面向计算机科学的

数 理 逻 辑

陆钟万 著

北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍了与计算机科学密切相关的数理逻辑基础知识，包括命题逻辑，一阶逻辑，构造性逻辑和模态逻辑。

本书的选材同时考虑逻辑系统的特点和适应计算机科学的要求。非构造性的命题逻辑和一阶逻辑是本书的基础。本书还描述了非构造性逻辑和构造性逻辑之间，构造性逻辑和模态逻辑之间的密切联系。大部分章节配有习题。

读者对象：计算机专业和数学专业的大学本科生、研究生，有关专业的教师和科研人员，计算机科学理论爱好者、自学者。

面向计算机科学的数理逻辑

责任编辑：陈进龙

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂激光照排、印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　印张7.75　220千字
1989年11月第一版　1989年11月第一次印刷
印数：0001－3,000册
ISBN 7-301-00828-7/O・149
定价：3.30元

目　录

绪　论

数理逻辑研究推理,特别是研究数学中使用的推理。

推理中的前提和结论是命题。命题是真的或是假的。有些逻辑学家愿意用“语句”这个词而不用“命题”。他们的理由可能是,在自然语言中,语句被用作表达的单位,而命题是语句所肯定的。

某些结论称为能由某些前提推导出,如果前提的真蕴涵结论的真。因此,研究推理是研究怎样的前提和结论之间有可推导性关系。

我们先考虑几个例子。下面

1) $\begin{cases}\text{每个 3 的倍数的数字之和是 3 的倍数。(前提)}\\ 2^{100}\text{的数字之和不是 3 的倍数。(前提)}\\ 2^{100}\text{不是 3 的倍数。(结论)}\end{cases}$

中的前提和结论都是真命题。1)中的推理是正确的。这个推理的正确性好象与其中前提和结论的真有关系,然而情况并非如此。下面

2) $\begin{cases}\text{每个中学生打网球。(前提)}\\ \text{Z 不打网球。(前提)}\\ \text{Z 不是中学生。(结论)}\end{cases}$

中的推理也是正确的,并且它的正确性的依据同1)中推理的正确性的依据是相同的。但是2)中的前提和结论可以是真的或是假的。此外,2)中命题的内容与1)中命题的内容完全不同。

因此,推理的正确与否,与前提和结论的真或假没有关系,与它们的内容没有关系。可推导性只要求前提的真蕴涵结论的真。数理逻辑不研究前提和结论的真或假,而是研究前提的真是否蕴涵结论的真。

那么，可推导性关系是由什么决定的呢？

命题有内容（它决定命题的真或假）和逻辑形式（或简称形式）。决定前提和结论之间的可推导性关系的是它们的逻辑形式。

1）和2）中的前提和结论分别有以下的逻辑形式：

3） $\begin{cases} S \text{ 中的每个元有 } P \text{ 性质。（前提）} \\ \alpha \text{ 没有 } P \text{ 性质。（前提）} \\ \alpha \text{ 不是 } S \text{ 中的元。（结论）} \end{cases}$

显然，任何三个命题，如果它们分别具有3）中的逻辑形式，那么第三个命题能由前两个命题推导出（不论 S 是怎样的集，P 是怎样的性质，α 是怎样的元）。

数理逻辑涉及对前提和结论的分析，这时所注意的是它们的由内容和真假抽象出的逻辑形式。

当在自然语言中表达命题并且分析它们的逻辑形式时，有时会产生混淆。例如下面的

4） $\begin{cases} \text{X 认识 Y。（前提）} \\ \text{Y 是足球队长。（前提）} \\ \text{X 认识足球队长。（结论）} \end{cases}$

5） $\begin{cases} \text{X 认识 A 班中的某个学生。（前提）} \\ \text{A 班中的某个学生是足球队长。（前提）} \\ \text{X 认识足球队长。（结论）} \end{cases}$

两个推理中，相应的命题在语言上都是相似的。但是4）中的推理是正确的，而5）中的推理是不正确的。这说明，由自然语言中的语言上的相似并不能得到逻辑形式上的相同。

根据上述理由，我们需要构造一种符号语言来代替自然语言。这种人工构造的符号语言称为**形式语言**。在形式语言中使用符号构成公式。公式用来表示命题。命题的逻辑形式能够用公式而得到精确的表示。

象在自然语言中的情形一样，形式语言也有它的语义和语法。**语义**涉及符号表达式的涵义（当给符号以某种解释时）。**语法**涉及

符号表达式的形式结构,不考虑任何解释。形式语言的这两个方面必须互相区分。

讨论问题总是在某个语言中进行的。但是现在的情况是,所讨论的对象本身就是语言。因此要涉及两个不同层次的语言。被讨论的语言称为**对象语言**,它就是形式语言。用来讨论对象语言的语言称为**元语言**。这里所使用的元语言是中文。

数学中除数理逻辑外的各个分支都不以数学的语言或它的推理方法作为研究的对象。数理逻辑试图用数学的方法来研究这些方面(首先把数学的语言和使用的推理弄精确),这样它成为数学的一个新的分支。

数理逻辑面临两种推理。一种是它所研究的推理,这是用形式语言中的对象陈述的。另一种是它在研究中使用的推理,这是在元语言中进行的。

通常把近代数理逻辑的思想溯源到 Leibniz(1646—1716)。他力图建立一种精确的、普遍适用的科学语言,并且寻求一种推理演算,以便能够用计算来解决辩论和意见不一致的问题。这种精确的科学语言就是将在以后各章中构造的形式语言。这种推理演算就是后面要发展的形式可推演性系统。

1 预备知识

阅读本书时只要求熟悉集，归纳定义和归纳证明的基本概念。本章简要地陈述这些内容，熟悉这些内容的读者可以先不读而当需要时再作参考。

1.1 集

集(**合**)由若干对象汇集而成。称这些对象为集的**元**。我们用

$$a \in S$$

表示 a 是 S 的元，用

$$a \notin S$$

表示 a 不是 S 的元。

为了方便，我们用

$$a_1, \cdots, a_n \in S$$

表示 $a_1 \in S, \cdots, a_n \in S$；用

$$a_1, \cdots, a_n \notin S$$

表示 $a_1 \notin S, \cdots, a_n \notin S$。

集由它们所包含的元确定。称两个集 S 和 T 为**相等的**，记作

$$S = T$$

当且仅当它们有相同的元，就是说，对于每一 x，$x \in S$ 当且仅当 $x \in T$。

$S \neq T$ 表示 S 和 T 是不相等的，就是说，有 x 使得，$x \in S$ 当且仅当 $x \notin T$。

称 S 为 T 的**子集**，记作

$$S \subseteq T$$

当且仅当对于每一 x，$x \in S$ **蕴涵** $x \in T$。每个集是它自己的子集。S

$=T$ 当且仅当 $S\subseteq T$ 并且 $T\subseteq S$。

称 S 为 T 的**真子集**，当且仅当 $S\subseteq T$ 并且 $S\neq T$。

一个含有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为元的集记作

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}。$$

显然，我们有

$$\{\alpha\}=\{\alpha,\alpha\},$$

$$\{\alpha,\beta\}=\{\beta,\alpha\}=\{\alpha,\beta,\beta\}=\{\alpha,\beta,\beta,\alpha\},$$

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{\alpha,\gamma,\beta\}=\{\gamma,\beta,\alpha\}=\{\alpha,\beta,\alpha,\gamma\}。$$

因此，构成集的成份与集中元的次序和重复是没有关系的。

空集$\varnothing$是一个特殊的集，其中没有元。$\varnothing$是任何集 S 的子集。这个命题的真是不需要证明的，因为当证明$\varnothing\subseteq S$(即证明对于任何$\varnothing$中元 x，$x\in S$ 成立)时，什么事情也不需要做。或者换言之，$\varnothing\subseteq S$ 不成立当且仅当有 x 使得 $x\in\varnothing$并且 $x\notin S$，这是不可能的。

我们用

$$\{x|—x—\}$$

表示由所有使得—x—(它是一个讲到 x 的命题)成立的对象 x 构成的集。例如，令

$$S=\{x|x<100 \text{ 并且 } x \text{ 是素数}\},$$

$$T=\{x|x=0 \text{ 或 } x=1 \text{ 或 } x=2\},$$

那么 S 是所有小于 100 的素数构成的集，$T=\{0,1,2\}$。

集 $\{x|x\in S$ 并且 —x—$\}$ 可以记作

$$\{x\in S|—x—\}。$$

我们定义

$$\overline{S}=\{x|x\notin S\},$$

$$S\cup T=\{x|x\in S \text{ 或 } x\in T\},$$

$$S\cap T=\{x|x\in S \text{ 并且 } x\in T\},$$

$$S-T=\{x|x\in S \text{ 并且 } x\notin T\}。$$

称 $\overline{S}$ 为 S 的**补(集)**；分别称 $S\cup T$，$S\cap T$ 和 $S-T$ 为 S 和 T 的**并(集)**，**交(集)**和**差(集)**。

称 S 和 T 为**不相交的**，当且仅当 $S\cap T=\varnothing$。

更一般地，设 $S_1,\cdots,S_n$ 是集($n\geqslant 2$)，我们令

$$S_1\cup\cdots\cup S_n=\{x\mid \text{有 } i=1,\cdots,n \text{ 使得 } x\in S_i\},$$

$$S_1\cap\cdots\cap S_n=\{x\mid \text{对于每一 } i=1,\cdots,n,x\in S_i\}。$$

设 $\{S_i\mid i\in I\}$ 是集的集合，其中的集以 I 中的元为指标。于是我们令

$$\bigcup_{i\in I} S_i=\{x\mid \text{有 } i\in I \text{ 使得 } x\in S_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I} S_i=\{x\mid \text{对于每一 } i\in I,x\in S_i\}。$$

它们分别是 $\{S_i\mid i\in I\}$ 的**并**和**交**。

对象 α 和 β 的**有序偶**记作

$$\langle\alpha,\beta\rangle。$$

于是，$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ 当且仅当 $\alpha=\alpha_1$ 并且 $\beta=\beta_1$。

有序 n 元组

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle$$

与有限序列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 相同。于是，$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle$ 当且仅当 $n=m$ 并且对于 $i=1,\cdots,n,\alpha_i=\beta_i$。

有序 n 元组的集也记作

$$\{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\mid -x_1-,\cdots,-x_n-\}。$$

例如，

$$\{\langle m,n\rangle\mid m,n \text{ 是自然数并且 } m<n\}$$

是自然数的序偶的集，其中的序偶的第一个数小于第二个数。

集 $S_1,\cdots,S_n$ 的**笛卡儿乘积** $S_1\times\cdots\times S_n$ 的定义如下：

$$S_1\times\cdots\times S_n=\{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\mid x_1\in S_1,\cdots,x_n\in S_n\}。$$

当 $S_1,\cdots,S_n$ 都相同时，S 的 n 次笛卡尔乘积 S^n 是

$$S^n=\underbrace{S\times\cdots\times S}_{n}=\{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\mid x_1,\cdots,x_n\in S\}。$$

当 $n\geqslant 1$ 时，集 S 上的 n 元**关系** R 是下面的集 R：

$$R=\{\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\mid x_1,\cdots,x_n\in S \text{ 并且}$$

$x_1,\cdots,x_n$ 之间（依

这个次序）有 R 关系｝。

因此 $R \subseteq S^n$。S 上的一元关系 R 是一个性质：

$$R = \{x \in S \mid x \text{ 有 } R \text{ 性质}\},$$

R 是 S 的子集。相等关系是任何集 S 上的一个特殊的二元关系

$$\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in S \text{ 并且 } x = y\},$$

或者也就是

$$\{\langle x,x\rangle \mid x \in S\}。$$

函数（映射） f 是序偶的集，使得如果 $\langle x,y\rangle \in f$ 并且 $\langle x,z\rangle \in f$，则 $y = z$。f 的**定义域** $dom(f)$ 是集

$$dom(f) = \{x \mid \text{有 } y \text{ 使得} \langle x,y\rangle \in f\};$$

f 的**值域** $ran(f)$ 是集

$$ran(f) = \{y \mid \text{有 } x \text{ 使得} \langle x,y\rangle \in f\}。$$

若 f 是函数并且 $x \in dom(f)$，则使得 $\langle x,y\rangle \in f$ 成立的唯一的 y 记作 $f(x)$，并且称为 f 在 x 的**值**。若 f 是函数并且 $dom(f) = S$，$ran(f) \subseteq T$，则称 f 为**由 S 到 T（中）的函数**（或称 f **映射** S **到** T **中**），并且记作

$$f: S \to T。$$

若除此之外还有 $ran(f) = T$ 成立，则称 f **映射** S **到** T **上**（f 是**满射**）。函数 f 是**一一函数（内射）**，如果 $f(x) = f(y)$ 蕴涵 $x = y$。

S 上的 n 元函数 f 是映射 S^n 到 S 中的函数。例如，加是自然数集 N 上的二元函数，后继是 N 上的一元函数。如果 f 是 n 元函数并且 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle \in dom(f)$，则我们用

$$f(x_1,\cdots,x_n)$$

表示 $f(\langle x_1,\cdots,x_n\rangle)$。

设 R 是 S 上的 n 元关系，$S_1 \subseteq S$。R **到 S_1 上的限制**是 n 元关系 $R \cap S_1^n$。

设 $f: S \to T$ 是函数，$S_1 \subseteq S$。f **到 S_1 上的限制**是函数

$$f \mid S_1 : S_1 \to T。$$

它的定义如下：

$$对于每一 x \in S_1,(f|S_1)(x) = f(x)。$$

设 R 是二元关系。我们通常用

$$xRy$$

表示$\langle x,y\rangle \in R$。

我们定义以下的概念。

R 在 S 上是**自反的**，当且仅当对于任何 $x \in S$ ，xRx 。

R 在 S 上是**对称的**，当且仅当对于任何 $x,y \in S$ ，如果 xRy ，则 yRx 。

R 在 S 上是**传递的**，当且仅当对于任何 $x,y,z\in S$ ，如果 xRy 并且 yRz，则 xRz。

R 是 S 上的**等价关系**，当且仅当 R 在 S 上的自反的，对称的，并且是传递的。

设 R 是 S 上的等价关系。对于任何 $x\in S$，称集

$$\bar{x} = \{y \in S|xRy\}$$

为 x 的 R-**等价类**。于是，R-等价类作出 S 的一个**划分**，就是说，这些 R-等价类是 S 的子集，使得 S 的每个元恰好属于一个 R-等价类。(也就是说，这些 R-等价类是两两不相交的，并且它们的并就是 S 。)于是，对于任何 $x,y \in S$ ，

$$\bar{x} = \bar{y} 当且仅当 xRy。$$

集的基数是对集的大小的衡量。对于有限集，可以用自然数来衡量它的大小。基数将这种情形推广到无限集。

称两个集 S 和 T 为**等势的**，记作

$$S \sim T$$

当且仅当存在由 S 到 T 上的一一函数。$\sim$显然是等价关系。我们可以用等势将集分类，使得两个集属于同一个类，当且仅当它们是等势的。等势的有限集含有相同数目的元。于是我们可以用等势的概念将集所含元的数目这一概念推广，使之包括无限集的情形。

集 S 的**基数**(或**势**)，记作

$$|S|,$$

和 S 有这样的联系，使得

$$|S| = |T| \text{ 当且仅当 } S \sim T。$$

于是两个集有相同的基数，当且仅当它们是等势的。当 S 是有限集时，$|S|$ 是某一自然数，因为有限集 S 有自然数 n，使得 S 与 $\{0,\cdots,n-1\}$ 等势。我们注意，$|\varnothing|=0$。

$|S|\leqslant|T|$ 定义为，存在由 S 到 T 中的一一函数。

称 S 为**可数(可枚举)无限的**，当且仅当 $|S|=|N|$。称 S 为**可数(可枚举)的**，当且仅当 $|S|\leqslant|N|$，就是说，当且仅当 S 是有限的或可数无限的。

我们陈述一些关于可数集的定理而不加以证明。

定理 1.1.1

可数集的子集是可数的。 □

定理 1.1.2

有限个可数集的并是可数的。 □

定理 1.1.3

可数个可数集的并是可数的。 □

定理 1.1.4

有限个可数集的笛卡儿乘积是可数的。 □

定理 1.1.5

所有以可数集的元为分量的有限序列构成的集是可数的。

□

1.2 归纳定义和归纳证明

集的非形式的归纳定义通常包括若干规则，用来生成其中的元，然后再加说明，一个对象只有当它已根据这些规则生成之后才是属于这个集。归纳定义的一种等价的陈述是将所要定义的集刻划为封闭于这些规则的最小的集。

归纳定义的一个基本的例子是关于自然数集 N 的定义。

定义 1.2.1

[1]　$0 \in N$。

[2]　对于任何 n，如果 $n \in N$，则 $n' \in N$（n' 是 n 的后继）。

[3]　$n \in N$ 仅当 n 已由[1]和[2]生成。

定义 1.2.1 可以等价地陈述如下。

定义 1.2.2

N 是最小的集 S 使得

[1]　$0 \in S$。

[2]　对于任何 n，如果 $n \in S$，则 $n' \in S$。

设 R 是一个性质，$R(x)$ 表示 x 有 R 性质。

定理 1.2.3

如果

[1]　$R(0)$。

[2]　对于任何 $n \in N$，如果 $R(n)$，则 $R(n')$。

则对于任何 $n \in N$，$R(n)$。

证　设 $S = \{n \in N \mid R(n)\}$。$S$ 满足定义 1.2.2 中的[1]和[2]。因此 $N \subseteq S$，就是说，对于任何 $n \in N$，$R(n)$。　□

使用定理 1.2.3 作出的证明称为**归纳证明**（即用归纳法作出的证明）。我们将使用以下的与归纳证明有关的术语。命题“对于每一 $n \in N$，$R(n)$”是**归纳命题**，其中的变元 n 是**归纳变元**。证明由两步组成。第一步，称为（归纳的）**基始**，是定理 1.2.3 中[1]的证明。第二步，称为**归纳步骤**，是[2]的证明。归纳步骤中的假设 $R(n)$ 称为**归纳假设**。

定理 1.2.3 中的条件[2]可以换为

[2°]　对于任何 $n \in N$，如果 $R(0), \cdots, R(n)$，则 $R(n')$。

就是说，“对于任何 $n \in N$，$R(n)$”也能够由[1]和[2°]推导出。（证明从略。）这是归纳证明的另一种形式，称为**串值归纳法**。

串值归纳法还有另一种形式，在其中使用[2*]来代替[1]和[2°]：

[2^*] 对于任何 $n \in N$，如果对于每一 $m < n$，$R(m)$，则 $R(n)$。

当 $n=0$ 时，[2^*]是

1) 如果对于每一 $m < 0, R(m)$，则 $R(0)$。

因为"$m<0$"是假的，"对每一 $m<0, R(m)$"（它的涵义是"如果 $m<0$，则 $R(m)$"）是不需要证明的。于是，由 1)，我们有 $R(0)$，它就是[1]。[2°]显然能由[2^*]得到。因此，"对于每一 $n \in N, R(n)$"能由[2^*]推导出。

递归是一种在归纳定义的集上定义函数的方法，在这种定义中用早先定义出的值和已经给定的函数来列出所有的函数值。

例如，令 g 和 h 是 N 上的已知函数，则下列方程：

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f(n') = h(f(n)) \end{cases}$$

由 g 和 h 定义了 N 上的函数 f。虽然初看时 f 好象是由它自己定义的，然而情况并非如此，因为，对于每一 $n \in N, f(n)$ 能够由定义 f 的方程在有限步之内计算出来。称这种定义为**递归定义**。

定理 1.2.4（递归定义原理）

设 g 和 h 是 N 上的已知函数。存在唯一的函数 f 满足

$$\begin{cases} f(0) = g(0), \\ f(n') = h(f(n)). \end{cases}$$

证 施归纳于 n。 □

递归定义中的第二个方程可以有以下的形式：

$$f(n') = h(n, f(n))$$

其中的 h 是 n 和 $f(n)$ 的二元函数，n 是在计算出 $f(n')$ 之前应用第二个方程的次数。

集 S 的归纳定义的一般情形如下。假设给出了集 M 和 n_i 元函数 $g_i(i=1,\cdots,k)$。S 是最小的集 T 使得 $M \subseteq T$，并且对于任何 $x_1, \cdots, x_{n_i} \in T$，$g_i(x_1, \cdots, x_{n_i}) \in T$。

于是，当用归纳法证明 S 的每一元有某一性质这样的命题

时，(归纳的)基始是证明 S 中那种直接生成的元(这是指给定的集 M 中的元)有这性质。归纳步骤是证明给定的函数 g_i 保存这性质，就是说，当 S 的某些元有这性质时，由这些元经使用 g_i 而生成的元也有这性质。

递归定义原理的一般情形如下。设 S 是上述的归纳定义的集。令

$$h: M \to S$$

$$h_i: S^{n_i} \to S \quad (i = 1, \cdots, k)$$

是已知函数。于是存在唯一的函数 f 使得

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{对于每一 } x \in M, \\ f(g_i(x_1, \cdots, x_{n_i})) = h_i(f(x_1), \cdots, f(x_{n_i})) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{对于任何 } x_1, \cdots, x_{n_i} \in S. \end{cases}$$

归纳定义和递归定义将在形式语言的语法和语义的陈述中被广泛地使用。

1.3 记　号

本书将使用以下数学中标准的习惯用法。

符号⇒表示“蕴涵”，⇔表示“当且仅当”。我们也用⇐表示⇒的逆。

设 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是命题。我们用

$$\mathscr{A}_1 \Rightarrow \mathscr{A}_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathscr{A}_n$$

表示“$\mathscr{A}_1 \Rightarrow \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_{n-1} \Rightarrow \mathscr{A}_n$”，用

$$\mathscr{A}_1 \Leftrightarrow \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \mathscr{A}_n$$

表示“$\mathscr{A}_1 \Leftrightarrow \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_{n-1} \Leftrightarrow \mathscr{A}_n$”。

每章分为若干节。定义和定理(包括引理和推论)在每一节中是依次编号的。例如，“定义 2.2.3”表示第 2 章第 2.2 节中的第 3 个项目，并且它是一个定义。每节的习题另作编号。