta)$ ，则

$$\nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\eta\cdot\vec{V} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$$

代入式(1.45)式，考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(-\rho\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln(-\rho\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\eta})]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln(-\rho\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial z}}\frac{\partial p}{\partial\eta})]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln(-\rho\frac{1}{-\rho g}\frac{\partial p}{\partial\eta})]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\frac{\partial p}{\partial\eta})$$

则连续方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\frac{\partial p}{\partial\eta})+\nabla\cdot\vec{V}+\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial\eta}=0 \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial p}{\partial\eta})+\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})+\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta})=0 \tag{1.46}$$

利用状态方程(1.22)式，则热流量方程(1.20)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{RT_v}{c_p^* p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{c_p^*} \tag{1.47}$$

考虑到 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\omega$，则 η 坐标系中的热流量方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla T+\dot{\eta}\frac{\partial T}{\partial\eta}=\frac{R}{c_p^*}T_v\frac{\omega}{p}+\frac{Q}{c_p^*} \tag{1.48}$$

由(1.46)式还可以得到关于 $\dot{\eta}$ 和 ω 的诊断方程。(1.46)式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta})=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial p}{\partial\eta})-\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{\partial p}{\partial t})-\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})$$

对上式从 η_t 到 η 积分，则有

$$\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\Big|_{\eta}-\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\Big|_{\eta_t}=-\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{\eta}+\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{\eta_t}-\int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})\mathrm{d}\eta$$

考虑到 $\dot{\eta}\Big|_{\eta_t}=0,\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{\eta_t}=\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{p_t}\equiv 0$，则上式变为

$$\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}=-\frac{\partial p}{\partial t}-\int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})\mathrm{d}\eta \tag{1.49}$$

从(1.49)式出发又可推出 ω 的诊断式。(1.49)式可以改写为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}=-\int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})\mathrm{d}\eta$$

上式两边同时加上 $\vec{V}\cdot\nabla p$，则有

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla p+\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}=\vec{V}\cdot\nabla p-\int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})\mathrm{d}\eta$$

因 $\omega=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，所以上式变为

$$\omega=\vec{V}\cdot\nabla p-\int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V})\mathrm{d}\eta \tag{1.50}$$

又根据(1.36)式，则水汽方程(1.21)在 η 坐标系下就变为

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla q+\dot{\eta}\frac{\partial q}{\partial\eta}=S \tag{1.51}$$

到此，我们导出了 η 坐标系下大气运动的方程组(1.43)、(1.44)、(1.46)、(1.48)、(1.51)和(1.22)式以及两个诊断方程(1.49)和(1.50)。为了清楚起见，在此再将这些方程一起列出

运动方程

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}+\dot{\eta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\eta}=-\nabla\Phi-\frac{RT_v}{p}\nabla p-f\vec{k}\times\vec{V}+\vec{F} \tag{1.52}$$

静力平衡方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT_v}{p} \tag{1.53}$$

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{1.54}$$

热流量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla T + \dot{\eta}\frac{\partial T}{\partial\eta} = \frac{R}{c_p^*}T_v\frac{\omega}{p} + \frac{Q}{c_p^*} \tag{1.55}$$

水汽方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla q + \dot{\eta}\frac{\partial q}{\partial\eta} = S \tag{1.56}$$

状态方程

$$p = \rho RT_v \tag{1.57}$$

以及两个诊断方程

$$\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V}\right)\mathrm{d}\eta \tag{1.58}$$

$$\omega = \vec{V}\cdot\nabla p - \int_{\eta_t}^{\eta}\nabla\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\vec{V}\right)\mathrm{d}\eta \tag{1.59}$$

1.4 通量形式的方程组

第三节中η坐标系下的大气运动方程组(1.52)～(1.59)的形式不适于做快速有效的球谱变换，因而，为了用球谱方法对上述方程组求解，还需进一步将它们变换成所谓的通量形式的方程组。

首先将运动方程(1.52)式改写为涡度方程和散度方程的形式。考虑到$\vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = \nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}/2) + \zeta\vec{k}\times\vec{V}$，代入(1.52)式有

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}/2) + \zeta\vec{k}\times\vec{V} + \dot{\eta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\eta} = -\nabla\Phi - R\frac{T_v}{p}\nabla p - f\vec{k}\times\vec{V} + \vec{F}$$

上式等号左边第二项与等号右边第一项合并，等号左边第三项与右边第三项合并，则有

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\zeta + f)\vec{k}\times\vec{V} + \dot{\eta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\eta} = -\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}/2 + \Phi) - R\frac{T_v}{p}\nabla p + \vec{F} \tag{1.60}$$

对上式用算子$\vec{k}\cdot\nabla\times$作用，利用矢量关系

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

则

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\{\nabla\times[(\zeta+f)\vec{k}\times\vec{V}]\} &= \vec{k}\cdot\{(\zeta+f)\vec{k}\nabla\cdot\vec{V} - \vec{V}\nabla\cdot(\zeta+f)\vec{k} \\ &\quad - [(\zeta+f)\vec{k}\cdot\nabla]\vec{V} + (\vec{V}\cdot\nabla)(\zeta+f)\vec{k}\} \\ &= (\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V} + \vec{V}\cdot\nabla(\zeta+f) = \nabla\cdot(\zeta+f)\vec{V}\end{aligned}$$

中间两项因$\vec{k}\cdot\vec{V}_h = \vec{k}\cdot\nabla_h \equiv 0$而恒等于零，又由于$\vec{k}\cdot\nabla_h\times\nabla_h = 0$，这样就可以得到涡度方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla\cdot(\zeta+f)\vec{V} = -\vec{k}\cdot\nabla\times\left(R\frac{T_v}{p}\nabla p + \dot{\eta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\eta} - \vec{F}\right) \tag{1.61}$$